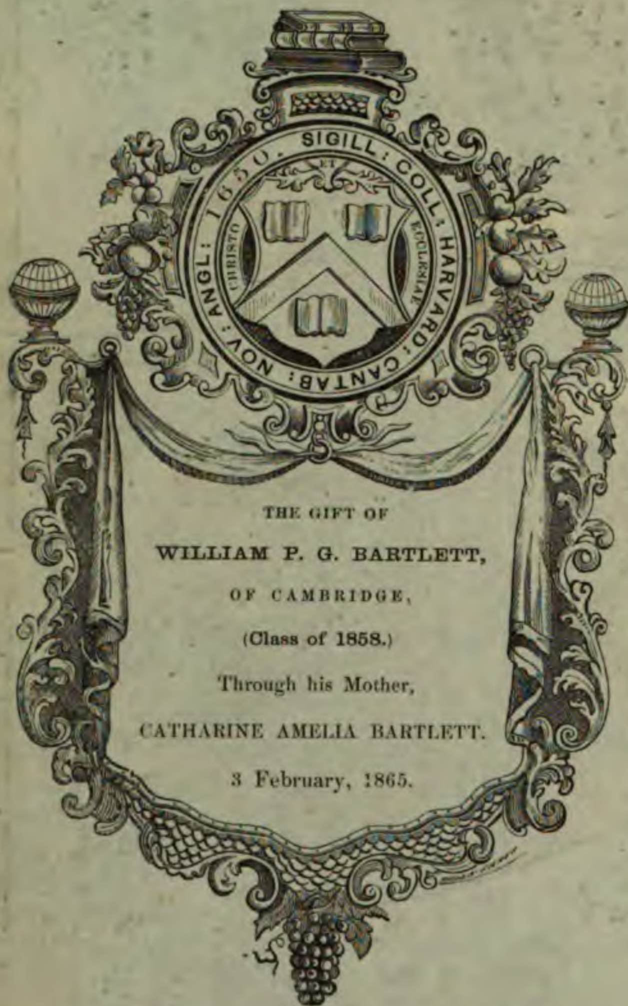

SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO
ET
ECCLESIAE



LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL.

IMPRIMERIE DE BACHELIER,
Rue du Jardinet, n° 12.

LEÇONS

DE

CALCUL DIFFÉRENTIEL

ET DE

CALCUL INTÉGRAL,

RÉDIGÉES

PRINCIPALEMENT D'APRÈS LES MÉTHODES

DE M. A.-L. CAUCHY,

ET ÉTENDUES AUX TRAVAUX LES PLUS RÉCENTS DES GÉOMÈTRES,

PAR M. L'ABBÉ M[redacted]

Tome 2.

Calcul intégral. — 1re Partie.

PARIS,

BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1844.

Tout exemplaire du présent ouvrage qui ne porterait pas, comme ci-dessous, la signature de l'Auteur et celle du Libraire-Éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires seront prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants et les débitants de ces exemplaires.

F. Moigno   Bachelier

TABLE DES MATIÈRES.

l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur soit égale à l'unité, dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouisse en dehors de cette étendue. — Détermination de l'intégrale triple

$$S = \frac{1}{n-1}\iiint\frac{dx\,dy\,dz}{[(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2]^{n-1}},$$

qui sert au calcul de l'attraction de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

— Méthode de M. Catalan, consistant à remplacer, à l'aide de considérations géométriques, un élément de surface ou de volume, par un autre plus facile à intégrer. — Application à la détermination de la surface totale de l'ellipsoïde donnée par l'équation

$$S = 2\pi c^2 + \frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)E(k,\mu)+c^2F(k,\mu)].$$

— Démonstration de la formule

$$S = \iiint dx\,dy\,dz\sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2}}$$
$$=\frac{1}{b}\pi\left(\frac{1-m^2}{m}\frac{dU}{dm}+\frac{1-n^2}{n}\frac{dU}{dn}+\frac{1-p^2}{p}\frac{dU}{dp}\right).$$

— Extension analytique de cette méthode à un nombre quelconque de variables. — Applications diverses. — Note sur la détermination des limites des variables λ, μ, ν, ..., liées à x, y, z, ... par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}+\ldots=1,$$
$$\frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}+\ldots=1,\ldots,$$

SECONDE PARTIE.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

En livrant enfin au public le premier volume des *Leçons de Calcul intégral,* dont l'impression a été commencée en 1841, j'ai d'abord à rendre raison d'un si long retard.

Deux causes principales peuvent me servir d'excuse, et me justifient, je crois, pleinement : la première sera rendue évidente par la publication même de ce volume ; pour la seconde, ceux qui ne me connaissent pas voudront bien me croire sur parole.

Quand les *Leçons de Calcul différentiel* parurent, elles étaient l'expression vraie de l'état de la science ; on a même bien voulu reconnaître que, sur quelques points importants, j'entrais dans une voie nouvelle. Je voulais qu'il en fût de même des *Leçons de Calcul intégral;* mais en prenant cette détermination, j'avais mal apprécié le fardeau que je m'imposais ; j'ai cru un instant qu'il serait au-dessus de mes forces, je n'ai pu arriver au terme qu'avec une excessive lenteur et de trop pénibles efforts.

Pendant que le *Calcul différentiel* restait stationnaire, le *Calcul intégral* faisait d'immenses progrès et changeait presque de face, à tel point que j'ai conservé quelques feuilles à peine du manuscrit auquel je travaillais depuis plusieurs années, et dont l'impression aurait pu s'achever en quelques mois. Une ère nouvelle semblait s'ouvrir : des difficultés, jusque-là inabordables, trouvaient une solution facile ; les limites devant lesquelles Euler, Lagrange, Laplace, Legendre,... avaient été forcés de s'arrêter, étaient reculées bien loin. Un grand nombre de géomètres, MM. Cauchy, Liouville, Sturm, Binet, Lamé, Catalan, Blanchet, Bertrand en France ; MM. Gauss, Jacoby, Lejeune-Dirichlet, Richelot en Allemagne ; M. Lobatto dans les Pays-Bas ; MM. Ostrogradzky et Bouniakowsky en Russie ; M. Tortolini à Rome, rivalisaient d'activité et de bonheur. Les Recueils scientifiques, si multipliés aujourd'hui, m'apportaient chaque semaine plusieurs Mémoires à étudier, des théories plus générales et plus simples à exposer, des applications heureuses à développer, etc., etc. : c'était toujours me condamner à de nouvelles études, et m'imposer une rédaction nouvelle. M. Cauchy a publié, à lui seul dans cet intervalle, plus de quatre-vingts Notes ou Mémoires sur le calcul intégral, que j'ai dû analyser au moins dans ces Leçons.

Pour suivre sans trop de retards un mouvement si rapide, j'aurais eu besoin de beaucoup de temps ; j'aurais dû me soustraire à toute autre occupation ; faire des Mathématiques l'objet exclusif de mes tra-

vaux; mais un prêtre ne peut pas échapper à une autre sorte de mouvement, qui trop souvent l'emporte, et doit l'emporter malgré lui.

Il est, pour ainsi dire, un homme public; il se doit à tous, car tous ont des droits au ministère si multiple qui lui a été confié. Établi de Dieu pour soutenir, relever, encourager et consoler, il ne peut rester insensible aux gémissements de l'infortune, du repentir ou de la douleur: il faut qu'il lutte contre l'égoïsme, si commun de nos jours, contre l'indifférence religieuse qui, dans ces temps de peu de foi, règne trop en souveraine autour de lui: il essayerait en vain de se rendre étranger aux charitables entreprises dont le succès peut dépendre de son concours.

J'ai souvent résisté à ce noble entraînement, mais plus souvent j'ai été forcé de céder : je ne me repentirai jamais d'une faiblesse qui fait ma gloire. La Providence a béni ma coopération à quelques grandes œuvres qui contribueront puissamment, je l'espère, à la moralisation et au soulagement des classes ouvrières.

Il fallait s'arrêter cependant, car les droits évidents de l'homme honorable qui a bien voulu supporter les frais de cette lourde publication; car les justes réclamations des nombreux acheteurs de mon premier volume, de ceux surtout qui, plus bienveillants encore, avaient voulu qu'on leur livrât d'avance les premières feuilles des *Leçons de Calcul intégral;* car les bienveillants reproches des savants qui m'honorent de leur estime et de leur amitié, me rappe-

laient trop vivement l'obligation de rigoureuse justice qui pesait sur moi.

Je ne pouvais me faire illusion plus longtemps.

Il fallait rompre avec cet entraînement, tout noble et tout saint qu'il fût; il fallait m'arracher même aux bras de ces milliers d'ouvriers qui m'ont fait de si touchants adieux; il fallait fuir jusqu'à mes meilleurs amis, et me cacher dans une solitude profonde. Je l'ai fait.

Là, tout entier à Dieu et à moi, j'ai repris avec courage d'arides, mais chères études, et me suis efforcé d'arriver à remplir, dans le plus court délai, les engagements de justice et d'honneur que j'avais contractés.

Voilà le secret de cette longue retraite de six mois qui a succédé tout à coup à une vie active, à une présence de tous les jours; retraite que chacun s'est efforcé d'expliquer à sa manière aux dépens de la vérité, et quelquefois même de la charité; retraite qui a compromis mon avenir, où j'ai rencontré des chagrins que je ne maudis point, que je bénis au contraire, car le seul bonheur de l'homme ici-bas est l'accomplissement de son devoir, au prix, s'il le faut, de tous les sacrifices.

Voilà la vérité, je la devais à mes lecteurs et à moi-même. J'arrive maintenant à la partie technique de cette introduction.

J'avais annoncé que les *Leçons de Calcul intégral* ne dépasseraient pas un volume, mais je n'ai pas tardé à reconnaître qu'un pareil engagement entraînerait une impossibilité absolue. Pour me renfermer

dans des limites si resserrées, j'aurais dû me condamner à publier un ouvrage tout à fait incomplet. C'eût été mal servir les intérêts de la science et méconnaître ses progrès.

Le grand Traité de Lacroix a vieilli et n'est pas encore remplacé : je n'ai pu supporter la pensée que, de longtemps peut-être, les amis si nombreux des sciences mathématiques ne pourraient qu'avec beaucoup de fatigues et de dépenses, s'initier aux travaux remarquables des géomètres modernes, étudier leurs savantes théories.

Une considération bien simple m'a encore frappé : si en 1811 les Traités élémentaires de Calcul intégral, celui de Dubourguet par exemple, comprenaient un volume de cinq cents pages, n'est-il pas tout naturel qu'en 1844, après tant de découvertes et de difficultés vaincues, cet espace soit presque doublé ?

Il fallait donc deux volumes : j'aurais voulu du moins que le premier renfermât le Calcul intégral proprement dit, c'est-à-dire l'intégration des expressions différentielles, des équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles; mais c'était trop encore. Le volume, tel que je l'avais conçu, avait soixante-deux feuilles, plus de mille pages; j'ai été forcé d'adopter une division différente.

Je renvoie forcément à la seconde partie de ces Leçons l'intégration des équations aux dérivées partielles, les applications analytiques et géométriques qui dépendent de l'intégration des équations différentielles, le calcul des variations, l'application du cal-

cul des résidus au calcul intégral, le calcul inverse aux différences finies, la théorie des fonctions elliptiques, etc., etc.; enfin, une table analytique très-détaillée dans laquelle j'indiquerai, aveo la plus scrupuleuse exactitude, la part qui revient, dans cet ouvrage, aux géomètres dont j'ai étudié les travaux, l'auteur véritable de chaque théorie, de chaque application importante, les sources où j'aurai puisé, etc., etc.

Si dans le texte de ces Leçons j'ai paru éviter les détails historiques, c'est que j'ai craint de nuire à la clarté et à l'ensemble des démonstrations. Je demande qu'on me le pardonne; bientôt je rendrai à tous pleine justice: on ne me verra jamais disputer à qui que ce soit la gloire qui lui est due.

Je dois compte aussi à mes lecteurs de la méthode que j'ai adoptée. Dans la préface de l'ouvrage qui a pour titre : *Traité élémentaire de la Théorie des fonctions et du Calcul infinitésimal*, M. Cournot, inspecteur général des études, m'attaque sans me nommer. Il me reproche une prédilection trop exclusive pour la manière d'un maître; une sobriété trop grande de considérations philosophiques.

Je n'accepte pas le premier de ces reproches; je suis heureux, au contraire, d'avoir mérité le second.

J'ai une prédilection évidente pour la manière de M. Cauchy, j'en conviens. Cette prédilection est légitime, je l'ai justifiée, dans l'introduction aux *Leçons de Calcul différentiel*, par des preuves surabondantes, et ceux qui voudront bien étudier ce nouvel ouvrage reconnaîtront nécessairement que, pour le Cal-

cul intégral comme pour tant d'autres branches des sciences mathématiques et physiques, la gloire du progrès appartient surtout à l'illustre géomètre dont je suis l'élève et l'ami. Mais cette prédilection n'est pas exclusive, bien au contraire. Je n'adopte, en la modifiant, la rédaction de M. Cauchy qu'autant que je ne trouve pas ailleurs des théories plus générales, des démonstrations plus simples. Toutes les fois que plusieurs méthodes également rigoureuses et élégantes conduisent à la solution d'une question importante, je les mets toujours en présence, et si M. Cournot veut bien comparer quelques-unes de ces Leçons aux chapitres correspondants de son ouvrage, les Leçons, par exemple, sur l'intégration des équations différentielles linéaires, il regrettera l'accusation qu'il a trop légèrement portée contre moi.

Quand il fut reconnu que le puissant génie de Raphaël avait presque dépassé les limites du possible, qu'à la perfection incomparable du dessin, à la finesse et à la fermeté du pinceau, au naturel et à la pureté du coloris, il joignait le sentiment le plus exquis du beau, ses chefs-d'œuvre devinrent dès lors les modèles par excellence, sa manière fut imposée au monde. Ce qui n'empêche pas que les artistes consciencieux doivent s'efforcer d'imiter du Poussin la belle ordonnance de ses tableaux, de Rubens l'éclat du coloris, de Valentin la science profonde du clair obscur, de Murillo le mouvement et la vie, du Guide ses airs de tête si pleins d'expression, etc., etc.

C'est la règle que j'ai suivie dans le domaine bien plus aride des mathématiques.

J'ai dit que j'acceptais sans excuse le second reproche. Plus que tout autre, peut-être, je devais aimer les discussions philosophiques. Initié par mon éducation, par mes études, et par l'enseignement de la théologie, à toutes les subtilités de l'école, j'avais, suivant l'expression de M. Cournot, acquis le droit de *faire ma métaphysique;* je ne l'ai pas voulu. J'ai repoussé bien loin ces considérations trop abstraites sur les infiniment petits qui viennent s'abîmer dans la question éternellement agitée de la divisibilité de la matière à l'infini, et sur lesquelles on ne sera jamais d'accord. J'ai renoncé même à ces comparaisons entre les diverses méthodes qui peuvent faire le sujet de quelques développements oraux, mais qui doivent être bannies, je le crois, d'un Traité classique, parce qu'elles jettent sur les principes fondamentaux une obscurité à laquelle l'élève n'échappe presque jamais. J'ai même vu qu'il y avait quelque danger à dire trop tôt, comme je l'ai fait, que le grand Euler regardait comme essentiellement nulles les différentielles dont M. Cauchy fait des quantités finies, parmi lesquelles il trouve même une unité. Ces considérations métaphysiques, ces comparaisons délicates feront naturellement, il me semble, la matière d'un ouvrage à part dont j'ai rédigé plusieurs chapitres, et que je publierai s'il se présente une occasion favorable. Je montrerai aussi, dans ce petit Traité, l'immense parti qu'on peut tirer de la méthode infinitésimale géométrique. Mais dans ces Leçons d'analyse pure je n'ai dû chercher qu'une chose, la simplicité et la rigueur des démonstrations.

Me sera-t-il permis de croire qu'avec l'aide si puissant de M. Cauchy, j'ai fait, sous ce rapport, beaucoup plus que ceux qui m'ont précédé? Je n'essayerai pas de le démontrer par une comparaison, cependant facile, de mes Leçons avec des Traités estimés, celui de M. Cournot par exemple.

Je passe à des considérations plus importantes sur la marche que j'ai suivie.

J'ai cru, avec M. Cauchy, qu'on ne pouvait expliquer nettement la dénomination et le but du Calcul intégral, rendre raison de ses notations fondamentales, et de sa liaison avec le Calcul différentiel, qu'en partant de l'intégrale définie, que je considère comme la limite vers laquelle converge indéfiniment la somme des valeurs infiniment petites que prend la différentielle quand on passe par degrés insensibles d'une première valeur réelle et finie x_0, à une seconde valeur réelle et finie X. J'arrive plus tard à l'intégrale indéfinie, dont l'existence est ainsi rigoureusement démontrée, indépendamment des considérations géométriques auxquelles on est forcé autrement de recourir.

M'éloignant ensuite de la marche suivie par M. Cauchy, et pour ne pas effrayer dès le début, je renvoie à la sixième Leçon la recherche plus aride et plus difficile des intégrales définies. Les quatre Leçons qui précèdent ont pour objet l'exposition plus facile des méthodes d'intégration indéfinie.

Lorsque la fonction sous le signe $\int$ cesse d'être finie et continue, et quelquefois aussi lorsque les limites de l'intégrale deviennent infinies, l'intégrale

définie peut devenir infinie ou indéterminée : souvent cette indétermination n'est qu'apparente, et l'intégrale n'a, en réalité, qu'une valeur unique et finie : souvent, au contraire, l'indétermination est réelle, et l'intégrale a une infinité de valeurs ; mais, parmi ces valeurs, il en est une plus remarquable que les autres, et que M. Cauchy a désignée sous le nom de valeur principale : enfin l'intégrale indéfinie, qui est en général très-petite lorsque les limites sont très-rapprochées, peut, lorsque la fonction sous le signe $\int$ cesse d'être continue, acquérir une valeur finie, et devenir alors ce qu'on appelle une intégrale définie singulière.

Ces particularités importantes font l'objet des sixième et septième Leçons. La théorie des intégrales singulières est très-féconde ; elle fournit la valeur d'un grand nombre d'intégrales qu'il serait difficile de calculer autrement ; elle conduit même à des formules générales propres à la détermination des intégrales définies.

Il est encore une autre remarque due à M. Cauchy, et qui l'a conduit à des résultats vraiment inattendus. Les expressions obtenues par une double intégration peuvent différer l'une de l'autre et dépendre de l'ordre des intégrations lorsque la fonction de deux variables, placée sous le double signe $\int\int$, ou ses dérivées, cessent d'être finies et continues : la neuvième Leçon apprend à calculer cette différence, dans le cas même où la fonction sous le signe $\int\int$ est imaginaire.

J'ai peine à comprendre que cette remarque im-

portante soit encore si peu connue, et que tous les jours des géomètres exercés se permettent d'intervertir l'ordre des intégrations sans s'assurer d'avance que cette inversion est possible. Beaucoup de démonstrations deviennent par là tout à fait incomplètes.

Pour habituer les élèves au calcul, et les mieux préparer à une étude plus approfondie des intégrales multiples, j'ai appliqué les théories qui précèdent à la résolution des trois grands problèmes de la rectification des courbes planes et à double courbure, de la quadrature des surfaces planes et courbes, de la cubature des solides. J'ai consacré quatre Leçons à ces applications fondamentales, que M. Cauchy a traitées avec une rare élégance. Une Note intéressante de M. Tortolini, publiée dans le *Gionarle arcadico*, m'a fourni la matière de la douzième Leçon. Le géomètre italien résout avec adresse ce problème : Étant donnée la relation qui existe entre l'arc d'une certaine courbe et l'une des coordonnées de son extrémité, trouver l'équation de cette courbe. J'ai appliqué avec lui sa théorie à quelques exemples bien choisis, et dans lesquels le calcul s'achève.

J'ai repris dans la seizième Leçon le problème de la quadrature des surfaces et de la cubature des solides sous un point de vue plus général. Cette méthode nouvelle, que j'ai rédigée sur des Notes de M. Cauchy, donne non-seulement la surface ou le volume compris entre certaines limites, mais toute autre quantité assujettie à croître ou à décroître avec cette surface ou ce volume.

Le résumé complet des travaux des géomètres

modernes sur la réduction des intégrales multiples commence à la dix-septième Leçon. Comme le procédé de réduction le plus fécond repose sur une transformation de coordonnées adroitement choisies, j'ai cru qu'il fallait, pour procéder avec ordre, donner d'abord des notions suffisantes sur les systèmes de coordonnées dont les géomètres se sont servis avec le plus de bonheur. Je considère en particulier celles que M. Lamé a désignées sous le nom de *coordonnées elliptiques*. Dans ce système, un point quelconque de l'espace est considéré comme l'intersection de trois surfaces du second degré dépendantes chacune d'un paramètre variable. Ces surfaces homofocales jouissent de propriétés remarquables que je rappelle en peu de mots.

Ces préliminaires posés, il fallait établir la formule générale à l'aide de laquelle on effectue dans le Calcul intégral un changement de variables. Une grande lacune existait à cet égard dans les Traités même complets. Je me suis efforcé de la combler. Aux quelques mots que l'on trouvait dans les ouvrages connus, j'ai substitué deux méthodes rigoureuses empruntées à MM. Cauchy et Catalan : je regrette de n'avoir pas pu exposer celle de M. Jacobi, mais elle aurait exigé trop de développements.

J'aborde ensuite directement le problème de la transformation ou de la réduction des intégrales multiples les plus remarquables, en apprenant à retrouver un certain nombre de formules données par MM. Cauchy, Poisson, Liouville, Lamé, Lejeune-Dirichlet, Chasles, Catalan, Tortolini.

Les procédés suivis par MM. Dirichlet et Catalan sont surtout remarquables. Le premier de ces géomètres multiplie l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur soit égale à l'unité dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouisse en dehors de cette étendue. Le second s'appuie de considérations géométriques très-fines qui lui permettent de substituer, à un élément de surface ou de volume difficile à intégrer, un autre élément équivalent, mais qui est tel qu'on puisse effectuer immédiatement une ou deux intégrations. Des considérations analytiques fort simples étendent cette méthode au cas d'un nombre quelconque de variables.

J'avouerai sans peine que je me suis laissé entraîner par l'originalité de ces recherches, et qu'elles occupent une trop grande place dans ces Leçons. J'apporterai pour excuse un fait qui est pour moi une donnée de l'expérience : on ne peut apprendre sérieusement le Calcul intégral qu'en échappant aux chemins battus, à la routine des Traités ordinaires, pour suivre les maîtres de la science dans les voies nouvelles qu'ils parviennent à se frayer.

La méthode de réduction de M. Dirichlet repose sur une formule très-féconde donnée d'abord par Euler, et que Poisson démontra le premier rigoureusement, en partant de l'intégration d'un système d'équations simultanées. C'était un chemin détourné : je n'ai pu me résoudre à renvoyer à la seconde partie du *Calcul intégral* la recherche pénible d'une intégrale définie que j'avais employée

dans la première. J'ai mieux aimé analyser deux Mémoires de M. Cauchy, très-remarquables et trop peu connus, qui ont pour titres : l'un, *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires;* l'autre, *Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues, et celles d'un grand nombre d'autres.* On trouvera d'ailleurs, dans cette vingt-unième Leçon, et les vraies bases du passage du réel à l'imaginaire, et un procédé très-ingénieux et très-général, qui conduit à la détermination d'une multitude d'intégrales définies. J'ai donné comme exemple de cette méthode la détermination, par la curieuse formule de Wallis, du rapport de la circonférence au diamètre.

J'arrive ensuite à la seconde partie du *Calcul intégral* ou à l'intégration des équations différentielles, non sans regretter de n'avoir pas consacré quelques Leçons à l'intégration des expressions différentielles à plusieurs variables. Marchant sur les traces de tous les auteurs connus, je n'ai pas assez séparé l'intégration d'une expression différentielle de l'intégration des équations différentielles. La lecture récente du grand Traité que M. Raabe, professeur à Zurich, publie sous ce titre : *Die differenzial und Integral rechnung mit functionen mehrerer variabeln,* m'a donné l'idée de quelques Leçons supplémentaires que l'on trouvera dans le volume suivant.

Les Leçons vingt-deuxième, vingt-troisième, vingt-quatrième et vingt-cinquième n'offrent rien de bien nouveau.

J'expose dans la vingt-sixième Leçon la méthode rigoureuse à l'aide de laquelle M. Cauchy démontre l'existence d'une valeur propre à vérifier une équation différentielle du premier ordre, et apprend à calculer cette valeur avec un degré d'approximation donné. Cette méthode, qui fut un grand pas dans la science, a été imprimée, mais les feuilles qui la contenaient n'ont pas été livrées au public; elle est par conséquent très-peu connue.

Dans la vingt-huitième Leçon j'apprends à déterminer la limite des erreurs que l'on peut commettre en calculant par le procédé dont je viens de parler les intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre.

Les solutions singulières ont des caractères spéciaux à l'aide desquels on peut les déduire immédiatement, avant l'intégration, de l'équation différentielle donnée, et qu'Euler, Lagrange, Laplace, Poisson avaient tour à tour étudiés. Ces grands géomètres avaient essayé de démontrer que la propriété caractéristique des solutions singulières était de rendre infini ou indéterminé le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dy}$; mais cette propriété est moins générale qu'ils ne l'avaient cru, et la démonstration qu'ils en avaient donnée dépendait de développements en séries dont rien ne prouve la convergence: on verra dans la vingt-neuvième Leçon comment M. Cauchy est parvenu à définir rigoureusement le caractère propre des solutions singulières, et à les séparer des intégrales particulières.

En outre de la formule de Riccati, j'ai donné

comme applications, dans la trente-unième Leçon, l'intégration de l'équation

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy - (C + C'x + C''y)dx = 0,$$

traitée récemment par M. Jacoby; et celle de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0 y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4}},$$

que j'intègre par diverses méthodes.

La trente-deuxième Leçon a pour objet l'intégration des différentielles totales du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables. On y trouvera une transformation élégante de l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$, transformation à l'aide de laquelle on met immédiatement en évidence le cas où ce trinôme est une différentielle exacte.

J'étends, dans la trente-troisième Leçon, à un système de n équations simultanées du premier ordre, à $n + 1$ différentielles, ou à n dérivées, la méthode rigoureuse d'intégration déjà appliquée, dans la vingt-septième Leçon, à l'intégration d'une équation du premier ordre à deux variables. Cette Leçon de M. Cauchy, entièrement inédite, me semble tout à fait remarquable par son élégante simplicité.

C'est un fait digne d'attention qu'on n'arrive, dans le Calcul intégral, à résoudre les grandes difficultés qu'en faisant entrer immédiatement dans le calcul

les valeurs particulières correspondantes des inconnues primitives, et des inconnues nouvelles, ou, ce qui revient au même, en remplaçant d'avance les constantes arbitraires que doit introduire l'intégration par les valeurs particulières des variables et de leurs dérivées.

On remarquera dans la trente-quatrième Leçon, qui traite de l'intégration des équations linéaires simultanées du premier ordre, la méthode simple par laquelle on complète l'intégrale, dans le cas où l'équation que M. Cauchy appelle l'équation caractéristique, et dont les n racines conduisent aux n intégrales cherchées, offre des racines égales.

J'ai cru qu'en traitant de l'intégration d'une équation différentielle d'ordre quelconque, je ne pouvais me dispenser d'établir, d'une manière rigoureuse, les conditions d'intégrabilité de l'expression différentielle d'ordre n, $F(x, y, D_x y, \ldots, D_x^n y)$. Lexell, Lagrange, Poisson semblent avoir ignoré qu'Euler avait établi non-seulement que la condition

$$D_y F - D_x D_{y'} F + D_x^2 D_{y''} F - \ldots = 0$$

était nécessaire, mais encore qu'elle était suffisante. Les méthodes par lesquelles Lagrange, Poisson et M. Bertrand ont essayé de démontrer la formule d'Euler, indépendamment du calcul des variations, ne sont pas pleinement rigoureuses; celle que j'ai suivie dans ces Leçons m'a été communiquée par M. Jacques Binet; elle est à l'abri de toute objection sérieuse.

Je recommande, comme plus dignes d'attention,

les deux Leçons suivantes, qui traitent des propriétés générales des équations linéaires de l'ordre n, à coefficients variables ou constants, avec ou sans second membre. Il me semble que j'ai résumé avec clarté tout ce que l'on a écrit sur ce sujet. J'ai exposé avec soin toutes les méthodes, persuadé que c'était une occasion favorable pour initier les élèves à la manière des divers géomètres, et aux ressources si multipliées de l'analyse. M. Liouville, dans le deuxième volume de son Journal, a revendiqué pour d'Alembert la gloire du procédé d'intégration que M. Libri s'était attribué, et qui repose sur cette propriété fondamentale: Si l'on connaît m intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire sans second membre, on pourra toujours ramener l'intégration de l'équation avec second membre à l'intégration d'une nouvelle équation linéaire d'ordre $n - m$. Je n'ai pas été peu surpris de retrouver dans un auteur trop peu connu, Dubourguet, toute cette théorie, et jusqu'à la formule par laquelle on exprime, au moyen d'une intégrale multiple, l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire avec second membre, en fonction des n intégrales particulières de l'équation sans second membre.

Dans la trente-huitième Leçon, qui a pour titre : *Intégration de quelques équations linéaires de l'ordre n, à coefficients variables,* je signalerai surtout la méthode d'intégration de l'équation

$$D_x^2 z - ax^m z = 0,$$

ou de l'équation de Riccati, à l'aide d'une intégrale

définie, méthode que M. Wantzel a communiquée récemment comme nouvelle à l'Académie des Sciences, et que j'ai trouvée dans l'excellente rédaction des Leçons de M. Cauchy que fit, en 1817, M. Bugnot, actuellement sous-inspecteur des études à l'École Polytechnique.

Le procédé par lequel M. Lobatto intègre les deux équations

$$D_x^n y - xy = 0, \quad D_x^2 y + abx^n y = 0,$$

est aussi fort instructif.

Enfin, pour rendre plus sensibles les théories que j'ai exposées, pour familiariser avec les artifices de calcul par lesquels on est obligé de suppléer sans cesse à l'imperfection des théories générales, pour montrer l'immense parti qu'on peut tirer de transformations habilement devinées, pour mieux faire connaître l'état actuel de la science, j'ai cru nécessaire de passer en revue rapidement les diverses classes d'équations que les géomètres sont parvenus à intégrer directement ou à l'aide de procédés plus ou moins détournés.

On remarquera, parmi ces applications, l'intégration du système suivant d'équations du second ordre

$$D_t^2 x = D_x R, \quad D_t^2 y = D_y R, \quad D_t^2 z = D_z R, \ldots,$$

à laquelle M. Binet est parvenu par des considérations très-ingénieuses.

On a vu, dans ce qui précède, comment on pouvait ramener l'intégration d'une équation différentielle de l'ordre n à l'intégration de n équations simultanées du premier ordre. Je montre dans la

trente-neuvième Leçon comment, au contraire, on peut ramener l'intégration d'un système de n équations simultanées du premier ordre à celle d'une seule équation de l'ordre n.

Lorsqu'aucune des méthodes par lesquelles nous avons appris jusqu'ici à intégrer les équations différentielles ne réussit, on est forcé de recourir à l'intégration par série. J'expose sous toutes les formes qu'on lui a données cette nouvelle méthode, qui ne doit être employée qu'avec beaucoup de réserve.

Quelques considérations sur les solutions singulières des équations d'ordre quelconque remplissent les dernières pages de la trente-neuvième Leçon.

L'intégration par approximation des équations différentielles est illusoire tant qu'on ne fournit aucun moyen de s'assurer, comme nous l'avons fait dans la vingt-septième et la trente-troisième Leçon, que les valeurs obtenues sont convergentes, ou que les limites dont elles s'approchent indéfiniment sont des fonctions propres à vérifier les équations différentielles données. La méthode que j'ai alors exposée est rigoureuse, et ne laisse rien à désirer sous le rapport de la théorie; je l'ai d'ailleurs étendue à un système d'équations différentielles d'ordre quelconque dont on peut ramener l'intégration à celle d'équations différentielles simultanées du premier ordre. M. Cauchy a depuis fait connaître un nouveau procédé d'intégration par série qui, sous le rapport pratique, et sous d'autres points de vue, présente de nombreux avantages. Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir les intégrales en termes finis, cette belle méthode permet

du moins de démontrer rigoureusement l'existence des intégrales générales, et de les calculer avec une approximation aussi grande que l'on veut, parce qu'elle fournit et les conditions sous lesquelles les séries qui représentent ces intégrales restent convergentes, et des limites supérieures aux erreurs que l'on commet en conservant seulement dans chaque série ses *n* premiers termes.

C'est jusqu'ici le dernier mot de la science sur l'intégration des équations différentielles; je me suis arrêté là.

Deux Notes seulement complètent ce volume : l'une, de M. Cauchy, rendra plus facile le calcul des *maxima maximorum;* l'autre, de M. Liouville, a pour objet de montrer comment, en suivant une indication très-remarquable, donnée autrefois par Poisson, et développée depuis par M. Jacoby, on peut, dans un grand nombre de cas, déduire les unes des autres les intégrales d'un système d'équations différentielles données.

Voilà l'aperçu complet de ce second volume; j'aime à croire qu'on le trouvera bien rempli: il résume près de 500 feuilles in-4°.

Je ne dirai rien des notations que j'ai employées; j'ai voulu qu'elles ne fatigassent pas l'œil, qu'elles fussent toujours simples et significatives par elles-mêmes; je crois avoir atteint ce but.

On se persuade trop souvent que la rédaction devient plus concise et plus claire quand on donne presque à chaque équation son numéro; je suis convaincu que c'est une erreur; on ne lit pas des

Mémoires ainsi rédigés : j'ai suivi une marche tout opposée. Je n'ai désigné par des chiffres ou par des lettres qu'un très-petit nombre d'équations fondamentales. J'ai pu ainsi réduire à deux feuilles in-8° des Mémoires de sept à huit feuilles in-4°, qui renfermaient plus de deux cents équations numérotées. J'ai substitué le plus souvent aux numéros les lettres initiales des mots qui caractérisent les équations : ainsi, (D) représente, pour moi, les équations données, (I) l'intégrale, (C) l'équation caractéristique ou de condition, (E) l'erreur commise, $[E_n^{(x)}]$ cette même erreur, lorsque dans la série qui donne le développement de l'une quelconque des n variables indépendantes, liées à la variable indépendante par un système de n équations du premier ordre, on prend seulement les n premiers termes, etc.

Il est dans le Calcul intégral, un principe qu'on doit appeler fondamental : il consiste en ce que l'intégrale définie est égale à la différence entre les limites multipliées par une valeur moyenne de la fonction sous le signe $\int$. Ce principe, et un grand nombre de résultats importants, reposent sur l'emploi si fécond du théorème suivant : Si $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ sont des quantités de même signe, la somme

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots$$

sera égale au produit de la somme $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ des quantités de même signe, par une quantité moyenne entre les coefficients $a, a', a'', \ldots$. Ce théorème est lui-même un cas particulier de la proposition plus générale que je vais démontrer.

Si b, b', b'',... sont des quantités de même signe, le quotient que l'on obtient en divisant la somme des numérateurs des fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$,... par la somme de leurs dénominateurs, est une moyenne entre ces mêmes fractions, c'est-à-dire une quantité plus grande que la plus petite d'entre elles, plus petite que la plus grande.

Désignons en effet par g la plus grande de ces fractions, et par p la plus petite, on aura

$$\frac{a}{b}\begin{matrix}>p\\<g\end{matrix},\quad \frac{a'}{b'}\begin{matrix}>p\\<g\end{matrix},\quad \frac{a''}{b''}\begin{matrix}>p\\<g\end{matrix},\ldots,$$

et, par suite : si b, b', b'',... sont positifs,

$$a\begin{matrix}>bp\\<bg\end{matrix},\quad a'\begin{matrix}>b'p\\<b'g\end{matrix},\quad a''\begin{matrix}>b''p\\<b''g\end{matrix},\ldots,$$

$$a+a'+a''+\ldots\begin{matrix}>(b+b'+b''+\ldots)p\\<(b+b'+b''+\ldots)g\end{matrix}$$

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}\begin{matrix}>p\\<g\end{matrix};$$

si b, b', b'',... sont négatifs,

$$a\begin{matrix}<bp\\>bg\end{matrix},\quad a'\begin{matrix}<bp\\>bg\end{matrix},\quad a''\begin{matrix}<bp\\>bg\end{matrix},\ldots,$$

$$a+a'+a''+\ldots\begin{matrix}<(b+b'+b''+\ldots)p\\>(b+b'+b''+\ldots)g\end{matrix},$$

$$\frac{a+a'+a''+\ldots}{b+b'+b''+\ldots}\begin{matrix}>p\\<g\end{matrix}.$$

Corollaire. Si α, α', α'',... sont, ainsi que b, b', b'',..., des quantités de même signe, les dénominateurs des fractions

$$\frac{a\alpha}{b\alpha},\quad \frac{a'\alpha'}{b'\alpha'},\quad \frac{a''\alpha''}{b''\alpha''},\ldots$$

seront encore des quantités de même signe; on aura donc

$$\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \ldots} \begin{matrix} > p \\ < g \end{matrix}.$$

Dès lors, si l'on pose

$$b = b' = b'' = \ldots = 1,$$

p sera la plus petite et g la plus grande des quantités $a, a', a'', \ldots$, et, en désignant par la notation $M.(a, a', a'', \ldots)$ une moyenne entre ces quantités, on aura

$$a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots) M.(a, a', a'', \ldots).$$

Une remarque encore, et j'ai fini. J'ai admis, sans le démontrer, comme une conséquence évidente de l'équation

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

qui est fondamentale dans le Calcul différentiel, que toute fonction $f(x)$, dont la dérivée $f'(x)$ est constamment nulle, est nécessairement une constante; et, en effet, si $f'(x)$ est toujours nulle, on aura

$$f'[x_0 + \theta(x - x_0)] = 0, \quad f(x) = f(x_0) = c.$$

J'ajoute que la constante c est tout à fait arbitraire, et que si l'on permet à la fonction $f(x)$ d'offrir des solutions de continuité correspondantes à diverses valeurs de x, il ne sera pas nécessaire qu'elle conserve la même valeur depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$. On pourra demander qu'elle demeure constante seulement entre deux termes consécutifs de la suite

$$-\infty, \; x_1, \; x_2, \ldots, \; x_m, \; +\infty,$$

en prenant tour à tour les valeurs $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$. Si l'on convient, avec M. Cauchy, de désigner toujours par la notation $\sqrt{a^2}$ la racine positive, c'est-à-dire $+a$ ou $-a$, suivant que a est positif ou négatif, la fonction $f(x)$ qui satisfera aux conditions énoncées ci-dessus sera évidemment donnée par l'équation suivante :

$$f(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2}} + \ldots + \frac{c_m - c_{m-1}}{2} \frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}.$$

En effet, la fonction $f(x)$ ainsi déterminée sera constamment égale à c_0 entre les limites $x = -\infty$, $x = x_1$; à c_1 entre les limites $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$; et enfin à c_m entre les limites $x = x_m$, $x = \infty$.

En terminant cette introduction, je conjure de nouveau les géomètres dont j'ai analysé les travaux de ne pas m'en vouloir si je ne leur ai pas assez rendu justice, si je n'ai pas mis assez en relief ce qui leur appartient ; j'ai cru, je le répète, ne pouvoir m'acquitter dignement de cette dette d'honneur et de reconnaissance que par la Table analytique qui fera partie de mon troisième et dernier volume.

Plus de dix feuilles de ce volume sont déjà imprimées, et j'ai la certitude qu'il paraîtra longtemps avant la fin de cette année.

Paris, 15 avril 1844.

ERRATA.

Page 6, lignes 3 et 11, *au lieu de* $=f(x)$, *lisez* $=f(x)\,dx$.
Page 19, ligne 13, *au lieu de* $a_0x+b_0=x$, $a_0=1$, $b_0=0$, *lisez* $a_0x+b_0=1$, $a_0=0$, $b_0=1$.
Page 32, ligne 9, *au lieu de* $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$, *lisez* $\frac{a_1x+b_1}{ax+b}$.
Page 38, ligne 12, *au lieu de* $\cos^{\mu} x$, *lisez* $\cos^{\nu} x$,
Page 55, ligne 6, *au lieu de* $\pm\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{2}\right)$, *lisez* $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1}{2}\right)$.
Page 64, ligne 21, *au lieu de* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, *lisez* $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{F(x)}dx$.
Page 74, ligne 3, *au lieu de* $\frac{\pi}{2}=$, *lisez* $\frac{\pi}{4}=$.
Page 82, lignes 17 et 20, *au lieu de* $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$, *lisez* $\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{a-1}dx$.
Page 96, ligne 12, *au lieu de* $x_0=0$, *lisez* $x=x_0$.
Id., ligne 18, *au lieu de* $x=x_0$, *lisez* $x_0=0$.
Page 107, ligne 9, *au lieu de* $(1-e)^{\frac{1}{2}}$, *lisez* $(1-e)^{-\frac{1}{2}}$.
Page 113, ligne 16, *au lieu de* $x=x_0$, *lisez* $y=y_0$.
Page 114, ligne 2, *au lieu de* $x=0$, *lisez* $y=0$.
Page 121, ligne 7, *au lieu de* $-\pi a$, *lisez* $-\frac{\pi a}{8}$.
Page 129, ligne 3, *au lieu de* $\frac{r}{d\sigma}$, $-\frac{r}{d\sigma}$, *lisez* $\frac{r}{ds}$, $-\frac{r}{ds}$.
Page 141, ligne 1, *au lieu de* $x_0=0$, *lisez* $x_0=a$.
Page 190, ligne 7, *au lieu de* $\frac{a}{u}$, *lisez* $\frac{a}{u\Delta x\,\Delta y}$.
Page 206, ligne 2, *au lieu de* $r\cos u\cos\theta$, *lisez* $r\sin u\cos\theta$.
Page 221, ligne 8, *au lieu de* $D_\zeta s ds$, *lisez* $D_\zeta s d\zeta$.
Page 225, ligne 12, *au lieu de* $\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}$, *lisez* $\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots$.
Page 236, ligne 2, *au lieu de* $\sin u\cos\theta$, *lisez* $\sin u\cos u$.
Page 243, lignes 11 et 15, *au lieu de* $mnpq$, *lisez* $m^2n^2p^2q^2$.
Page 247, ligne 3, *au lieu de* hkv, *lisez* giv.

Page 250, ligne 25, *au lieu de* $z = r \sin u \sin \theta$, *lisez* $z = r \cos u \sin \theta$.
Page 254, ligne 9, *au lieu de* $F(m)E(n)$, *lisez* $F(m)F(n)$.
Page 260, ligne 11, *au lieu de* $(1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)$,
lisez $(1 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \ldots)^{\mu}$.
Id., ligne 17 *au lieu de* de chacune des constantes,
lisez de la somme des constantes.
Page 268, ligne 4, *au lieu de* $k\pi$, *lisez* $l\pi$.
Page 279, ligne 4, *au lieu de* $k^2 = \frac{n}{m} = \frac{a}{b} \frac{(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)}$,
lisez $k^2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{a^2}{b^2} \frac{(b^2 - c^2)}{(a^2 - c^2)}$.
Id., ligne 13, *au lieu de* $S = \frac{m}{n} \int\int$, *lisez* $S = ab \int\int$.
Page 280, lignes 4 et 8, *au lieu de* mn, *lisez* ab.
Page 292, ligne 3, *au lieu de* $\Gamma(\gamma)$, *lisez* $\Gamma(k)$.
Page 300, ligne 17, *au lieu de* $\frac{P(\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{D_\lambda D_\mu D_\nu}}$,

lisez $$\frac{P(\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{D_\lambda D_\mu D_\nu \ldots}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \sqrt{(k^2 - a^2)(k^2 - b^2)(k^2 - c^2) \ldots}$$

Page 307, ligne 3, *au lieu de* U et V, *lisez* Ux, Vx.
Page 309, ligne 15, *au lieu de* $r = b$, *lisez* $r = b$, si b est positif.
Page 317, ligne 10, *au lieu de* dans cette hypothèse,
lisez dans cette hypothèse, et si $F_1 = 0$.
Page 318, ligne 22, *au lieu de* $\int_{-\infty}^{\infty}$, *lisez* $\int_{0}^{\infty}$.



CALCUL INTÉGRAL.

PREMIÈRE PARTIE.

Intégration des expressions différentielles explicites. — Applications analytiques et géométriques.

PREMIÈRE LEÇON.

Définitions. — Intégrales définies ou indéfinies.

1. Le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel : on peut dire qu'il a pour objet principal de trouver la fonction qui, étant différentiée, reproduise une différentielle donnée, ou d'apprendre à revenir, des différentielles et des dérivées, aux fonctions qui leur ont donné naissance, ou aux fonctions primitives.

2. La différentielle $f(x)dx$ d'une fonction continue $F(x)$ étant égale quand elle est continue et infiniment petite à l'accroissement de la fonction, on en conclut immédiatement que si l'on fait la somme des valeurs infiniment petites que prend cette différentielle quand on passe par degrés insensibles dx d'une première valeur réelle et finie x_0 à une seconde valeur réelle et finie X, la somme de ces valeurs représentera nécessairement la somme des accroissements que prend la fonction $F(x)$ en passant de la valeur $F(x_0)$ à la valeur $F(X)$, et sera par conséquent égale à l'accroissement total $F(X) - F(x_0)$ de cette même fonction. On aura donc, à une constante près

— $F(x_0)$, la valeur de la fonction $F(x)$ correspondante à une valeur réelle quelconque X, en faisant, à partir de x_0, la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle $f(x)dx$. Cette proposition fondamentale, dont la vérité ressortira plus pleinement des considérations suivantes, a fait donner à la fonction primitive $F(x)$ le nom de *somme* ou d'*intégrale*, et le nom de *Calcul intégral* à l'ensemble des méthodes par lesquelles on revient de la différentielle $f(x)dx$ à la fonction primitive $F(x)$ ou à certaines valeurs définies de cette fonction.

3. Théorème 1er. Soit $f(x)$ une fonction continue entre les limites x_0, X; supposons que l'on divise l'intervalle $X - x_0$ en n intervalles $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1} = X - x_{n-1}$, et qu'on multiplie chaque élément par la valeur de la fonction correspondante à l'origine de cet élément, savoir, $x_1 - x_0$ par $f(x_0)$, $x_2 - x_1$ par $f(x_1), \ldots, X - x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$, la somme, ainsi obtenue,

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

aura une valeur finie qui, d'après un théorème connu, sera égale au produit de la somme $X - x_0$ des quantités de même signe $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, par une valeur de $f(x)$ moyenne entre les coefficients $f(x_0)$, $f(x_1), \ldots, f(x_{n-1})$.

Scolie 1er. Ces coefficients étant des valeurs particulières de l'expression $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ qui correspondent à des valeurs de θ comprises entre 0 et l'unité, la moyenne sera aussi une expression de même forme, et l'on aura

$$S = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

Scolie 2me. Si l'on supposait tous les éléments de la différence $X - x_0$ réduits à un seul qui serait cette diffé-

rence elle-même, on aurait simplement

$$S = (X - x_0) f(x_0),$$

de sorte que pour passer de ce dernier cas au précédent, il suffit de remplacer $f(x_0)$ par une expression de la forme

$$f[x_0 + \theta (X - x_0)].$$

4. Théorème 2me. La valeur de S dépend généralement du nombre et de la valeur des éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, et par conséquent du mode de division adopté; mais si les valeurs numériques des éléments deviennent très petites, et leur nombre très considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influence insensible.

Démonstration : Supposons d'abord que le second mode de division soit une subdivision du premier, ou résulte de la subdivision des éléments $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots$ du premier. Dans ce cas, les différents termes de S

$$(x_1 - x_0) f(x_0), \quad (x_2 - x_1) f(x_1), \ldots, \quad (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

seront remplacés respectivement (n° 3) par

$$(x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)] = (x_1 - x_0) [f(x_0) + \varepsilon_0];$$
$$(x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] = (x_2 - x_1) [f(x_1) + \varepsilon_1] \ldots;$$
$$(X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta (X - x_{n-1})] = (X - x_{n-1}) [f(x_{n-1}) + \varepsilon_{n-1}];$$

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ étant des quantités qui s'évanouissent avec les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$; S deviendra donc

$$S' = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$
$$+ (x_1 - x_0) \varepsilon_0 + (x_2 - x_1) \varepsilon_1 + \ldots + (X - x_{n-1}) \varepsilon_{n-1} = S + (X - x_0) \varepsilon',$$

ε' étant une moyenne entre $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, et par conséquent une quantité très petite elle-même lorsque les intervalles $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, sont très petits, et qui s'évanouit avec ces intervalles. Il est donc vrai qu'on

n'altère pas sensiblement la valeur de S quand on passe à un second mode de division dans lequel chacun des éléments déjà très petits du premier se trouve subdivisé en plusieurs autres. Si le second mode de division n'était pas une subdivision du premier, on les comparerait l'un et l'autre à un troisième formé de leur réunion, ou tellement choisi que chacun de leurs éléments se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. C'est ce qui aura lieu si toutes les valeurs de x, x_1, x_2,..., x_{n-1}, interposées dans les deux premiers modes entre les limites x_0, X, sont employées dans le troisième. Dès-lors, la valeur de S restant sensiblement la même quand on passe du premier mode ou du second au troisième, ne changera pas non plus en passant du premier au second.

5. *Scolie* 1[er]. Lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de division n'a donc plus sur la valeur de S qu'une influence insensible, et par conséquent si l'on fait décroître les valeurs numériques de ces éléments en augmentant leur nombre, la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est, par rapport à la fonction $f(x)$, ce qu'on appelle une *intégrale définie* prise entre les limites x_0, X.

6. *Scolie* 2[ième]. Chacun des termes de S ou de l'intégrale définie est une valeur particulière du produit

$$f(x)dx = hf(x),$$

dont on les déduit en posant tour à tour

$$x=x_0, h=x_1-x_0; x=x_1, h=x_2-x_1, \ldots; x=x_{n-1}, h=X-x_{n-1},$$

de sorte que l'intégrale définie est réellement la limite de

la somme des valeurs que prend la différentielle entre les limites x_0, X; ce qui conduit à la désigner par la notation $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$; on a donc

$$f(x)\,dx = \lim.[(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})]$$
$$= (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

7. Si dans l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$, on fait varier les deux limites, ou seulement l'une des deux, par exemple X, l'intégrale variera elle-même, et si l'on remplace la limite X, devenue variable, par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction $F(x)$ de x, déterminée par l'équation

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

qui, par conséquent, s'évanouira pour $x = x_0$, et sera continue en même temps que $f(x)$. Nous savons d'ailleurs, par le Calcul différentiel, que, $F'(x)$ étant la dérivée de $F(x)$, on a, puisque $F(x_0) = 0$,

$$F(x) = (x - x_0)F'[x_0 + \theta(x - x_0)];$$

on aura donc aussi

$$F'[x_0 + \theta(x - x_0)] = f[x_0 + \theta(x - x_0)],$$

d'où l'on tirera, en faisant $x = x_0$,

$$F'(x_0) = f(x_0),$$

et puisque x_0 est quelconque,

$$F'(x) = f(x);$$

de sorte que l'intégrale $\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x)$, considérée

comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$, ce qui entraîne l'équation

$$d\int_{x_0}^{x} f(x)dx = f(x).$$

8. Si l'on désigne par $\mathrm{F}(x)$ la valeur générale de la fonction qui aura pour différentielle $f(x)dx$, ou la valeur propre à vérifier l'équation

$$d\mathrm{F}(x) = f(x)dx,$$

$\mathrm{F}(x)$ sera nécessairement de la forme

$$F(x) + C = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

C désignant une constante arbitraire indépendante de x; car la fonction $F(x)$ a elle-même pour différentielle $f(x)$, et l'on sait que deux fonctions qui ont la même différentielle ne peuvent différer que par une quantité constante. L'équation

$$\mathrm{F}(x) = F(x) + C$$

donne, quand on y fait $x = x_0$,

$$\mathrm{F}(x_0) = F(x_0) + C,$$

d'où, puisque $F(x_0) = 0$,

$$\mathrm{F}(x_0) = \mathrm{C}, \quad \mathrm{F}(x) = F(x) + \mathrm{F}(x_0),$$

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(x_0),$$

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)dx = \mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_0).$$

L'intégrale définie de $f(x)dx$, prise entre les limites x_0, X, est donc bien réellement la différence des valeurs que prend pour $x = x_0$, et $x = \mathrm{X}$ la fonction qui a pour différentielle $f(x)dx$.

9. La fonction $F(x)$ qui, différentiée, reproduirait $f(x)\,dx$, et qui comprend, comme cas particulier, l'intégrale définie $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ que l'on en déduit en faisant $C = 0$, reçoit le nom d'intégrale indéfinie et est représentée dans le calcul intégral par la simple notation $\int f(x)\,dx$, de sorte que la valeur générale de y, propre à vérifier l'équation

$$dy = f(x)\,dx,$$

est donnée par l'équation

$$y = \int f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C,$$

et l'on a identiquement

$$d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Les deux signes d et $\int$ qui indiquent l'un la différentiation, l'autre l'intégration, s'annullent donc ou se neutralisent, et l'on aura toujours

$$\int du = u + C; \quad d\int du = du.$$

10. Intégrer simplement une différentielle donnée $f(x)\,dx$, c'est chercher l'intégrale indéfinie $F(x)$; intégrer à partir de x_0, c'est prendre l'intégrale définie $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = F(x) - F(x_0)$, que l'on obtient facilement en retranchant de l'intégrale indéfinie ce qu'elle devient pour $x = x_0$. Enfin, intégrer entre deux limites données x_0, X, c'est prendre l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ qui est égale à la différence des valeurs de

l'intégrale indéfinie correspondantes à $x = x_0$, et $x = X$.

11. Il suffit de connaître une valeur particulière $\text{F}(x)$ de y, propre à satisfaire à l'équation $dy = f(x)dx$, pour en déduire immédiatement l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + C,$$

et les deux intégrales définies

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \text{F}(x) - \text{F}(x_0), \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \text{F}(X) - \text{F}(x_0),$$

mais seulement dans le cas où, comme nous l'avons supposé, les fonctions $f(x)$ et $\text{F}(x)$ restent continues entre les limites de ces deux intégrales.

Exemple : On vérifie l'équation $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$ en prenant $y = \text{arc tang}\,x$, et dès-lors, puisque les deux fonctions $\dfrac{1}{1+x^2}$, arc tang x, restent continues entre les limites $x = -\infty$, $x = +\infty$, on aura

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x + C, \qquad \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang}\,x,$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0{,}785...$$

12. L'existence de l'intégrale définie

$$F(X) = \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx,$$

si l'on pouvait la calculer sans donner à X une valeur particulière, entraînerait immédiatement l'existence de l'intégrale indéfinie que l'on en déduirait en changeant X en x et ajoutant à $F(x)$ une constante arbitraire C.

Or, quoiqu'on ne puisse pas toujours la calculer exactement, l'intégrale définie existe réellement; elle est la

limite finie de la somme

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

limite dont on peut approcher indéfiniment et autant que l'on voudra en multipliant suffisamment le nombre des intervalles $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, ou en les rendant assez petits. Il est donc vrai aussi que l'intégrale indéfinie existe, ou qu'il y a toujours une valeur de y propre à satisfaire à l'équation $dy = f(x)\,dx$.

13. On peut démontrer géométriquement l'existence de l'intégrale définie et par suite de l'intégrale indéfinie. En effet, si $f(x)dx$ est la différentielle proposée, et que l'on conçoive la courbe dont l'équation serait $y = f(x)$, l'aire comprise entre deux ordonnées y_0, y de cette courbe, correspondantes aux abscisses x_0, x, est une fonction réelle $F(x)$ de x; or on a démontré dans le Calcul différentiel que la dérivée de cette aire, prise par rapport à l'abscisse variable x, est la fonction $f(x)$ qui exprime l'ordonnée de la courbe. Il existe donc toujours une fonction $F(x)$ dont la différentielle est $f(x)\,dx$.

14. Réciproquement, dès qu'on connaît l'intégrale indéfinie, on obtient immédiatement, et par une règle très simple, l'intégrale définie quelconque $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, ainsi que nous l'avons prouvé; et comme d'ailleurs la recherche des intégrales indéfinies est plus sûre et plus facile, il est naturel de faire de cette recherche l'objet premier et principal du Calcul intégral.

DEUXIÈME LEÇON.

Intégrales indéfinies. — Méthodes d'intégration : immédiate, par substitution, par décomposition et par parties.

15. Par cela même que le Calcul intégral est l'inverse du Calcul différentiel, et qu'une opération quelconque donne naissance à une opération inverse, chacun des théorèmes du calcul différentiel aura son correspondant dans le calcul intégral. Ainsi, en partant de la définition de l'intégrale indéfinie, on tirera des équations connues

$$d.au = adu,$$
$$d(u \pm v \pm w \pm \ldots) = du \pm dv \pm dw \pm \ldots = (u' + v' + w' \ldots)dx,$$
$$d(au \pm bv \pm cw \pm \ldots) = adu \pm bdv \pm cdw \pm \ldots,$$
$$d(u + v\sqrt{-1}) = du + dv\sqrt{-1}, \quad d(uv) = udv + vdu,$$

$$1^\circ. \int adu = a\int du;$$

on peut donc intégrer sans avoir égard à la constante qui reste simplement en facteur.

$$2^\circ. \int (u \pm v \pm w \pm \text{etc.})dx = \int udx \pm \int vdx \pm \int wdx \pm \text{etc.}$$

L'intégrale de la somme ou de la différence est donc égale à la somme ou à la différence des intégrales.

$$3^\circ. \int (au \pm bv \pm cw \pm \text{etc.})\,dx = a\int udx \pm b\int vdx \pm c\int wdx \pm \text{etc.};$$

$$4^\circ. \int (u \pm v\sqrt{-1})\,dx = \int udx \pm \sqrt{-1}\int vdx;$$

$$5^\circ. \quad uv + C = \int udv + \int vdu = \int uv'dx + \int vu'dx,$$

ou, plus simplement,

$$uv = \int u dv + \int v du,$$

la constante C pouvant être censée comprise dans les intégrales du second membre.

16. Lorsque dans l'expression à intégrer $f(x)dx$ on reconnaît la différentielle exacte d'une fonction déterminée $\mathrm{F}(x)$, il suffit d'ajouter à cette fonction une constante arbitraire pour obtenir immédiatement l'intégrale indéfinie demandée.

Exemple :

$$\int a dx = ax + C;\ \int (a+1)x^a dx = x^{a+1} + C;\ \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C;$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C; \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + C;\ \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\mathrm{l}x^2 + C = \mathrm{l}x + C;\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tang} x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = \frac{\pi}{2} - \arccos x + C;$$

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;\ \int a^x \mathrm{l}a\, dx = a^x + C;\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\mathrm{l}x} + C;$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C.$$

Dans toutes les formules qui précèdent on peut, en rem-

plaçant x par une fonction quelconque de cette variable, $z=\varphi(x)$, obtenir de nouvelles intégrales plus générales que les premières.

Exemples :

$$\int[\varphi(x)]^m d.\varphi(x)=\int z^m dz=\frac{[\varphi(x)]^{m+1}}{m+1}+C;$$
$$\int e^{\varphi(x)} d.\varphi(x)=\int e^z dz=e^{\varphi(x)}+C.$$

Le second membre de la formule $\int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C$ semble devenir infini pour $m=-1$; mais comme on peut l'écrire sous la forme

$$\int x^m dx=\frac{x^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}+C,$$

il devient réellement indéterminé; on obtient sa véritable valeur en prenant le rapport $x^{m+1}\,\mathrm{l}x-a^{m+1}\,\mathrm{l}a$ des dérivées du numérateur et du dénominateur, et y faisant $m=-1$, ce qui donne

$$\int x^{-1}dx=\int\frac{dx}{x}=\mathrm{l}x-\mathrm{l}a+\mathrm{C}=\mathrm{l}x+C,$$

comme on le sait *à priori*.

17. Concevons qu'à la variable x on substitue une autre variable z liée à la première par une équation $z=\varphi(x)$, on en tirera

$$x=\chi(z),\quad dx=\chi'(z)dz,$$
$$f(x)dx=f[\chi(z)]\chi'(z)dz=\mathrm{F}(z)dz,\ \int f(x)dx=\int\mathrm{F}(z)dz.$$

Or il arrive souvent qu'en choisissant convenablement la fonction $\varphi(x)$, on puisse trouver facilement l'intégrale

f (z) de F $(z)\,dz$; dès-lors l'intégrale cherchée $\int f(x)dx$ sera elle-même complétement déterminée, car on aura

$$\int f(x)dx = \int \mathrm{F}(z)dz = \mathrm{f}(z) + C = \mathrm{f}[\varphi(x)] + C.$$

Exemples : En posant tour à tour

$$x \pm a = z,\ \frac{x}{a} = z,\ x^2 + a^2 = z,\ x^a = z,\ \mathrm{l}x = z,$$
$$e^x = z,\ \sin x = z,\ \cos x = z,$$

et faisant

$$\int f(z)dz = \mathrm{f}(z),$$

on trouvera

$$\int f(x \pm a)dx = \int f(z)dz = \mathrm{f}(x \pm a) + C;$$

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(z)\,dz = \frac{1}{a}\,\mathrm{f}\,(ax) + C;$$

$$\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx = a\int f(z)dz = a\,\mathrm{f}\left(\frac{x}{a}\right) + C;$$

$$\int x f(x^2 + a^2)\,dx = \frac{1}{2}\int f(z)\,dz = \frac{1}{2}\,\mathrm{f}\,(x^2 + a^2) + C;$$

$$\int x^{a-1} f(x^a)\,dx = \frac{1}{a}\int f(z)dz = \frac{1}{a}\,\mathrm{f}\,(x^a) + C;$$

$$\int \frac{dx}{x} f(\mathrm{l}x) = \int f(z)\,dz = \mathrm{f}\,(\mathrm{l}\,x) + C;$$

$$\int e^x f(e^x)\,dx = \int f(z)\,dz = \mathrm{f}(e^x) + C;$$

$$\int \cos x\, f(\sin x)\,dx = \int f(z)\,dz = \mathrm{f}\,(\sin x) + C;$$

$$\int \sin x\, f(\cos x)dx = -\int f(z)\,dz = -\,\mathrm{f}\,(\cos x) + C;$$

ainsi

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} \mathrm{l}(x-a)^2 + C = \mathrm{l}(x-a) + C;$$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C;$$

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,(ax) + C;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{a}\,\text{arc tang}\,\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \tfrac{1}{2}\mathrm{l}(x^2+a^2) + C;$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{x^2+a^2} + C;$$

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}\int e^z dz = \frac{e^{ax}}{a} + C;$$

$$\int e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\int e^z dz = -\frac{1}{a}e^{-ax} + C;$$

$$\int \cos(ax)dx = \frac{1}{a}\int \cos z dz = \frac{1}{a}\sin ax + C;$$

$$\int \sin(ax)dx = \frac{1}{a}\int \sin z dz = -\cos ax + C;$$

$$\int \mathrm{l}\,x\frac{dx}{x} = \int z dz = \frac{1}{2}(\mathrm{l}x)^2 + C;$$

$$\int \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = \int \frac{dz}{z} = \mathrm{l.l}x + C;$$

$$\int \frac{dx}{x(\mathrm{l}x)^m} = \int \frac{dz}{z^m} = -\frac{1}{(m-1)(\mathrm{l}x)^{m-1}} + C;$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{dz}{1+z^2} = \text{arc tang}(e^x) + C;$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{\cos x} + C = \text{séc}\,x + C;$$

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{\sin x} + C.$$

18. Lorsque la fonction sous le signe $\int$ peut être dé-

composée en plusieurs parties, de telle manière que chaque partie soit facilement intégrable, on peut rendre l'intégration plus simple ou plus facile à l'aide des formules

$$\int (du \pm dv \pm dw \pm \text{etc.}) = \int du \pm \int dv \pm \int dw \pm \text{etc.},$$

$$\int (adu \pm bdv \pm cdw \pm \text{etc.}) = a\int du \pm b\int dv \pm c\int dw.$$

Exemples :

$$\frac{+\ 1}{1-x^2}\,dx = \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + \text{arc}\sin x + C;$$

$$\frac{dx}{{}^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{ax}{\sin^2 x} = \text{tang}\,x - \cot x + C;$$

$$+ bx + cx^2 \ldots)dx = a\int dx + b\int xdx + c\int x^2dx + \ldots = ax + \frac{bx^2}{2} + \frac{cx^3}{3} + \ldots + C.$$

19. L'équation $\int udv = \int uv'dx = uv - \int vdu$ ramène la recherche de l'intégrale $\int udv$ à celle de l'intégrale $\int vdu$ qui peut, dans certains cas, être plus facilement déterminée.

Exemples:

$$\int \mathrm{l}(x)dx = x\,\mathrm{l}x - \int x\,\frac{dx}{x} = x\,\mathrm{l}(x) - \int dx = x(\mathrm{l}x - 1) + C,$$

$$\int xe^x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x(x-1) + C,$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C,$$

$$\int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x + C,$$

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m\int x^{m-1}\sin x dx.$$

Cette dernière intégrale se ramènera à une autre où l'exposant de x sera $m - 2$, et ainsi de suite; on finira donc par arriver à $\int \sin x dx$ ou $\int \cos x dx$, suivant que m sera impair ou pair.

TROISIÈME LEÇON.

Intégration des fonctions algébriques.

20. Les fonctions algébriques sont rationnelles lorsqu'elles contiennent seulement des puissances entières de la variable, irrationnelles dans le cas contraire; toute fraction rationnelle peut être considérée comme formée d'une partie entière par rapport à x, et d'une fraction dont le numérateur est d'un degré moindre que le dénominateur.

La partie entière s'intégrera toujours immédiatement; la partie fractionnaire pourra, comme on l'a prouvé dans le Calcul différentiel, être décomposée en plusieurs fractions simples de la forme

$$\frac{\mathrm{A}dx}{x-a},\ \frac{\mathrm{A}dx}{(x-a)^m},\ \frac{\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1}}{x-a\mp b\sqrt{-1}}dx,$$
$$\frac{\mathrm{A}\mp\mathrm{B}\sqrt{-1}}{(x-a\mp b\sqrt{-1})^m},$$

a, b, A, B désignant des constantes réelles; or, l'on intègre

ces diverses fractions à l'aide des équations

$$\frac{lx}{-a} = \frac{A}{2}\,l(x-a)^2 + C,\quad \int\frac{A\,dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C,$$

$$\frac{\mp B\sqrt{-1})dx}{-a\mp b\sqrt{-1}} = \int\frac{(A\mp B\sqrt{-1})(x-a\pm b\sqrt{-1})dx}{(x-a)^2+b^2}$$

$$= (A\mp B\sqrt{-1})\int\frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} + (B\pm A\sqrt{-1})\int\frac{b\,dx}{(x-a)^2+b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2}(A\mp B\sqrt{-1})\,l[(x-a)^2+b^2] + (B\pm A\sqrt{-1})\,\text{arc tang}\,\frac{x-a}{b} + C,$$

$$\frac{A\mp B\sqrt{-1})dx}{x-a\mp b\sqrt{-1})^m} = -\frac{A\mp B\sqrt{-1}}{(m-1)(x-a\mp b\sqrt{-1})^{m-1}} + C.$$

Exemples :

$$\int\frac{dx}{x^2-1} = \int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{4}\,l\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + C,$$

$$\int\frac{dx}{x^3-1} = \int\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{6}\,l\left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Quelques-unes des formules qui précèdent se présentent sous une forme imaginaire, mais elles sont effectivement réelles, parce que les racines imaginaires sont toujours conjuguées deux à deux.

21. Lorsque la fonction algébrique $f(x)$ est irrationnelle, il n'y a plus de règles générales au moyen desquelles on puisse évaluer l'intégrale $\int f(x)dx$. Il faut alors ou substituer à la variable x une seconde variable z, tellement choisie, que l'expression $f(x)dx$, transformée en $F(z)dz$, devienne rationnelle ; ou simplifier l'intégrale proposée à l'aide de l'intégration par partie plusieurs fois répétée.

22. L'opération de la substitution ne réussit que dans un petit nombre de cas particuliers.

Exemple : en supposant que f désigne une fonction rationnelle et posant tour à tour

$$(ax+b)^{\frac{1}{n}} = z,\quad \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}} = z,$$

$$\frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0} = z,$$

équations qui lient x à z par des équations du premier degré et qui conduiront par conséquent à des valeurs rationnelles de x et de dx, on rendra évidemment rationnelles et intégrables les expressions

$$f\left[x,\ (ax+b)^{\frac{1}{n}}\right]dx,\quad f\left[x,\ \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]dx,$$

$$f\left[x,\ \frac{a_1x+b_1+\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}}{a_0x+b_0}\right]dx,$$

et même l'expression

$$f\left[x,\ \sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}\right]dx,$$

car le radical qu'elle renferme sera aussi exprimé rationnellement en x.

Considérons en particulier l'expression

$$f(x,\sqrt{\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}})dx;$$

on pourra d'abord la ramener à la forme

$$f\left[x,\sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}\right]dx.$$

en choisissant a_1 et b_1 de telle sorte que la différence

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}-(a_1x+b_1)^2 = \mathrm{A}'x^2+\mathrm{B}'x+\mathrm{C}'$$

étant de la forme $(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)$, soit décomposable en facteurs réels du premier degré. C'est ce qui aura lieu si

$$\mathrm{B}'^2-4\mathrm{A}'\mathrm{C}' = 4\mathrm{A}b_1^2+4\mathrm{C}a_1^2-4\mathrm{B}a_1b_1+\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC} > 0;$$

or on peut satisfaire très simplement à cette dernière condition en prenant,

1°. Si $B^2 - 4AC > 0$,

$$b_1 = 0, \quad a_1 = 0, \quad (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2) = Ax^2 + Bx + C;$$

2°. Si A est positif,

$$b_1 = 0, \quad a_1 = \sqrt{A};$$

3°. Si C est positif,

$$b_1 = \sqrt{C}, \quad a_1 = 0.$$

De plus, comme on a

$$Ax^2 + Bx + C - (x\sqrt{A})^2 = 1 \times (Bx + C),$$
$$Ax^2 + Bx + C - (\sqrt{C})^2 = x(Ax + B),$$

on pourra prendre, dans le deuxième cas,

$$a_0 x + b_0 = x, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad a_2 x + b_2 = Bx + C;$$

dans le troisième cas,

$$a_0 x + b_0 = x, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0, \quad a_2 x + b_2 = Ax + B.$$

Ces transformations faites, il suffira, pour rendre rationnelle l'expression $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})dx$, de poser

$$z = \frac{a_1 x + b_1 + \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0},$$

ce qui revient à faire,

1°. Si $B^2 - 4AC > 0$,

$$z = \frac{\sqrt{(a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0},$$

$$\sqrt{(a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)} = \sqrt{Ax^2 + Bx^2 + C} = (za_0 x + b_0);$$

2°. Si $A > 0$,

$$z = x\sqrt{A} + \sqrt{Ax^2 + Bx + C}, \quad \sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z - x\sqrt{A};$$

3°. Si $C > 0$,

$$z = \frac{\sqrt{C} + \sqrt{Ax^2 + Bx + C}}{x}, \quad \sqrt{Ax^2 + Bx + C} = zx - \sqrt{C}.$$

Il est aisé de voir, *à posteriori*, qu'à l'aide de ces différentes hypothèses, x, dx et $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$, seront exprimés rationnellement en z, et que par conséquent l'expression $f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx$, dans laquelle f désigne d'ailleurs une fonction rationnelle, deviendra réellement intégrable. *Exemples :*

I. $$\int f(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C})\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}.$$

1. A positif, on pose

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = z - x\sqrt{A};$$

d'où $$Bx + C = z^2 - 2zx\sqrt{A}, \quad Bdx = 2zdz - 2x\sqrt{A}\,dz - 2z\sqrt{A}\,dx,$$

$$dx\left(B + 2z\sqrt{A}\right) = 2dz\left(z - x\sqrt{A}\right) = 2dz\sqrt{Ax^2 + Bx + C},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \frac{dz}{\frac{B}{2} + z\sqrt{A}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \int \frac{dz}{\frac{B}{2} + z\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\left(\frac{B}{2} + z\sqrt{A}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\left(Ax + \frac{B}{2} + \sqrt{A}\sqrt{Ax^2 + Bx + C}\right) + C.$$

2. C positif,

$$\sqrt{Ax^2 + Bx + C} = zx - \sqrt{C}, \quad Ax + B = z^2x - 2z\sqrt{C},$$

$$Adx = z^2dx + 2zxdz - 2dz\sqrt{C}, \quad dx(A - z^2) = 2dz(zx - \sqrt{C}) = 2dz\sqrt{Ax^2 + Bx + C},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}} = \int \frac{2dz}{A - z^2} = -\int \frac{2dz}{z^2 - A}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\int \frac{dz}{z + \sqrt{A}} - \int \frac{dz}{z - \sqrt{A}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{A}}\,\mathrm{l}\left(\frac{z + \sqrt{A}}{z - \sqrt{A}}\right)^2 + C$$

on verra facilement que cette expression revient à celle déjà trouvée plus haut.

II. $$\int\frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}},\quad \text{C positif,}$$

on poserait

$$\sqrt{C+Bx-x^2}=zx-\sqrt{C},$$

et l'on trouverait

$$\frac{dx}{\cdots+Bx-x^2}=-2\int\frac{dz}{1+z^2}=-2\,\text{arc tang}\,z+C$$

$$=-2\,\text{arc tang}\,\frac{\sqrt{C+Bx-x^2}+\sqrt{C}}{x}=\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}+C.$$

urait pu écrire immédiatement

$$\frac{dx}{\cdots+Bx-x^2}=\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C-\left(x-\frac{B}{2}\right)^2}}=\int\frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}}{\sqrt{1-\left(\frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}\right)^2}}$$

$$=\text{arc sin}\,\frac{x-\frac{B}{2}}{\sqrt{\frac{B^2}{4}+C}}+C.$$

Si le trinome x^2-Bx-C égalé à o avait deux racines réelles α et β, on pourrait poser pour intégrer

$$\sqrt{C+Bx-x^2}=(x-\alpha)z;$$

d'où

$$C+Bx-x^2=-(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)^2z^2,$$
$$\beta-x=(x-\alpha)z^2,\quad -dx=z^2dx+2(x-\alpha)zdz,$$
$$\frac{dx}{z(x-\alpha)}=\frac{dx}{\sqrt{C+Bx-x^2}}=-\frac{2dz}{1+z^2},\ \text{etc.}$$

$$\text{III.}\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \mathrm{l}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C.$$

Un seul cas échappe à la méthode, celui où $B^2-4AC<0$, $A<0$, $C<0$; alors le radical étant essentiellement imaginaire, on poserait

$$\sqrt{Ax^2+Bx+C} = \sqrt{-1}\,\sqrt{-Ax^2-Bx-C},$$

et l'on intégrerait comme plus haut.

Si l'on avait à intégrer

$$\int f\left[x, (ax+b)^{\frac{1}{p}}, (ax+b)^{\frac{1}{q}}, (ax+b)^{\frac{1}{r}}, \ldots\right]dx,$$

$$\int f\left[x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{q}}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\frac{1}{r}}\ldots\right]dx,$$

on poserait

$$ax+b=z^n \quad \text{ou} \quad \frac{ax+b}{a_1x+b_1}=z^n,$$

n étant le plus petit des nombres que divisent à la fois p, q, r,... On rendrait rationnelle de la même manière une fonction rationnelle des monomes $x^{\frac{m}{n}}$, $x^{\frac{p}{q}}$, $x^{\frac{r}{s}}$, etc.

Les expressions

$$f\left[x^m, (ax^m+b)^{\frac{1}{n}}\right]x^{m-1}dx,$$

$$f\left[x^m, \left(\frac{a_1x^m+b_1}{a_0x^m+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right]x^{m-1}dx,$$

se ramènent encore aux formes précédentes, en posant $x^m=z$.

QUATRIÈME LEÇON.

Suite de l'intégration des fonctions algébriques. — Différentielle binome.

23. On désigne sous le nom de différentielle binome, les expressions de la forme $x^m(a+bx^n)^p\,dx$, dans laquelle on peut toujours supposer m et n entiers, car si ces nombres étaient fractionnaires, la transformation indiquée dans le numéro précédent ramènerait à une expression semblable où les exposants de la variable seraient entiers. L'exposant p est fractionnaire, car s'il était entier on développerait $(a+bx^n)^p$, et l'on aurait à intégrer un nombre fini de termes de la forme Ax^m.

On peut d'abord essayer de rendre l'expression donnée rationnelle en posant

$$a+bx^n=z,$$

d'où

$$x=\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},\quad dx=\frac{1}{nb}\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}dz,$$

$$x^m(a+bx^n)^p dx=\frac{1}{nb}z^p\left(\frac{z-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}dz;$$

donc, si $\frac{m+1}{n}$ est un nombre entier, l'expression transformée n'aura d'irrationnel que le monome $z^p=z^{\frac{q}{r}}$,

et on la rendra rationnelle en posant $z = t^r$, ce qui revient à faire d'abord $a + bx^n = z^r$.

Comme on a

$$x^m(a + bx^n)^p dx = x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p dx,$$

et que le second membre, d'après ce que nous venons de dire, sera intégrable si $\frac{m+np+1}{-n}$, et par suite $\frac{m+np+1}{n}$ ou $\frac{m+1}{n} + p$ est un nombre entier, il suffira, pour qu'on puisse intégrer l'expression

$$x^m(a + bx^n)dx,$$

que l'une des quantités $\frac{m+1}{n}$ ou $\frac{m+1}{n} + p$ soit un nombre entier.

Cette même expression $x^m(a + bx^n)^p dx$, quand on change x^n en x, dx en $\frac{dx}{nx^{n-1}}$, x^m en $x^{\frac{m}{n}}$, devient

$$\frac{1}{n}\int (ax + b)^p x^{\frac{m}{n} - n + 1} dx,$$

et n'est qu'un cas particulier de l'expression plus générale $\int (ax + b)^\mu (a_1 x + b_1)^\nu dx$, dans laquelle μ et ν sont des nombres quelconques, et que l'on rendra évidemment rationnelle dans chacune des hypothèses suivantes, c'est-à-dire si l'une au moins des trois quantités μ, ν, $\mu + \nu$ est un nombre entier : en effet, dans ces hypothèses, l'expression dont il s'agit se présente sous l'une des formes

$$(ax + b)^{\pm l}(a_1 x + b_1)^{\pm\frac{m}{n}} dx, \quad (ax + b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1 x + b_1)^{\pm l} dx,$$
$$(ax + b)^{\pm\frac{m}{n}}(a_1 x + b_1)^{\pm l \mp \frac{m}{n}},$$

dans lesquelles l, m, n sont des nombres entiers, et que l'on rendra rationnelles et intégrables en posant, pour

la première, $a_1x+b_1=z^n$; pour la seconde, $ax+b=z^n$; pour la troisième, $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}=z^n$.

24. Lorsque les deux expressions

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \quad \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx,$$

ne sont pas intégrables, il reste à essayer de les ramener à des formes plus simples en réduisant autant que possible les exposants m ou p, μ ou ν, à l'aide de l'intégration par partie, ou de l'équation

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

dans laquelle on prendra toujours pour u le facteur dont on voudra diminuer l'exposant, et pour dv le facteur dont on voudra laisser intact ou augmenter l'exposant. Transformons d'abord la seconde expression qui est plus symétrique.

1[er] *cas* : On veut diminuer μ et augmenter ν.

En prenant $(ax+b)^\mu$ pour u, $(a_1x+b_1)^\nu dx$ pour dv, on a

$$(1) \quad \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)a_1} - \frac{\mu a}{(\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}dx.$$

2[me] *cas* : On veut diminuer μ en laissant ν ce qu'il est.

Dans la formule précédente on remplace $(a_1x+b_1)^{\nu+1}$ par

$$(a_1x+b_1)^\nu(a_1x+b_1)=(a_1x+b_1)^\nu\left[\frac{a_1}{a}(ax+b)+\frac{ab_1-a_1b}{a}\right],$$

et, en réunissant les intégrales semblables, on trouve

$$(2) \quad \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1}\int (ax+b)^{\mu-1}(a_1x+b_1)^\nu dx.$$

3me *cas :* On veut augmenter μ sans toucher à ν; en résolvant la formule précédente par rapport à l'intégrale du second membre et changeant μ en $\mu+1$, on trouvera

$$(3)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \frac{(\mu+\nu+2)a_1}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx.$$

En changeant, dans les formules (1), (2), (3), a, b, μ en a_1, b_1, ν, et réciproquement, on obtiendra trois nouvelles formules qu'on pourra employer dans les cas suivants.

4me *cas :* On veut augmenter μ et diminuer ν.

$$(4)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+1)a} - \frac{\nu a_1}{(\mu+1)a}\int (ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu-1}\,dx;$$

on obtiendrait directement cette formule en prenant $(a_1x+b_1)^{\nu}$ pour u.

5me *cas :* On veut diminuer ν sans changer μ.

$$(5)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu}}{(\mu+\nu+1)a} - \frac{\nu(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu-1}\,dx.$$

On déduira cette formule de la quatrième, en remplaçant $(ax+b)^{\mu+1}$ par

$$(ax+b)^{\mu}(ax+b) = (ax+b)^{\mu}\left[\frac{a}{a_1}(a_1x+b_1)+\frac{a_1b-ab_1}{a_1}\right].$$

6me *cas :* On veut augmenter ν sans toucher à μ.

$$(6)\quad \int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu}\,dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1}(a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)a}{(\nu+1)(a_1b-ab_1)}\int (ax+b)^{\mu}(a_1x+b_1)^{\nu+1}\,dx.$$

Cette formule s'obtiendrait en résolvant la cinquième par rapport à la seconde intégrale, et changeant ν en $\nu+1$.

En employant une ou plusieurs fois les formules qui précèdent, on ramènera l'intégrale proposée à une autre, dans laquelle chacun des binomes $ax+b$, a_1x+b_1 aura un exposant compris entre 0 et 1. Si les exposants μ et ν avaient des valeurs entières, on finirait par les réduire à 0 et -1, et l'intégrale donnée se trouverait remplacée par une des suivantes :

$$\int dx = x + C,\quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{2a}\,\mathrm{l}(ax+b)^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{2a_1}\,\mathrm{l}(a_1x+b_1)^2 + C,$$

$$\int \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1-a_1b}\int d\,\mathrm{l}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{1}{2(ab_1-a_1b)}\,\mathrm{l}\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^2 + C.$$

25. Si l'on veut simplifier immédiatement l'intégrale

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

on prendra d'abord x^m pour u, et l'on aura

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \int \frac{x^{m-n+1}}{b}(a+bx^n)^p\,bx^{n-1}dx$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx,$$

et l'on en déduira :

1°. Si l'on veut diminuer m et augmenter p,

$$(1)\quad \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)}$$
$$- \frac{m-n+1}{nb(p+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1}dx;$$

2°. Si l'on veut diminuer m sans toucher à p, en rem-

plaçant $(a+bx^n)^{p+1}$ par $(a+bx^n)^p(a+bx^n)$,

$$(2)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{b(m+np+1)}\\ &-\frac{(m-n+1)a}{b(m+np+1)}\int x^{m-n}(a+bx^n)^p\,dx.\end{aligned}\right.$$

3°. Pour augmenter m sans altérer p, on résout l'équation (2) par rapport à l'intégrale du second membre, et l'on change m en $m+n$, ce qui donne

$$(3)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{a(m+1)}\\ &-\frac{b(np+m+n+1)}{a(m+1)}\int x^{m+n}(a+bx^n)^p dx.\end{aligned}\right.$$

4°. Pour diminuer p et augmenter m, on prend $x^m dx$ pour dv, et l'on a

$$(4)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+1}\\ &-\frac{npb}{m+1}\int x^{m+n}(a+bx^n)^{p-1}dx.\end{aligned}\right.$$

5°. Pour diminuer p sans augmenter m, on remplacera dans (4) x^{m+n} par $x^m\left(\frac{a+bx^n-a}{b}\right)$,

d'où

$$(5)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)dx &= \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^p}{m+np+1}\\ &+\frac{anp}{m+np+1}\int x^m(a+bx^n)^{p-1}dx.\end{aligned}\right.$$

6°. Enfin, pour augmenter p sans altérer m, il suffit de résoudre (5) par rapport à l'intégrale du second

membre et de changer p en $p+1$, on trouve ainsi :

$$(6)\left\{\begin{aligned}\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m+1}(a+bx^n)^{p+1}}{-an(p+1)}\\ +\frac{m+np+n+1}{an(p+1)}\int x^m(a+bx^n)^{p+1}dx.\end{aligned}\right.$$

Les formules qui précèdent offrent quelquefois des termes infinis et ne peuvent plus être appliquées ; mais on s'assure facilement que dans tous les cas où cela arrive, l'une des conditions d'intégrabilité est satisfaite, de sorte que la différentielle proposée peut toujours être ramenée à une fonction rationnelle.

26. *Exemples :*

I. $$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m}+\frac{m-1}{m}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

L'exposant entier m étant ainsi abaissé de deux unités, on arrivera en répétant plusieurs fois le même procédé, à l'une des deux expressions

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}+C,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+C,$$

suivant que m sera pair ou impair. On parvient ainsi aux deux formules suivantes :

Si m impair,

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$-\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}+\frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5}\ldots+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 2}{(m-2)(m-4)\ldots 1}\right]+C;$$

si m pair,

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1}+\frac{m-1}{m-2}x^{m-3}\ldots+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{(m-2)(m-4)\ldots 2}\right]$$
$$+\frac{(m-1)(m-3)\ldots 3}{m(m-2)(m-4)\ldots 2}\arcsin x + C.$$

v à une puissance de a_1x+b_1; la formule (3), en supposant u proportionnel à une puissance de a_1x+b_1, v à une puissance de $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$; la formule (4), en supposant u proportionnel à une puissance de a_1x+b_1, v à une puissance de $ax+b$; la formule (5), en supposant u proportionnel à une puissance de $\frac{a_1x+b_1}{ax+b}$, et v à une puissance de $ax+b$; enfin la formule (6), en supposant u proportionnel à une puissance de $ax+b$, v à une puissance de $\frac{ax+b}{a_1x+b_1}$.

On pourrait traiter de la même manière l'intégrale

$$\int x^m(a+bx^n)\,dx.$$

Exemple : Supposons qu'il s'agisse de réduire l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int (1+x^2)^{-n}dx,$$

n désignant un nombre entier supérieur à l'unité : on supposera u et v proportionnels à des puissances de x^2 et de $\frac{1+x^2}{x^2}$, et comme on a

$$d\,\mathrm{l}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right) = 2\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{2dx}{x(1+x^2)},$$

on tirera de la formule $\int uvd.\mathrm{l}v = uv - \int uvd.\mathrm{l}\,u$:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \int \frac{-x(1+x^2)^{-n+1}}{2}\,d\,\mathrm{l}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)$$

$$= \int \frac{x^{-2n+3}}{2(n-1)}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{-n+1} d\,\mathrm{l}\left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)^{-n+1}$$

$$= \frac{x(1+x^2)^{-n+1}}{2(n-1)} - \int \frac{x(1+x^2)^{-n+1}}{2(n-1)}\,d\,\mathrm{l}(x^{-2n+3})$$

$$= \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}.$$

CINQUIÈME LEÇON.

Intégration des fonctions exponentielles logarithmiques ou circulaires.

---

28. On nomme fonctions exponentielles ou logarithmiques cellès qui contiennent des exposants variables ou des logarithmes, et fonctions trigonométriques ou circulaires celles qui contiennent des lignes trigonométriques ou des arcs de cercle. Il serait fort utile d'intégrer les formules différentielles qui renferment de semblables fonctions, mais on n'a point de méthode générale pour y parvenir. On est réduit à essayer de les rendre algébriques par une substitution de variables, ou à les ramener à des intégrales de même genre, mais plus simples.

Exemple : On rend algébriques les intégrales

$$\int f(\mathrm{l}\, x)\frac{dx}{x},\quad \int f(e^x)\, e^x dx,\quad \int f(e^x) dx,\quad \int f(\sin x)\cos x dx,$$
$$\int f(\cos x)\sin x dx,\quad \int f(\sin x)\cos x dx,$$
$$\int f(\sin x,\ \sin 2x,\ldots,\cos x,\ \cos 2x,\ldots) dx,$$

en égalant tour à tour $\mathrm{l}\, x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$ à z. Ainsi, par exemple, en faisant $\sin x = z$, d'où

$$\cos x = \sqrt{1-z^2},\quad \cos x dx = dz,\quad dx = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

l'intégrale $\int f(\sin x,\ \cos x) dx$ devient

$$\int f(z,\ \sqrt{1-z^2})\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}},$$

et se présente sous une forme algébrique.

29. Si P et z sont deux fonctions de x dont la première reste algébrique, et dont la seconde ait seulement une dérivée algébrique z', et si de plus, en posant

$$\int \mathrm{P}dx = \mathrm{Q}, \quad \int \mathrm{Q}z'dx = \mathrm{R}, \quad \int \mathrm{R}z'dx = \mathrm{S}, \ldots,$$

on obtient pour Q, R, S,... des fonctions connues de la variable x, on déterminera sans peine, à l'aide de plusieurs intégrations par parties, l'intégrale $\int \mathrm{P}z^n dx$, dans laquelle n est un nombre entier. On a en effet

$$\int \mathrm{P}z^n dx = z^n \int \mathrm{P}dx - n\int [z^{n-1}z'dx \times \int \mathrm{P}dx] = \mathrm{Q}z^n - n\int \mathrm{Q}z'z^{n-1}dx,$$
$$\int \mathrm{Q}z'z^{n-1}dx = z^{n-1}\int \mathrm{Q}z'dx - (n-1)\int [z^{n-2}z'dx \times \int \mathrm{Q}z'dx]$$
$$= \mathrm{R}z^{n-1} - (n-1)\int \mathrm{R}z'z^{n-2}dx \ldots,$$

et par suite

$$\int \mathrm{P}z^n dx = \mathrm{Q}z^n - n\mathrm{R}z^{n-1} + n(n-1)\mathrm{S}z^{n-2} - \text{etc.} + C;$$

on satisfera aux conditions énoncées en prenant pour z les fonctions $\mathrm{A}\,\mathrm{l}[f(x)]$, A arc tang $f(x)$, A désignant une constante, et $f(x)$ une fonction algébrique de x.

Exemples : Supposons que, P étant égal à 1, z soit déterminé tour à tour par les équations

$$z = \mathrm{l}x, \quad z = \arcsin x, \quad z = \arccos x, \quad z = \mathrm{l}(x + \sqrt{1+x^2}),$$

on aura

$$\int (\mathrm{l}x)^n dx = x(\mathrm{l}x)^n \left[1 - \frac{n}{\mathrm{l}x} + \frac{n(n-1)}{(\mathrm{l}x)^2} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(\mathrm{l}x)^n}\right] + C,$$

$$\int (\arcsin x)^n dx = (\arcsin x)^n \left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arcsin x} - \frac{n(n-1)x}{(\arcsin x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^3} + \ldots\right] + C,$$

$$\int (\arccos x)^n dx = (\arccos x)^n \left[x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} - \frac{n(n-1)x}{(\arccos x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\arccos x)^3} + \ldots\right] + C,$$

$$\int [\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})]^n dx$$
$$= [\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})]^n \left[x - \frac{n\sqrt{1+x^2}}{\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})} + \frac{n(n-1)x}{[\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})]^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1+x^2}}{[\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2})]^3} + \ldots\right] + C.$$

On intégrerait encore avec beaucoup de facilité les expressions $\int x^{a-1}(\mathrm{l}x)^n dx$, $\int x^{a-1}(\text{arc}\sin x)^n dx, \ldots$, qui diffèrent de celles qui précèdent par la valeur de P qui ici est x^{a-1}, on aura, par exemple,

$$\ldots(\mathrm{l}x)^n dx = \frac{x^a}{a}(\mathrm{l}x)^n\left[1 - \frac{n}{a\mathrm{l}x} + \frac{n(n-1)}{a^2(\mathrm{l}x)^2} - \text{etc.} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n(\mathrm{l}x)^n}\right] + C.$$

Si dans les formules obtenues, on pose tour à tour

$$\mathrm{l}x = z,\quad x = e^z,\ dx = e^z dz;$$
$$\text{arc}\sin x = z,\quad x = \sin z,\quad dx = \cos z dz;$$
$$\text{arc}\cos x = z,\quad x = \cos z,\quad dx = -\sin z dz;$$
$$\mathrm{l}(x+\sqrt{1+x^2}) = z,\quad x+\sqrt{1+x^2} = e^z,$$
$$\frac{(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}-x} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}-x} = e^z;$$
$$\sqrt{1+x^2}-x = e^{-z},\quad x = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\quad dx = \frac{e^z + e^{-z}}{2}dz;$$

on trouvera

$$\ldots z = z^n e^z\left[1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} - \text{etc.} \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{z^n}\right] + C,$$

$$\ldots z dz = z^n\left\{\sin z\left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] + \cos z\left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$\ldots\sin z dz = z^n\left\{\cos z\left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \ldots\right] - \sin z\left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$\ldots\frac{\ldots + e^{-z}}{2}\Big)dz = z^n\left\{\frac{e^z - e^{-z}}{2}\left[1 + \frac{n(n-1)}{z^2}\ldots\right] - \frac{e^z + e^{-z}}{2}\left[\frac{n}{z} + \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \ldots\right]\right\} + C,$$

$$\ldots dz = \frac{z^n e^{az}}{a}\left[1 - \frac{n}{az} + \frac{n(n-1)}{a^2 z^2} - \text{etc.} \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{a^n z^n}\right] + C.$$

On pourrait établir directement ces diverses formules à l'aide de plusieurs intégrations par parties que l'on effectuerait de manière à diminuer sans cesse l'exposant n pour le faire enfin disparaître. Ainsi, par exemple,

l'intégrale $\int z^n e^{az}dz$ se déduit des équations

$$\int z^n e^{az}dz = \frac{z^n e^{az}}{a} - \frac{n}{a}\int z^{n-1} e^{az}dz,$$

$$\int z^{n-1} e^{az}dz = \frac{z^{n-1}e^{az}}{a} - \frac{n-1}{a}\int z^{n-2} e^{az}dz, \text{ etc.}$$

L'intégration par parties peut encore servir à fixer les valeurs des deux intégrales

$$\int e^{az}\cos bz dz, \quad \int e^{az}\sin bz\, dz,$$

on a en effet

$$\int e^{az}\cos bz dz = \frac{e^{az}\cos bz}{a} + \frac{b}{a}\int e^{az}\sin bz\, dz,$$

$$\int e^{az}\sin bz dz = \frac{e^{az}\sin bz}{a} - \frac{b}{a}\int e^{az}\cos bz\, dz,$$

d'où

$$\int e^{az}\cos bz dz = \frac{e^{az}}{a^2+b^2}(a\cos bz + b\sin bz) + C,$$

$$\int e^{az}\sin bz dz = \frac{e^{az}}{a^2+b^2}(a\sin bz - b\cos bz) + C.$$

Scolie. La formule qui donne $\int z^n e^{az}dz$, repose sur ce principe que $\int e^{az}dz = \frac{e^{az}}{a}$. Or cette dernière équation subsiste encore lorsqu'on remplace a par $a + b\sqrt{-1}$, et par suite $\int e^{az}dz$ par

$$\int e^{(a+b\sqrt{-1})z} dz = \int e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)dz.$$

On pourra donc faire cette substitution dans la formule citée, ce qui donnera

$$\int z^n e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)dz$$

$$= \frac{z^n e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)}{a+b\sqrt{-1}}\left[1 - \frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 3.2.1}{(a+b\sqrt{-1})^n z^n}\right]$$

Cette formule se partagera en deux autres qui donneront les valeurs des intégrales

$$\int z^n e^{az} \cos bz\, dz, \quad \int z^n e^{az} \sin bz\, dz.$$

30. On peut encore rendre rationnelle ou réduire au moins l'intégrale $\int \sin^\mu x \cos^\nu x dx$, dans laquelle μ et ν sont deux quantités constantes. Si d'abord on pose

$$\sin^2 x = z,$$

d'où

$$\cos^2 x = 1 - z, \quad dz = 2 \sin x \cos x\, dx,$$

l'intégrale proposée deviendra

$$\pm \frac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} dz,$$

et sera rationnelle et intégrable si les trois quantités

$$\frac{\mu-1}{2}, \quad \frac{\nu-1}{2}, \quad \frac{\mu+\nu-2}{2},$$

se réduisent à trois nombres rationnels dont l'un au moins soit entier, ce qui arrivera nécessairement toutes les fois que μ et ν auront des valeurs numériques entières.

Dans tous les cas, à l'aide de l'équation

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

on pourra :

1°. Diminuer μ, augmenter ν en prenant $\sin^\mu x$ pour facteur u, ce qui donne

$$(1) \int \sin^\mu x \cos^\nu x dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\mu-1}{\nu+1} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{\nu+2} x dx;$$

2°. Diminuer μ sans changer ν en remplaçant dans la formule précédente, $\cos^{\nu+2}x$ par

$$\cos^{\nu}x \times \cos^{2}x = \cos^{\nu} \times (1 - \sin^{2}x),$$

et réduisant; d'où

$$(2)\quad \int \sin^{\mu}x \cos^{\nu}x\,dx = -\frac{\sin^{\mu-1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu}\int \sin^{\mu-2}x \cos^{\nu}x\,dx.$$

3°. Augmenter μ sans changer ν, en résolvant la formule (2) par rapport à l'intégrale du second membre, et changeant μ en $\mu+2$. On trouve ainsi

$$(3)\quad \int \sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx = \frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\mu+1}\int \sin^{\mu+2}x \cos^{\nu}x\,dx.$$

En prenant $\cos^{\mu}x$ pour facteur u, et suivant la même marche, on pourrait :

4°. Diminuer ν, augmenter μ; 5° diminuer ν sans changer μ; 6° augmenter ν sans toucher à μ, à l'aide des formules ,

$$(4)\quad \int \sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx = \frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu-1}x}{\mu+1} + \frac{\nu-1}{\mu+1}\int \sin^{\mu+2}x\cos^{\nu-2}x\,dx,$$

$$(5)\quad \int \sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx = \frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu-1}x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu}\int \sin^{\mu}x\cos^{\nu-2}x\,dx,$$

$$(6)\quad \int \sin^{\mu}x\cos^{\nu}x\,dx = -\frac{\sin^{\mu+1}x\cos^{\nu+1}x}{\nu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\nu+1}\int \sin^{\mu}x\cos^{\nu+2}x\,dx.$$

On pourra dès-lors transformer l'intégrale donnée, en une autre intégrale de même espèce, mais dans laquelle les exposants de $\sin x$ et $\cos x$, seront compris entre -1

et $+1$. Si les exposants μ et ν sont tous deux entiers, on les réduira à l'une des trois quantités $+1, 0, -1$, et l'intégrale $\int \sin^\mu x \cos^\nu x dx$ sera remplacée par l'une des neuf suivantes :

$$\int dx = x + c, \quad \int \sin x dx = - \cos x + C,$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x \cos x dx = \tfrac{1}{2} \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\tfrac{1}{2} \, \mathrm{l} \cos^2 x + C,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{l} \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x} = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \tfrac{1}{2} \, \mathrm{l} \operatorname{tang}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Si l'on applique ces principes à la détermination des intégrales

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} dx,$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x},$$

n étant un nombre entier, on trouvera :

1°. En supposant n pair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\sin x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-4)(n-2)}\cos x\right] + \frac{1.3\ldots(n-3)(n-1)}{2.4\ldots(n-2)n}x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5}\ldots \pm \operatorname{tang}x \mp x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5}\ldots \pm \cot x \mp x + C,$$

$$\int \operatorname{séc}^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x\ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{séc}x\right] + C,$$

$$\int \operatorname{coséc}^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x\ldots + \frac{2.4\ldots(n-4)(n-2)}{1.3\ldots(n-5)(n-3)}\operatorname{coséc}x\right] + C$$

2°. En supposant n impair,

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\cos x}{n}\left[\sin^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\sin^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\sin^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C$$

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n}\left[\cos^{n-1}x + \frac{n-1}{n-2}\cos^{n-3}x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)}\cos^{n-5}x + \ldots + \frac{2.4\ldots(n-3)(n-1)}{1.3\ldots(n-4)(n-2)}\right] + C$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1}x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3}x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5}x}{n-5}\ldots \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\cos^2 x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3}x}{n-3} - \frac{\cot^{n-5}x}{n-5} + \ldots \mp \frac{\cot^2 x}{2} \mp \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\sin^2 x + C,$$

$$\int \operatorname{séc}^n x dx = \frac{\sin x}{n-1}\left[\operatorname{séc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{séc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{séc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + C,$$

$$\int \operatorname{coséc}^n x dx = -\frac{\cos x}{n-1}\left[\operatorname{coséc}^{n-1}x + \frac{n-2}{n-3}\operatorname{coséc}^{n-3}x + \ldots + \frac{3.5\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-3)}\operatorname{coséc}^2 x\right] + \frac{1.3\ldots(n-2)}{2.4\ldots(n-1)}\tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\operatorname{tang}^2 x + C.$$

31. Pour obtenir immédiatement les six formules fondamentales du n° 30, M. Cauchy a recours encore à l'équation

$$\int uv\, d.\mathrm{l}v = uv = \int uv\, d.\mathrm{l}u,$$

et fait tour à tour, 1° u proportionnel à une puissance de $\sin x$, et v proportionnel à une puissance de $\cos x$; 2° u proportionnel à une puissance de $\tang x$, et v à une puissance de $\cos x$; 3° u proportionnel à une puissance de $\cos x$ et v à une puissance de $\tang x$; 4° u proportionnel à une puissance de $\cos x$ et v à une puissance de $\sin x$; 5° u proportionnel à une puissance de $\cot x$ et v à une puissance de $\sin x$; 6° u proportionnel à une puissance de $\sin x$ et v à une puissance de $\cot x$; en ayant égard aux équations

$$d.\mathrm{l}\sin x = \frac{\cos x}{\sin x}dx, \quad d.\mathrm{l}\cos x = -\frac{\sin x}{\cos x}dx,$$
$$d.\mathrm{l}\tang x = -d.\mathrm{l}\cot x = \frac{dx}{\sin x\, \cos x}.$$

D'autres méthodes peuvent servir encore à la réduction ou à la détermination de l'intégrale $\int \sin^{\pm m}x \cos^{\pm n}x dx$, m et n étant deux nombres entiers. Il est d'abord évident qu'on réduira l'intégrale $\int \sin^{-m}x \cos^{-n}x dx$ à d'autres plus simples, en multipliant une ou plusieurs fois la fonction sous le signe $\int$ par $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. De plus on peut rendre rationnelle l'expression $\sin^{\pm m}x \cos^{\pm n}x dx$, 1° dans le cas où n est un nombre impair, en posant $\sin x = z$; 2° dans le cas où m est un nombre impair, en posant $\cos x = z$. Enfin l'on obtiendra très facilement les valeurs des intégrales

$$\int \sin^m x dx, \quad \int \cos^m x dx, \quad \int \sin^m x \cos^n x dx,$$

en remplaçant $\sin^m x$, $\cos^m x$, $\sin^m x \cos^m x$, par leurs valeurs en $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$,..., $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$,...

SIXIÈME LEÇON.

Propriétés diverses des intégrales définies. Méthodes pour la détermination des valeurs de ces mêmes intégrales.

---

32. L'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ est déterminée par l'équation

$$(1) \quad \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim\left[(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})\right]$$

dont on se sert souvent dans la recherche des valeurs approchées des intégrales définies. Pour plus de simplicité on suppose ordinairement que les quantités

$$x_0, \; x_1, \ldots, \; x_{n-1}, \; X$$

forment une progression arithmétique. Dans ce cas, les éléments

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \ldots, \quad X - x_{n-1}$$

sont tous égaux entre eux et à la fraction

$$\frac{X - x_0}{n} = i,$$

et l'on a

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim i \left[f(x_0) + f(x_0+i) + f(x_0+2i) + \ldots + f(X-i)\right].$$

On pourrait aussi supposer que les quantités $x_0, x_1, \ldots, X$ forment une progression géométrique dont la raison diffère très peu de l'unité : en adoptant cette hypothèse et posant

$$\sqrt[n]{\frac{X}{x_0}} = 1 + \alpha,$$

on aura

$$x_1 = x_0(1+\alpha),\quad x_2 = x_1(1+\alpha) \ldots X = x_{n-1}(1+\alpha),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \alpha \left\{ x_0 f(x_0) + x_0(1+\alpha) f[x_0(1+\alpha)] + \ldots + \frac{X}{1+\alpha} f\left(\frac{X}{1+\alpha}\right) \right\}.$$

33. Dans plusieurs cas, on peut déduire de ces formules, non-seulement des valeurs approchées de l'intégrale définie, mais aussi sa valeur exacte ; on trouvera, par exemple,

$$1^\circ.\ \int_{x_0}^{X} xdx = \lim i[x_0 + x_0 + i + x_0 + 2i + \ldots + x_0 + (n-1)i] = \lim i\left[(x_0 + X - i)\frac{n}{2}\right],$$

$$\int_{x_0}^{X} xdx = \lim \frac{X - x_0}{n}(x_0 + X - i) \times \frac{n}{2} = \lim \frac{(X - x_0)(x_0 + X - i)}{2} = \frac{X^2 - x_0^2}{2};$$

$$2^\circ.\qquad \int_{x_0}^{X} a^x dx = \lim i\left[a^{x_0} + a^{x_0+i} + a^{x_0+2i} \ldots + a^{x_0+(n-1)i}\right]$$

$$= \lim i a^{x_0}\left[a^i + a^{2i} \ldots + a^{(n-1)i}\right] = \lim i a^{x_0}\left[\frac{a^{ni} - 1}{a^i - 1}\right]$$

$$= \lim \frac{i}{a^i - 1} a^{x_0}\left[a^{X - x_0} - 1\right],$$

et puisque $\lim \dfrac{i}{a^i - 1} = \dfrac{1}{1a}$,

$$\int_{x_0}^{X} a^x dx = \frac{a^X - a^{x_0}}{1a},$$

d'où

$$\int_{x_0}^{X} e^x dx = e^X - e^{x_0};$$

3°. $\int_{x_0}^{X} x^a dx = \lim \alpha [x_0^{a+1} + x_0^{a+1}(1+\alpha)^{a+1} + \ldots + x_0^{a+1}(1+\alpha)^{(n-1)(a+1)}]$

$= \lim \alpha x_0^{a+1}[1+(1+\alpha)^{a+1} + (1+\alpha)^{2(a+1)} + \ldots + (1+\alpha)^{(n-1)}] =$

$= \lim \alpha x_0^{a+1}\left[\frac{(1+\alpha)^{n(a+1)} - 1}{(1-\alpha)^{a+1} - 1}\right] = \lim \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{a+1} - 1} x_0^{a+1}\left[\left(\frac{X}{x_0}\right)^{a+1} - 1\right]$

et parce que

$$\lim \frac{\alpha}{(1+\alpha)^{a+1} - 1} = \lim \frac{1}{(a+1)(1+\alpha)^a} = \frac{1}{a+1}, \quad \int_{x_0}^{X} x^a\, dx = \frac{X^{a+1} - x_0^{a+1}}{a+1};$$

4°. $$\int_{x_0}^{X} \frac{dx}{x} = \lim n\alpha = 1\frac{X}{x_0},$$

car, de l'équation

$$(1+\alpha)^n = \frac{X}{x_0},$$

on tire

$$n\alpha = 1\left(\frac{X}{x_0}\right)\frac{\alpha}{1(1+\alpha)}, \quad \lim n\alpha = 1\left(\frac{X}{x_0}\right).$$

34. On peut souvent ramener la détermination d'une intégrale définie à celle d'une intégrale de même espèce : ainsi, de l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim[(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})],$$

ou plus simplement encore de l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = F(X) - F(x_0),$$

dans laquelle $F(x)$ représente la fonction qui a pour différentielle $f(x)$ ou l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)dx,$$

on déduira les suivantes :

$$\int_{x_0}^{X} af(x)dx = a\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x+a)dx = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x)dx,$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x-a)dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x)dx,$$

$$\int_{X}^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^{X} f(x)dx,$$

$$\int_{0}^{X-x_0} f(X-x)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

35. Toutes ces équations peuvent encore se déduire d'un théorème fondamental qu'on peut énoncer comme il suit : si l'on substitue à la variable x une autre variable z déterminée par l'équation

$$z = \varphi(x),$$

d'où l'on tire

$$x = \chi(z), \quad dx = \chi'(z)dz, \quad f(x)dx = f[\chi(z)]\chi'(z)dz,$$

et qu'on appelle z_0, Z, les valeurs de z correspondantes à x_0, X, on aura toujours

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{z_0}^{Z} f[\chi(z)]\chi'(z)dz = \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}(z)dz,$$

c'est-à-dire qu'à l'intégrale définie prise par rapport à x, on pourra substituer l'intégrale définie relative à z.

1re *Démonstration*. Appelons $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les valeurs de z correspondantes à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$; en supposant ces valeurs très rapprochées, l'équation

$$dx = \chi'(z)dz$$

donnera sensiblement

$$x_1 - x_0 = \chi'(z_0)(z_1 - z_0), \quad x_2 - x_1 = \chi'(z_1)(z_2 - z_1), \ldots,$$
$$X - x_{n-1} = \chi'(z_{n-1})(Z - z_{n-1}),$$

et par conséquent

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim[(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})]$$
$$= \lim\{(z_1-z_0)f[\chi(z_0)]\chi'(z_0)+(z_2-z_1)f[\chi(z_1)]\chi'(z_1)+\text{etc.}\}$$
$$= \int_{z_0}^{Z} f[\chi(z)]\chi'(z)dz = \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}(z)dz.$$

2me *Démonstration*. Représentons par $F(x)$ et $\mathcal{F}(z)$ les deux intégrales indéfinies $\int f(x)dx$, $\int \mathrm{f}(z)dz$, l'équation

$$f(x)dx = \mathrm{f}(z)dz$$

entraînera nécessairement la suivante

$$F(x) = \mathcal{F}(z) + C,$$

car deux fonctions qui ont des différentielles égales ne peuvent différer que par une constante; or de cette dernière équation, l'on tire

$$F(X) = \mathcal{F}(Z) + C, \quad F(x_0) = \mathcal{F}(z_0) + C,$$

et par suite

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \mathcal{F}(Z) - \mathcal{F}(z_0) = \int_{z_0}^{Z} \mathrm{f}(z)dz.$$

En partant de ce théorème, il suffira, dans les expressions

$$f(x+a), \quad f(x-a), \quad f(X-x),$$

de faire tour à tour

$$x + a = z, \quad x - a = z, \quad X - x = z,$$

pour en déduire les équations du numéro précédent.

36. On démontre non moins facilement qu'on peut étendre aux intégrales définies les théorèmes déjà démontrés pour les intégrales indéfinies. Ainsi, par exem-

ple, l'intégrale définie de la somme sera égale à la somme des intégrales indéfinies, c'est-à-dire que l'on aura

$$x) + \chi(x) + \psi(x) + \text{etc.}]\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)dx + \int_{x_0}^{X} \chi(x)dx + \int_{x_0}^{X} \psi(x)dx + \text{etc.},$$

$$\pm v \pm w \pm \ldots)dx = \int_{x_0}^{X} udx \pm \int_{x_0}^{X} vdx \pm \int_{x_0}^{X} wdx + \text{etc.},$$

$$+ bv + cw + \ldots)dx = a\int_{x_0}^{X} udx + b\int_{x_0}^{X} vdx + c\int_{x_0}^{X} wdx + \text{etc.},$$

$$+ v\sqrt{-1})dx = \int_{x_0}^{X} udx + \sqrt{-1}\int_{x_0}^{X} v\,dx.$$

37. Intégrer l'expression $f(x)dx$ à partir de $x = x_0$, c'est comme on l'a déjà dit trouver une fonction continue de x qui ait la double propriété de donner pour différentielle $f(x)dx$, et de s'évanouir pour $x = x_0$; dès-lors si l'intégrale indéfinie de $f(x)dx$ se présente sous la forme

$$\varphi(x) + \int \chi(x)\,dx,$$

l'intégrale définie qui doit s'évanouir pour $x = x_0$, sera nécessairement

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^{x} \chi(x)\,dx.$$

Ainsi, par exemple, l'équation

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

entraînera nécessairement les suivantes :

$$\int_{x_0}^{x} udv = \int_{x_0}^{x} uv'dx = uv - u_0v_0 - \int_{x_0}^{x} v\,du = uv - u_0v_0 - \int_{x_0}^{x} vu'dx,$$

$$\int_{x_0}^{X} u\,dv = \text{UV} - u_0v_0 - \int_{x_0}^{X} v\,du,$$

U, V, u_0, v_0 étant les valeurs de u, v, correspondantes à $x = X$, $x = x_0$.

38. Si l'on suppose

$$f(x) = \varphi(x)\,\chi(x),$$

$\varphi(x)$ et $\chi(x)$ étant deux fonctions nouvelles qui restent l'une et l'autre continues entre les limites x_0, X, et dont la seconde conserve toujours le même signe entre ces limites, la valeur de l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ sera donnée par l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim[(x_1 - x_0)\,\varphi(x_0)\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\varphi(x_1)\chi(x_1) + \text{etc.}].$$

La suite, entre parenthèses, est égale à la somme des quantités de même signe

$$(x_1 - x_0)\,\chi(x_0), \quad (x_2 - x_1)\,\chi(x_1), \text{ etc.},$$

multipliée par une certaine valeur $\varphi(\xi)$ de la fonction $\varphi(x)$ moyenne entre les coefficients $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, etc. On aura donc

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \varphi(\xi)\lim[(x_1 - x_0)\,\chi(x_0) + (x_2 - x_1)\chi(x_1) + \text{etc.}],$$

ou

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)dx,$$

ξ désignant une valeur de x moyenne entre x_0, X.

Application. Si l'on prend successivement

$$\chi(x) = 1, \quad \chi(x) = \frac{1}{x}, \quad \chi(x) = \frac{1}{x-a},$$

on obtiendra les formules

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = f(\xi)\int_{x_0}^{X} dx = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} x\, f(x)\,\frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\int_{x_0}^{X}\frac{dx}{x} = \xi f(\xi)\,\mathrm{l}\left(\frac{X}{x_0}\right),$$

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{X} (x-a)f(x)\frac{dx}{x-a} = (\xi - a)f(\xi)\,\mathrm{l}\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right).$$

39. Supposons maintenant qu'après avoir divisé la différence $X - x_0$ en un nombre fini d'éléments représentés par $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots\ldots X - x_{n-1}$, on partage chacun de ces éléments en plusieurs autres dont les valeurs numériques soient infiniment petites; le produit $(x_1 - x_0)f(x_0)$ se trouvera remplacé par une somme de produits semblables qui aura pour limite l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$; les produits

$$(x_2 - x_1)f(x_1), \ldots, \quad (X - x_{n-1})f(x_{n-1}),$$

seront de même remplacés par des sommes qui auront pour limites respectives les intégrales définies

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx, \ldots, \quad \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx\,;$$

et puisque la limite de la somme de plusieurs quantités est égale à la somme de leurs limites, on aura généralement

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \ldots + \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx.$$

On peut donc toujours décomposer une intégrale définie en plusieurs autres de même forme, mais prises entre d'autres limites. On arriverait encore au même résultat en remarquant que si $F(x) + C$ est l'intégrale indéfinie

$\int f(x)dx$, on aura

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \mathrm{F}(x_1) - \mathrm{F}(x_0), \quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \mathrm{F}(x_2) - \mathrm{F}(x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots \int_{x_{n-1}}^{\mathrm{X}} f(x)dx = \mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_{n-1}),$$

d'où l'on tire, en ajoutant,

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{\mathrm{X}} f(x)dx$$
$$= \mathrm{F}(\mathrm{X}) - \mathrm{F}(x_0) = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)dx.$$

Lorsque entre les limites x_0, X, on interpose une seule valeur de x représentée par ξ, on a

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{\mathrm{X}} f(x)dx.$$

Il est facile de prouver que ces décompositions subsistent dans le cas même où quelques-unes des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi$, cessent d'être comprises entre x_0, X, et dans celui où les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, $\mathrm{X} - x_{n-1}$, $\xi - x_0$, $\mathrm{X} - \xi$, ne seraient plus des quantités de même signe. Admettons, par exemple, que les différences $\xi - x_0$, $\mathrm{X} - \xi$, soient de signes contraires. Alors, suivant qu'on supposera la valeur x_0 comprise entre ξ et X, ou bien X compris entre x_0 et ξ, on trouvera

$$\int_{\xi}^{\mathrm{X}} f(x)dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)dx + \int_{\mathrm{X}}^{\xi} f(x)dx,$$

d'où l'on tirera

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = -\int_{\xi}^{x_0} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx - \int_{X}^{\xi} f(x)\,dx;$$

mais, comme on l'a vu, n° 34,

$$-\int_{\xi}^{x_0} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx,$$
$$-\int_{X}^{\xi} f(x)dx = \int_{\xi}^{X} f(x)dx;$$

donc, dans tous les cas,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx.$$

40. Ces principes admis, il sera plus facile de calculer exactement, ou du moins à tel degré d'approximation qu'on voudra, une intégrale définie quelconque. Pour avoir dans tous les cas une valeur approchée de l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, il suffit de reprendre l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx,$$

ou

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0 (x_1 - x_0)]$$
$$+ (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1 (x_2 - x_1)] \ldots + \text{etc.},$$

dans laquelle $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont des valeurs quelconques de x, intermédiaires entre x_0, X et $\theta_0, \theta_1, \ldots\ldots$, des nombres compris entre o et 1. Pour plus de simplicité, on peut, comme nous l'avons déjà dit, supposer les inter-

valles $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., égaux entre eux et à i. on a alors

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = i[f(x_0+\theta_0 i)+f(x_0+i+\theta_1 i)\ldots+f(X-i+\theta_{n-1} i)]$$

Lorsque la fonction $f(x)$ est toujours croissante, ou toujours décroissante depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, le premier membre de l'équation qui précède reste évidemment compris entre les deux sommes

$$S = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - i)],$$
$$S' = i[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots\ldots\ldots + f(X)],$$

et par conséquent dans cette hypothèse, en prenant la demi-somme de ces deux valeurs, ou l'expression

$$i[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \ldots + f(X - i) + \tfrac{1}{2}f(X)],$$

pour valeur approchée de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, on commet une erreur plus petite que la demi-différence

$$S' - S = \pm i[\tfrac{1}{2}f(X) - \tfrac{1}{2}f(x_0)].$$

Exemple : Si l'on suppose

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x_0 = 0, \quad X = 1, \quad i = \tfrac{1}{4},$$

on aura

$$i[\tfrac{1}{2}f(x_0) + f(x_0 + i) + \ldots + \tfrac{1}{2}f(X)]$$
$$= \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2} + \tfrac{16}{17} + \tfrac{4}{5} + \tfrac{16}{25} + \tfrac{1}{4}) = 0{,}78.$$

En conséquence, 0,78 est la valeur approchée de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. L'erreur commise dans ce cas ne pourra pas dépasser $\frac{1}{4}(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) = \frac{1}{16}$; elle est effectivement au-dessous d'un centième.

Si la fonction $f(x)$ n'était pas toujours croissante ou toujours décroissante, on pourrait, à l'aide de cette

même formule,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)dx,$$

la décomposer en plusieurs autres pour chacune desquelles cette condition serait toujours remplie, et l'on pourrait alors calculer, non-seulement des valeurs approchées, mais encore des limites de l'erreur commise.

41. Dans tous les cas, lors même que la fonction $f(x)$ serait tantôt croissante et tantôt décroissante, l'erreur que l'on commettra en prenant l'une des sommes S et S′ pour valeur de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, est évidemment inférieure au produit de $ni = X - x_0$ par la plus grande valeur numérique K que puisse obtenir la différence

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x),$$

quand on y suppose x comprise entre les limites x_0, X, et Δx entre les limites o et i. En effet on a, par exemple,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx - S = i\{[f(x_0+\theta_0 i) - f(x_0)] + [f(x_1+\theta_1 i) - f(x_1)] + \ldots\},$$

et par suite

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx - S < i \times nK = K(X - x_0);$$

il en résulte encore que si l'on appelle k la plus grande des valeurs numériques de $f'(x)$ entre les limites x_0, X, l'erreur commise sera renfermée entre les limites $-ki(X - x_0)$, $+ki(X - x_0)$.

On pourra d'ailleurs, comme nous l'avons vu, calculer exactement la valeur de l'intégrale définie quand on connaîtra l'intégrale indéfinie, et, dans quelques cas particuliers, lors même que l'intégrale indéfinie restera inconnue.

42. *Exemples :* En suivant les méthodes exposées et ap-

pliquant les formules des nos 16 et 17, on trouvera,

$$\int_0^1 x^{a-1}dx = \frac{1}{a},\quad \int_0^1 x^{-a-1}dx = \infty,$$

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = 1,\quad \int_0^\infty e^{ax}dx = \infty,\quad \int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^1 (A + Bx + Cx^2\ldots)dx = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3}\ldots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - 1}{x - 1}\,dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{m},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a},$$

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{\pi}{b};$$

on trouvera encore (nos 26 et 27)

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{m-1}{n-m}\int_0^\infty \frac{x^{m-2}}{(1+x)^n} = \frac{(m-1)\ldots3.2.1}{(n-m)\ldots(n-3)(n-2)}\int_0^\infty$$

$$= \frac{1.2.3\ldots(m-1)\times 1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2}\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots(2n-2)}\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-z}dz = 1.2.3\ldots n,\quad \int_0^\infty z^n e^{-az}dz = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}(\cos bz + \sqrt{-1}\sin bz)\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\sin\left[(n+1)\,\text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\sin bz\,dz = \frac{b}{a^2+b^2},$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}}\cos\left[(n+1)\,\text{arc tang}\,\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-az}\cos bz\,dz = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Enfin (nº 30) en supposant n pair, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{1.3.5\ldots(n-1)}{2.4.6\ldots n}\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \frac{1}{3} \pm 1 \mp \frac{\pi}{4},$$

et en supposant n impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{2.4.6\ldots(n-1)}{1.3.5\ldots(n-2)n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tang}^n x dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \ldots \mp \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} 1\left(\frac{1}{2}\right).$$

43. On peut tirer de l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx,$$

une conséquence importante et qui souvent abrége les calculs. Supposons que ξ soit une moyenne arithmétique entre x_0 et X, et qu'à partir de cette moyenne, en-deçà et au-delà, la fonction $f(x)$ reprenne des valeurs égales, deux à deux et de même signe, les deux intégrales

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx, \quad \int_{\xi}^{X} f(x)dx,$$

seront aussi égales, et l'on aura

$$\int_{x_0}^{X} = 2\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx,$$

de sorte qu'il suffira de calculer l'une de ces intégrales et de la doubler pour obtenir l'intégrale donnée

Exemple :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx,$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx;$$

si à partir de $x = \xi$ les valeurs de la fonction $f(x)$ étaient égales deux à deux et de signes contraires, les deux intégrales $\int_{x_0}^{\xi} f(x)dx$, $\int_{\xi}^{X} f(x)dx$ seraient égales aussi, mais de signes contraires, et l'on aurait par conséquent

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = 0.$$

Exemple :

$$\int_0^{\pi} \cos x dx = 0.$$

SEPTIÈME LEÇON.

Des intégrales définies dont les valeurs sont infinies ou indéterminées. — Valeurs principales des intégrales indéterminées. — Intégrales définies singulières.

---

44. Dans tout ce qui précède, on a supposé que la fonction $f(x)$ demeurait finie et continue entre les limites x_0, X; l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ a, dans ce cas, une valeur déterminée, et l'on peut la décomposer en un certain nombre d'intégrales semblables prises entre les limites $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, X, au moyen de l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_{n-1}}^{X} f(x)\,dx.$$

Si les valeurs interposées se réduisent à deux, l'une très peu différente de x_0 et représentée par ξ_0, l'autre très peu différente de X, représentée par ξ, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{X} f(x)dx &= \int_{x_0}^{\xi_0} f(x)dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx \\ &= (\xi_0 - x_0) f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] \\ &\quad + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)\,dx + (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi)].\end{aligned}$$

Si, dans cette dernière formule, on fait converger ξ_0

vers la limite x_0 et ξ vers la limite X, on en tirera, en passant aux limites, et toujours dans l'hypothèse où la fonction $f(x)$ reste finie et continue,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} f(x)dx.$$

Mais quand cette condition cesse d'être remplie, comme aussi quelquefois quand les limites x_0, X cessent d'être des quantités finies, on ne peut plus affirmer que l'intégrale définie a une valeur déterminée, et l'on ne saurait plus quel sens attacher à la notation $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$.

Prenons pour exemple l'intégrale $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$, dans laquelle la fonction sous le signe $\int$, savoir $\frac{1}{x}$, devient infinie pour la valeur particulière $x = 0$ comprise entre les limites $x = -1$, $x = +1$; l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx$$

donnera

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = -\infty + \infty,$$

et l'intégrale donnée se présentera sous une forme indéterminée.

Pour lever dans ce cas toute incertitude, et rendre à la notation $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ une signification claire et précise, on convient d'étendre par analogie l'équation

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \lim \int_{\xi}^{\xi_0} f(x)\,dx$$

au cas où elle ne peut plus être rigoureusement démontrée. Ainsi les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$, $\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{x}$, dans les-

quelles la fonction $f(x)$ cesse d'être finie et continue pour $x = \infty$ ou $x = 0$, seront déterminées par les équations

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} e^x dx = \lim (e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \lim 1 \frac{\xi}{\xi_0} = \lim 1 \frac{\infty}{0} = \infty.$$

Il peut arriver cependant que la valeur de l'intégrale définie soit réellement indéterminée. Pour le prouver, reprenons l'intégrale $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$. Si l'on désigne par ε un nombre infiniment petit, par μ et ν deux constantes positives mais arbitraires, on aura

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim \int_{\nu\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x},$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \lim \left(\int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim \left(1\mu\varepsilon + 1 \frac{1}{\nu\varepsilon} \right) = 1 \frac{\mu}{\nu};$$

or cette valeur est complétement arbitraire ou indéterminée.

45. Si, lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie entre les limites x_0, X, pour un certain nombre de valeurs particulières, $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on désigne par ε un nombre infiniment petit, et par $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \ldots, \mu_m, \nu_m$ des constantes arbitraires, on aura

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots \int_{x_m}^{X} f(x)dx$$
$$= \lim \left[\int_{x_0}^{x_1 - \mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{X} f(x)dx \right];$$

et si les limites x_0, X se trouvent elles-mêmes rempla-

cées par $-\infty$ et $+\infty$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim \left[\int_{-\frac{1}{\mu\epsilon}}^{x_1-\mu_1\epsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1\epsilon}^{x_2-\mu_2\epsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\nu_m\epsilon}^{\frac{1}{\nu\epsilon}} f(x)dx \right],$$

μ et ν désignant deux nouvelles constantes arbitraires.

Les valeurs des intégrales déduites de ces équations pourront d'ailleurs, suivant la nature de la fonction $f(x)$, être ou des quantités finies et déterminées, ou des quantités infinies, ou des quantités indéterminées, qui dépendront des valeurs attribuées aux constantes arbitraires. Si, dans ce dernier cas, on réduit toutes les constantes à l'unité, on aura des valeurs particulières des intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx,$$

que M. Cauchy a désignées sous le nom de *valeurs principales*, et qui sont données par les équations

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim \left[\int_{x_0}^{x_1-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\epsilon}^{X} f(x)dx \right],$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim \left[\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{x_1-\epsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\epsilon}^{x_2-\epsilon} f(x)dx \ldots + \int_{x_m+\epsilon}^{+\frac{1}{\epsilon}} f(x)dx \right].$$

Exemple : Zéro, ou ce que devient $l\frac{\mu}{\nu}$, quand on fait $\mu = 1$, $\nu = 1$, est la valeur principale de l'intégrale définie $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$; $l\frac{\mu}{\nu}$ est sa valeur générale.

46. Une intégrale définie relative à x, et prise entre deux limites infiniment rapprochées d'une certaine valeur particulière a, attribuée à la variable, est sensiblement nulle lorsque, cette valeur étant une quantité finie,

la fonction $f(x)$ reste finie elle-même et continue, dans le voisinage de $x = a$. Alors en effet l'intégrale définie est égale à la différence infiniment petite des limites de l'intégrale multipliée par une valeur finie de la fonction. Mais la valeur de l'intégrale définie pourra différer de o et acquérir même une valeur infinie, si a ou $f(a)$ devenait infini.

Dans ce dernier cas l'intégrale est ce que M. Cauchy appelle une *intégrale définie singulière*. Il sera ordinairement facile d'en calculer la valeur.

Supposons d'abord que a soit une quantité finie, mais prise parmi les racines de l'équation $f(x) = \pm\infty$, et désignons par f la limite vers laquelle converge le produit $(x - a)f(x)$, tandis que x converge vers a.

L'équation (n° 38)

$$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (\xi - a)f(\xi)\,\mathrm{l}\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right),$$

donnera

$$\int_{a-\varepsilon}^{a-\mu\varepsilon} f(x)dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,(\mu), \quad \int_{a+\nu\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

En effet, la quantité ξ, comprise entre $a - \varepsilon$ et $a - \mu\varepsilon$, ou $a + \nu\varepsilon$ et $a + \varepsilon$, sera sensiblement égale à a, tandis que le produit $(\xi - a)f(\xi)$ sera égal à $(a - a)f(a)$ ou à f.

Si a devenait infini, on appellerait f la limite vers laquelle converge le produit $xf(x)$, tandis que la variable x converge vers la limite $\pm\infty$, et l'on aurait sensiblement, en vertu de l'équation (n° 38) $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \xi f(\xi)\,\mathrm{l}\left(\frac{X}{x_0}\right)$,

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\mu, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)dx = \mathrm{f}\,\mathrm{l}\,\frac{1}{\nu}.$$

Il est essentiel d'observer que la limite du produit $(x-a)f(x)$ ou $xf(x)$ dépend quelquefois du signe de son premier facteur, et que par conséquent la quantité désignée par f change quelquefois de valeur quand ε change de signe.

47. La considération des intégrales définies singulières fournit le moyen de calculer la valeur générale d'une intégrale indéterminée lorsqu'on connaît sa valeur principale. En effet, soit $\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$ l'intégrale dont il s'agit, et supposons qu'on fasse

$$E = \int_{x_0}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{X} f(x)\,dx,$$

$$F = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)\,dx + \ldots \int_{x_m+\varepsilon}^{X} f(x)\,dx,$$

$A = \lim E$ sera la valeur générale, et $B = \lim F$ la valeur principale de l'intégrale définie. La différence $A - B = \lim(E - F)$ de ces deux valeurs sera équivalente à la limite vers laquelle converge la somme des intégrales singulières

$$\int_{x_1-\varepsilon}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_2-\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)\,dx, \ldots, \quad \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{x_m+\varepsilon} f(x)\,dx,$$

et par conséquent, si l'on désigne par $f_1, f_2, \ldots, f_m$ les limites vers lesquelles convergent les produits

$$(x-x_1)f(x), \quad (x-x_2)f(x), \ldots, \quad (x-x_m)f(x),$$

tandis que leurs premiers facteurs convergent vers o, on aura

$$A - B = f_1\, l\frac{\mu_1}{\nu_1} + f_2\, l\frac{\mu_2}{\nu_2} \ldots + f_m\, l\frac{\mu_m}{\nu_m}.$$

Si x_0 et X devenaient $-\infty$ et $+\infty$, il faudrait poser

$$E = \int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{x_1-\mu_1\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1\varepsilon}^{x_2-\mu_2\varepsilon} f(x)dx + \ldots \int_{x_m+\nu_m\varepsilon}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)dx,$$

$$F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x)dx + \ldots \int_{x_m+\varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)dx.$$

Aux intégrales singulières déjà calculées, il faudrait, pour avoir A — B, ajouter les deux suivantes

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\,dx, \qquad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}} f(x)\,dx,$$

dont la somme est sensiblement équivalente à l'expression $\mathrm{f}\,l\frac{\mu}{\nu}$, dans laquelle f désigne la limite vers laquelle converge le produit $xf(x)$, tandis que la variable x converge vers l'une des deux limites $-\infty$, $+\infty$.

Lorsque pour des valeurs infiniment petites de ε, et pour des valeurs finies ou infiniment petites des constantes arbitraires μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m, les intégrales singulières dont dépend la différence A — B obtiennent des valeurs infinies ou des valeurs finies différentes de o, les intégrales $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, sont évidemment infinies ou indéterminées : c'est ce qui arrive toutes les fois que les quantités f, f_1, ..., f_m, ne sont pas simultanément nulles. Si au contraire ces intégrales singulières s'évanouissent toutes pour des valeurs infiniment petites de ε, quelles que soient les valeurs finies ou infiniment petites des constantes μ, ν, μ_1, ν_1, ..., μ_m, ν_m, la valeur générale de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ est une quantité

finie et déterminée; puisque alors la différence $A - B$ étant nulle, A est sensiblement égal à la quantité déterminée B.

Ainsi, pour que la valeur générale de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ soit finie et déterminée, il est nécessaire et il suffit que les intégrales singulières comprises dans la différence $A - B$, se réduisent à o pour des valeurs infiniment petites de ε, quelles que soient d'ailleurs les valeurs finies ou infiniment petites attribuées aux coefficients $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \ldots, \mu_m, \nu_m$; c'est ce qui arrivera communément lorsque les quantités $\mathrm{f}, \mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \ldots, \mathrm{f}_m$ seront toutes nulles.

Ces quantités pourraient cependant être nulles sans que les intégrales singulières le fussent aussi. Par exemple, si l'on prend $f(x) = \frac{1}{x\,\mathrm{l}x}$, le produit $xf(x)$ s'évanouira pour $x = 0$, et cependant l'intégrale définie singulière

$$\int_{\varepsilon}^{\nu\varepsilon} \frac{dx}{x\,\mathrm{l}x} = \mathrm{l}\left(1 + \frac{\mathrm{l}\nu}{\mathrm{l}\varepsilon}\right)$$

cessera de s'évanouir pour des valeurs infiniment petites de ν.

Exemple: Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une fraction rationnelle. Pour que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ conserve une valeur finie et déterminée, il sera nécessaire et il suffira, 1° que l'équation $F(x) = 0$ n'ait pas de racines réelles; 2° que le degré du dénominateur $F(x)$ surpasse au moins de deux unités le degré du numérateur $f(x)$. En effet, si la première condition est remplie, les facteurs $\mathrm{f}, \mathrm{f}_1, \ldots, \mathrm{f}_m$ seront nuls, parce que l'existence de ces produits suppose l'existence de valeurs réelles de x qui rendent infinie la

fonction $\frac{f(x)}{F(x)}$ ou qui fassent évanouir $F(x)$. En vertu de la seconde condition, f ou $\lim x\frac{f(x)}{F(x)}$ s'évanouira aussi puisque $xf(x)$ sera d'un degré inférieur, au moins d'une unité, à $F(x)$.

48. On trouvera facilement, à l'aide de ce qui précède, les intégrales suivantes:

$$\int_{-\frac{1}{\mu\epsilon}}^{\frac{1}{\nu\epsilon}} \frac{xdx}{x^2+a^2} = l\frac{\mu}{\nu}, \qquad \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{xdx}{x^2+a^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\mu\epsilon}}^{\frac{1}{\nu\epsilon}} \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = l\frac{\mu}{\nu}, \qquad \int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{(x-a)dx}{(x-a)^2+b^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\mu\epsilon}}^{\frac{1}{\nu\epsilon}} \left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-6\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+6\sqrt{-1}}\right)dx = 2Al\frac{\mu}{\nu} + 2\pi B;$$

$$\int_{-\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} \left(\frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-6\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+6\sqrt{-1}}\right)dx = 2\pi B.$$

Plus généralement : $\frac{f(x)}{F(x)}$ étant toujours une fonction rationnelle dont le dénominateur ne puisse s'évanouir pour aucune valeur réelle de x, désignons par

$$x_1 = \alpha_1 + 6_1\sqrt{-1}, x_2 = \alpha_2 + 6_2\sqrt{-1} \text{ etc.}, \ldots, x_m = \alpha_m + 6_m\sqrt{-1} \ldots,$$

les racines imaginaires de l'équation $F(x) = 0$, dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et par

$$A_1 - B_1\sqrt{-1}, \quad A_2 - B_2\sqrt{-1}, \text{etc.}$$

les valeurs de la fraction $\frac{f(x)}{F'(x)}$ correspondantes à ces ra-

cines, l'équation connue

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1-B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1-\mathcal{C}_1\sqrt{-1}}+\frac{A_1+B_1\sqrt{-1}}{x-\alpha_1+\mathcal{C}_1\sqrt{-1}}+\ldots$$

$$+\frac{A_m-B_m\sqrt{-1}}{x-\alpha_m-\mathcal{C}_m\sqrt{-1}}+\frac{A_m+B_m\sqrt{-1}}{x-\alpha_m+\mathcal{C}_m\sqrt{-1}}$$

entraînera la suivante

$$\int_{-\frac{1}{\mu\varepsilon}}^{\frac{1}{\nu\varepsilon}}\frac{f(x)}{F(x)}dx=2(A_1+A_2+\ldots+A_m)\,\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}+2\pi(B_1+B_2+\ldots\ldots+\mathrm{l}$$

Le second membre de cette formule cessera de renfermer le facteur arbitraire $\mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}$, et l'on aura en conséquence

$$\int_{-\infty}^{-\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=2\pi(B_1+B_2+\ldots+B_m),$$

toutes les fois que la somme $A_1+A_2+\ldots+A_m$ s'évanouira. Or cette condition sera remplie si le degré de $F(x)$ surpasse au moins de deux unités le degré de $f(x)$. En effet, on a

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{2A_1(x-\alpha_1)+2B_1\mathcal{C}_1}{(x-\alpha_1)^2+\mathcal{C}_1^2}+\frac{2A_2(x-\alpha_2)+2B_2\mathcal{C}_2}{(x-\alpha_2)^2+\mathcal{C}_2^2}\ldots+\frac{2A_m(x-\alpha_m)+2B_m\mathcal{C}_m}{(x-\alpha_m)^2+\mathcal{C}_m^2},$$

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{[2A_1(x-\alpha_1)+2B_1\mathcal{C}_1][(x-\alpha_2)^2+\mathcal{C}^2][(x-\alpha_3)^2+\mathcal{C}_3^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2+\mathcal{C}_m^2]}{[(x-\alpha_1)^2+\mathcal{C}_1^2][(x-\alpha_2)^2+\mathcal{C}_2^2]\ldots[(x-\alpha_m)^2+\mathcal{C}_m^2]}+\mathrm{etc.}$$

et $2m$ étant le degré du dénominateur, le numérateur serait du degré $2m-1$ si le coefficient de x^{2m-1}, savoir, $2(A_1+A_2+\ldots+A_m)$, n'était pas nul. Il faut donc absolument que cette somme soit nulle si le degré du dénominateur surpasse au moins de deux unités le degré du numérateur, etc.

49. Considérons en particulier l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1}$, dans laquelle n et $m < n$ sont deux nombres entiers : ici $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}$: toutes les racines de l'équation

$$F(x) = x^{2n} + 1 = 0,$$

dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, sont comprises dans la formule

$$\alpha + 6\sqrt{-1} = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\sin\frac{2k+1}{2n}\pi,$$

dont on les déduira, en donnant à $2k+1$ toutes les valeurs impaires comprises entre 0 et $2n$. La valeur générale de

$$A - B\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha+6\sqrt{-1})}{F'(\alpha+6\sqrt{-1})} = \frac{(\alpha+6\sqrt{-1})^{2m}}{2n(\alpha+6\sqrt{-1})^{2n-1}}$$

$$= \frac{1}{2n}\,\frac{\cos(2k+1)\frac{m}{n}\pi + \sqrt{-1}\sin(2k+1)\frac{m}{n}\pi}{\cos(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi + \sqrt{-1}\sin(2k+1)\frac{2n-1}{2n}\pi};$$

en posant

$$\frac{2m+1}{2n} = a; \quad \text{d'où} \quad \frac{2m-2n+1}{2n} = a - 1,$$

et se rappelant que pour diviser l'une par l'autre deux expressions imaginaires de la forme $\cos p + \sqrt{-1}\sin p$, $\cos q + \sqrt{-1}\sin q$, il suffit de retrancher les arcs, on trouvera

$$A - B\sqrt{-1} = \frac{1}{2n}\left[\cos(a-1)(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(a-1)(2k+1)\pi\right],$$

$$= -\frac{1}{2n}\left[\cos a(2k+1)\pi + \sqrt{-1}\sin a(2k+1)\pi\right],$$

d'où

$$A = -\frac{1}{2n}\cos a(2k+1)\pi, \quad B = \frac{1}{2n}\sin a(2k+1)\pi,$$

$$B_1 = \frac{\sin a\pi}{2n}, \quad B_2 = \frac{\sin 3a\pi}{2n}, \ldots, \quad B_m = \frac{\sin(2n-1)a\pi}{2n};$$

et puisque dans l'hypothèse admise, le degré du dénominateur surpasse de plus de deux unités le degré du numérateur, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = 2\pi(B_1 + B_2 + \ldots + B_m)$$
$$= \frac{2\pi}{2n}[\sin a\pi + \sin 3a\pi + \ldots + \sin(2n-1)a\pi].$$

On peut calculer facilement la somme qui forme le second membre. En effet, les équations

$$\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta = e^{\theta\sqrt{-1}},$$
$$\cos 3\theta + \sqrt{-1}\sin 3\theta = e^{3\theta\sqrt{-1}} \text{ etc.},$$

donneront

$$[\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta \ldots + \cos(2n-1)\theta] + \sqrt{-1}[\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta \ldots \text{ etc.}]$$
$$= e^{\theta\sqrt{-1}} + e^{3\theta\sqrt{-1}} + e^{5\theta\sqrt{-1}} \ldots + e^{(2n-1)\theta\sqrt{-1}}$$
$$= e^{\theta\sqrt{-1}}\left[1 + e^{2\theta\sqrt{-1}} + e^{4\theta\sqrt{-1}} \ldots + e^{(2n-2)\theta\sqrt{-1}}\right] = \frac{e^{2n\theta\sqrt{-1}}-1}{e^{2\theta\sqrt{-1}}-1}e^{\theta\sqrt{-1}};$$

dans le cas que nous examinons,

$$\theta = a\pi = \frac{2m+1}{2n}\pi,$$

et par conséquent

$$e^{2n\theta\sqrt{-1}} = e^{(2m+1)\pi\sqrt{-1}} = \cos(2m+1)\pi + \sqrt{-1}\sin(2m+1)\pi = -1;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{e^{\theta\sqrt{-1}}}{e^{2\theta\sqrt{-1}}-1}=\frac{e^{\theta\sqrt{-1}}}{\frac{e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}}{e^{-\theta\sqrt{-1}}}}=\frac{1}{e^{\theta\sqrt{-1}}-e^{-\theta\sqrt{-1}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}\sin\theta}=\frac{1}{2\sqrt{-1}\sin a\pi},$$

donc

$$\pi+\cos 3a\pi\ldots+\cos(2n-1)a\pi+\sqrt{-1}[\sin a\pi+\sin 3a\pi\ldots+\sin(2n-1)a\pi]$$

$$=-\frac{2}{2\sqrt{-1}}\times\frac{1}{\sin a\pi}=-\frac{1}{\sqrt{-1}\sin a\pi},$$

$$\cos a\pi+\cos 3a\pi+\ldots\cos(2n-1)a\pi=0,$$

$$\sin a\pi+\sin 3a\pi+\ldots\sin(2n-1)a\pi=\frac{1}{\sin a\pi},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{n\sin a\pi}=\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{n}\pi};$$

on en conclut, en posant $z=x^{2n}$,

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1+z}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}=\frac{\pi}{\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

En réduisant de même chaque intégrale indéterminée à sa valeur principale, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{n}[\sin 2a\pi+\sin 4a\pi\ldots+\sin(2n-2)a\pi]$$

$$=\frac{\pi}{n\,\text{tang}\,a\pi}=\frac{\pi}{n\,\text{tang}\frac{2m+1}{2n}\pi},$$

$$\int_0^{\infty}\frac{z^{a-1}dz}{1-z}=2n\int_0^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}}=\frac{\pi}{\text{tang}\,a\pi}.$$

HUITIÈME LEÇON.

Détermination d'une intégrale définie, 1° à l'aide de l'intégration par séries; 2° à l'aide de la différentiation ou de l'intégration sous le signe $\int$. — Propriétés fondamentales de la fonction Γ.

---

50. Lorsqu'on ne peut obtenir une intégrale définie par les moyens indiqués, on a recours à deux autres procédés, dont l'un est l'intégration par séries, l'autre la différentiation ou l'intégration sous le signe $\int$, par rapport à une constante arbitraire ou à une seconde variable distincte de la variable indépendante.

L'intégration par série repose sur ce théorème fondamental : supposons que les deux limites x_0, X étant des quantités finies, la série

$$u_0, \quad u_1, \quad u_2, \ldots, \quad u_n,$$

dont les différents termes sont, entre les limites x_0, X, des fonctions continues de la variable x, soit convergente pour toutes les valeurs de x comprises entre les mêmes limites, la série

$$\int_{x_0}^{X} u_0 dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_1 dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_2 dx, \ldots, \quad \int_{x_0}^{X} u_n dx,$$

sera elle-même convergente, et si S est la somme de la première série, la seconde aura pour somme $\int_{x_0}^{X} S dx$.

En d'autres termes, l'équation

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \text{ etc.}$$

entraînera la suivante

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \int_{x_0}^{X} u_2 dx + \text{etc.}$$

Démonstration. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 \ldots + u_{n-1}$ la somme des n premiers termes de la première série, et r_n le reste, à partir du $n^{ième}$ terme, on aura

$$S = S_n + r_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots u_{n-1} + r_n,$$

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots \int_{x_0}^{X} u_{n-1} dx + \int_{x_0}^{X} r_n dx.$$

Or, l'intégrale $\int_{x_0}^{X} r_n dx$ est une valeur particulière du produit $r_n(X - x_0)$, correspondante à une valeur de x comprise entre les limites x_0, X; donc, puisque le reste r_n décroît indéfiniment à mesure que n augmente, il en sera de même de l'intégrale $\int_{x_0}^{X} r_n dx$, et l'on aura

$$\int_{x_0}^{X} S dx = \int_{x_0}^{X} u_0 dx + \int_{x_0}^{X} u_1 dx + \ldots \text{ etc.}$$

Si dans cette formule on remplace X par x, on obtiendra les suivantes

$$\int_{x_0}^{x} S dx = \int_{x_0}^{x} u_0 dx + \int_{x_0}^{x} u_1 dx + \ldots,$$

$$\int S dx = \int u_0 dx + \int u_1 dx + \int u_2 dx + \ldots + C.$$

51. On démontrerait facilement que les équations ci-dessus établies subsistent encore lors même que la première série, d'abord convergente entre les limites x_0, X, deviendrait divergente pour l'une de ces limites ou pour

entre ces limites, pourvu toutefois que les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} u_0 dx, \quad \int_{x_0}^{X} u_1 dx, \text{ etc.},$$

forment une série convergente.

Le mode de démonstration consiste à désigner par ξ_0, ξ deux quantités comprises entre x_0, X, pour lesquelles on a, par conséquent,

$$\int_{\xi_0}^{\xi} S dx = \int_{\xi_0}^{\xi} u_0 dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_1 dx + \ldots,$$

et que l'on fera ensuite converger, la première vers la limite x_0, la seconde vers la limite X. Cette remarque s'étend même au cas où les quantités x_0, X deviendraient séparément ou simultanément infinies. Si l'on prend, par exemple, $u_n = a_n x^n$, a_n étant un coefficient réel ou imaginaire; si de plus on désigne par ρ_n la valeur numérique ou le module de a_n, et par λ la plus grande valeur que reçoive l'expression $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$ quand le nombre n devient infini; la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.}$ sera convergente entre les limites $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$, et par conséquent, en laissant la variable x comprise entre ces limites, et posant

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.},$$

on trouvera

$$\int_0^x S dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \text{etc.}$$

Cette dernière équation subsistera encore pour les valeurs $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$, si ces valeurs particulières ne

essent pas de rendre convergente la série

$$a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_3 x^3 \ldots$$

52. A l'aide de ces principes, on pourra développer un grand nombre d'intégrales en séries convergentes qui fourniront des valeurs de ces intégrales aussi approchées que l'on voudra. C'est en cela que consiste l'intégration par séries. On peut même employer avec avantage cette méthode d'intégration pour développer en séries toutes sortes de quantités, et souvent ce qu'il y a de mieux à faire pour y parvenir, c'est d'exprimer les quantités données par des intégrales définies auxquelles on applique ensuite la méthode dont il s'agit.

Exemples : Pour développer en séries les fonctions $l(1+x)$, arc tang$x$, arc sin$x$, on aura recours aux formules

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad \text{arc tang} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{arc sin} x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{x_0}^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx,$$

et comme on trouvera entre les limites $x = -1$, $x = +1$,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \text{etc.}, \quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \ldots \text{etc.},$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{4} x^4 + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6} x^6 + \text{etc.},$$

l'intégration par séries donnera, entre les mêmes limites,

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.}, \quad \text{arc tang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.},$$

$$\text{arc sin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\frac{x^7}{7} + \text{etc.}$$

Si dans ces équations on pose $x = 1$, les séries comprises

dans les seconds membres resteront convergentes, et l'on aura

$$l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \text{etc.}, \quad \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{etc.},$$

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{1}{5} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}\frac{1}{7} + \text{etc.}$$

53. L'intégration par différentiation s'appuie sur un théorème important dont voici l'énoncé.

Pour différentier, par rapport à y, les intégrales

$$\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx, \quad \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx,$$

il suffit de différentier sous le signe $\int$ la fonction $f(x,y)$.

Démonstration. En donnant à y un accroissement Δy, et désignant par la notation Δ_y l'accroissement correspondant d'une fonction quelconque de y, par D_y sa dérivée, on trouve

$$\Delta_y \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{X} f(x, y+\Delta y)\,dx - \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx$$
$$= \int_{x_0}^{X} [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]\,dx = \int_{x_0}^{X} \Delta_y f(x,y)\,dx;$$

d'où, en divisant par Δy et passant à la limite

$$D_y \int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{X} D_y f(x,y)\,dx,$$

et par suite

$$D_y \int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx = \int_{x_0}^{x} D_y f(x,y)\,dx,$$

ou simplement

$$D_y \int f(x,y)\,dx = \int D_y f(x,y)\,dx.$$

Il résulte encore de ce théorème que l'équation

$$\int f(x, y)\,dx = \mathrm{F}(x, y) + C$$

entraîne toujours les suivantes

$$\int \mathrm{D}_y f(x, y)\,dx = \mathrm{D}_y\,\mathrm{F}(x, y), \qquad \int \mathrm{D}_y^n f(x, y)\,dx = \mathrm{D}_y^n\,\mathrm{F}(x, y)dx.$$

Il arrive aussi quelquefois que l'on a besoin de différentier une intégrale définie $\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x, y)\,dx$ par rapport aux limites x_0, X. Or les équations identiques

$$\mathrm{D}_x \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx = f(x, y),$$
$$\mathrm{D}_x \int_{x}^{\mathrm{X}} f(x, y)\,dx = -\mathrm{D}_x \int_{\mathrm{X}}^{x} f(x, y)\,dx = -f(x, y),$$

donnent, quand on fait dans la première $x = \mathrm{X}$, et dans la seconde $x = x_0$,

$$\mathrm{D}_{\mathrm{X}} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x, y)\,dx = f(\mathrm{X}, y), \quad \mathrm{D}_{x_0} \int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x, y)\,dx = -f(x_0, y).$$

54. Cela posé, si une intégrale définie ou indéfinie, que l'on sait calculer, renferme, en outre de la variable indépendante, une ou plusieurs autres variables ou constantes arbitraires, chaque différentiation nouvelle effectuée par rapport à l'une ou à l'autre de ces variables ou constantes, donnera la valeur d'une nouvelle intégrale que l'on n'obtiendrait peut-être que fort difficilement par d'autres procédés.

Exemples : En différentiant n fois de suite, par rapport à la quantité a, chacune des intégrales

$$\int \frac{dx}{x^2 + a}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a}, \quad \int e^{\pm ax}\,dx, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\,dx,$$

on trouvera

$$\int \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+a)^{n+1}}dx = \frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\text{ arc tang }\frac{x}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} + C,$$

$$\int_0^\infty \frac{1.2.3\ldots n}{(x^2+a)^{n+1}} = \pm\frac{\pi}{2}\frac{d^n\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)}{da^n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n a^n\sqrt{a}}\pi,$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2};$$

$$\int x^n e^{\pm ax}dx = \pm\frac{d^n(a^{-1}e^{\pm ax})}{da^n} + C,$$

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}dx = \pm\frac{d^n(a^{-1})}{da^n} = \frac{1.2.3\ldots n}{a^{n+1}}.$$

55. Souvent aussi l'intégration sous le signe $\int$ fait connaître les valeurs de certaines intégrales définies, quoique l'on n'ait aucun moyen d'évaluer les intégrales indéfinies correspondantes. Prouvons d'abord que pour intégrer, par rapport à y et à partir de $y = y_0$, les expressions $\int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx$, $\int_{x_0}^{X} f(x, y)\,dx$ multipliées par dy, il suffit d'intégrer sous le signe $\int$, et à partir de $y = y_0$, la fonction $f(x, y)$, multipliée par cette même différentielle, pourvu toutefois que la fonction $f(x, y)$ soit continue par rapport aux deux variables x, y entre les limites des intégrations.

Démonstration. De l'équation

$$D_y \int_{x_0}^{x} F(x, y)dx = \int_{x_0}^{x} D_y F(x, y)dx$$

on tire, en posant $F(x, y) = \int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dy$,

$$D_y \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\,dx,$$

puis en multipliant les deux membres de cette dernière par dy et intégrant par rapport à y, à partir de $y = y_0$, on trouve

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{y}\int_{x_0}^{x} f(x,y)\,dx\,dy,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Applications. Comme on a généralement pour des valeurs positives de μ, $\int_0^1 x^{\mu-1}dx = \frac{1}{\mu}$, on en conclut, en multipliant les deux membres par $d\mu$, et en intégrant par rapport à μ à partir de $\mu = \nu$,

$$\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{\mathrm{l}x}\,\frac{dx}{x} = \mathrm{l}\frac{\mu}{\nu}.$$

Si l'on désigne par a, b, c des quantités positives, une intégration sous le signe $\int$ relative à la quantité a, effectuée à partir de $a = c$, et appliquée aux intégrales définies

$$\int_0^\infty e^{-ax}dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2},$$
$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

produira les formules

$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\,dx = \mathrm{l}\frac{a}{c},$$
$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\cos bx\,dx = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2},$$
$$\int_0^\infty \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x}\sin bx\,dx = \operatorname{arctang}\frac{a}{b} - \operatorname{arctang}\frac{c}{b},$$

d'où l'on tire, en posant $c = 0$, $a = \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty, \quad \int_0^\infty \cos bx\,\frac{dx}{x} = \infty, \quad \int_0^\infty \sin bx\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

56. Lorsque dans une intégrale relative à la variable x la fonction sous le signe $\int$ renferme une autre quantité μ dont la valeur est arbitraire, on peut considérer cette quantité μ comme une nouvelle variable, et l'intégrale elle-même comme une fonction de μ. Parmi les fonctions de cette espèce, il faut remarquer celle que M. Legendre a désignée par la lettre Γ et qui, pour des valeurs positives de μ, se trouve définie par l'équation

$$\Gamma(\mu) = \int_0^1 \left(1\frac{1}{x}\right)^{\mu-1} dx.$$

Si l'on pose

$$1\frac{1}{x} = z,$$

d'où

$$\frac{1}{x} = e^z, \quad x = e^{-z}, \quad dx = -e^{-z}dz,$$

et si l'on remarque que pour $x = 0$ on a $z = \infty$, pour $x = 1$, $z = 0$, cette intégrale devient

$$-\int_\infty^0 z^{\mu-1}e^{-z}dz = \int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-z}dz = \Gamma(\mu).$$

La fonction Γ satisfait évidemment à cette première équation $\Gamma(1) = 1$. De plus, comme nous avons trouvé (nº 42), $\int_0^\infty z^n e^{-z}dz = 1.2.3\ldots n$, on aura évidemment

$$\Gamma(2)=1, \Gamma(3)=1.2, \ldots, \Gamma(n)=1.2.3\ldots(n-1)=(n-1)\Gamma(n-1).$$

En remplaçant dans la valeur déjà donnée (nº 42) des intégrales

$$\int_0^\infty z^n e^{-az} \cos bz dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{b}{a}\right],$$

$$\int_0^\infty z^n e^{-az} \sin bz dz = \frac{1.2.3\ldots n}{(a^2+b^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin\left[(n+1)\text{arc tang}\frac{b}{a}\right],$$

n par $n-1$, le produit $1.2.3\ldots\ldots(n-1)$ par sa valeur $\Gamma(n)$, on aura

$$\int_0^\infty z^{n-1}e^{-az}\cos bz dz = \frac{\Gamma(n)\cos\left(n \text{ arc tang}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}},$$

$$\int_0^\infty z^{n-1}e^{-az}\sin bz dz = \frac{\Gamma(n)\sin\left(n \text{ arc tang}\frac{b}{a}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}};$$

et en changeant z en az dans l'équation $\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-z} = \Gamma(\mu)$,

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-az}dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

Enfin, de la formule

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)1.2.3\ldots(n-m-1)}{1.2.3\ldots(n-1)}$$

on tirera

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}dx}{(1+x)^n} = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)}.$$

La formule

$$\int_0^\infty z^{\mu-1}e^{-az}dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}$$

étant vraie, quels que soient le nombre μ et la quantité a, on pourra y faire tour à tour,

1°. $\mu = a,\quad a = x,$

2°. $\mu = b,\quad a = x+1;$

ce qui donnera, en supposant que a et b sont positifs,

$$\int_0^\infty z^{a-1}e^{-xz}dz = \frac{\Gamma(a)}{x^a},$$

$$\int_0^\infty z^{b-1}e^{-z(1+x)}dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

et par suite

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty x^{a-1}e^{-xz}z^{b-1}e^{-z}dz,$$

d'où l'on tire, en multipliant par dx et intégrant par rapport à x, entre les limites o et ∞,

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty z^{b-1}e^{-z}dz \times \int_0^\infty x^{a-1}e^{-xz}dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(b)}\int_0^\infty z^{b-1}e^{-z}dz \times \frac{\Gamma(a)}{z^a} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)}\int_0^\infty z^{b-a-1}e^{-z}dz.$$

Puisque d'après la définition même de la fonction Γ, et en supposant aussi $b-a$ positif, on a

$$\int_0^\infty z^{b-a-1}e^{-z}dz = \Gamma(b-a),$$

on aura enfin

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}.$$

Si dans cette formule on fait $b=1$, $a=\frac{2n+1}{2n}$, et si l'on a égard aux équations (n° 49)

$$\int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{1+z} = 2n\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = n\int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2m}dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{\sin a\pi},\quad \Gamma(1)=1,$$

on trouvera

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},\quad [\Gamma(\tfrac{1}{2})]^2 = \pi,$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi} = \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}}e^{-z}dz = \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx.$$

De cette dernière équation on tire

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+z)^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z)^2}dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(x+z)^2}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(x-z)^2}dx = e^{-z^2}\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}(e^{-2zx}+e^{2zx})dx,$$

et enfin

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\,\frac{(e^{2zx}+e^{-2zx})}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}\,e^{-z^2}\sqrt{\pi},$$

formule qui sera vraie quelle que soit la valeur réelle de z, et qui le sera encore quand on remplacera z par $z\sqrt{-1}$, ce qui donne

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2zx\,dx = \tfrac{1}{2}\,e^{-z^2}\sqrt{\pi}.$$

57. La légitimité de ce passage du réel à l'imaginaire, repose sur le théorème suivant, qu'il est facile de démontrer : si pour les valeurs réelles de z comprises entre les limites $-r$, $+r$, les fonctions $f(x,\ z)$ et

$$\mathrm{F}(z) = \int_{z_0}^{z} f(x,\ z)dx$$

sont développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de z ; si d'ailleurs les sommes de ces séries, quand z devient imaginaire, continuent d'être représentées par les notations $f(x,\ z)$, $\mathrm{F}(z)$, l'équation

$$\mathrm{F}(z) = \int_{z_0}^{z} f(x,\ z)dx$$

subsistera pour les valeurs imaginaires de z dont les modules sont inférieurs à r. Pour démontrer ce théorème, on partirait du principe certain que deux séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de z, ne peuvent donner la même somme qu'autant que les coefficients des puissances semblables de z sont égaux

dans les deux séries. De cette égalité ou identité des coefficients, on conclurait immédiatement que si les deux séries demeurent convergentes et fournissent la même somme pour les valeurs réelles de z comprises entre les limites $-r$, $+r$, elles rempliront les mêmes conditions pour des valeurs imaginaires de z dont les modules seront inférieurs à r.

L'application de cette remarque au cas traité plus haut est évidente ; les deux fonctions

$$f(x, z) = e^{-x^2}\frac{(e^{2zx} + e^{-2zx})}{2}, \quad F(z) = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-z^2},$$

quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de z, sont développables, par la formule de Maclaurin, en séries convergentes ; donc, etc.

M. Legendre a désigné sous le nom d'intégrale eulérienne de seconde espèce, et M. Binet a proposé de représenter par la notation B (a, b), l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$. Il existe une relation remarquable entre cette intégrale et l'intégrale eulérienne de première espèce $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} d^{-x}ex$. Si en effet dans l'expression $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx$ on pose $x = \frac{1}{1+z}$, on trouvera $B(a,b) = \int_0^\infty \frac{z^{a-1}dz}{(1+z)^{a+b}}$, mais quand dans l'équation (n° 56) $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)}$ on change b en $a+b$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^{a+b}} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

donc

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

NEUVIÈME LEÇON.

Comparaison des deux valeurs que prend, dans certains cas, une intégrale double quand on intervertit l'ordre de l'intégration. — Application de ces principes à la détermination des intégrales définies. — Comment à l'aide de certaines transformations particulières on peut calculer diverses intégrales définies.

---

58. Il est encore une autre remarque due à M. Cauchy, et qui l'a conduit à la détermination d'un très-grand nombre d'intégrales définies. Des principes établis dans la huitième leçon, il résulte que lorsqu'on a une double intégration à faire, on peut renverser l'ordre des intégrations, car on a (n° 55)

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Si l'on pose

$$f(x,y)\,dx = \frac{d\chi(x,y)}{dx}dx,$$

$$f(x,y)\,dy = \frac{d\varphi(x,y)}{dy}dy,$$

les deux fonctions $\varphi(x,y)$ et $\chi(x,y)$ seront deux fonctions propres à vérifier l'équation

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy} = \frac{d\chi(x,y)}{dx},$$

et l'on trouvera

$$\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,\ Y)-\varphi(x,\ y_0)]\,dx=\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(x_0,\ y)]\,dy.$$

Cette équation subsiste lorsque les fonctions $\varphi(x,\ y)$, $\chi(x,\ y)$ sont finies et continues entre les limites x_0, X, y_0, Y; mais elle cesse d'être exacte lorsque ces fonctions deviennent infinies pour un ou plusieurs systèmes de valeurs compris entre les limites dont il s'agit. Alors les expressions obtenues par une double intégration peuvent différer l'une de l'autre et dépendent de l'ordre des intégrations ; mais leur différence peut être facilement calculée. Supposons d'abord que les deux fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ deviennent infinies pour un seul système de valeurs $x=a$, $y=b$, et désignons par ε un nombre infiniment petit, on aura, en appliquant la formule qui précède,

$$\int_{x_0}^{a-\varepsilon}[\varphi(x,\ Y)-\varphi(x,y_0)]dx+\int_{a+\varepsilon}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]\,dx$$
$$=\int_{y_0}^{Y}[\chi(X,y)-\chi(a+\varepsilon,y)+\chi(a-\varepsilon,y)-\chi(x_0,y)]\,dy,$$

puis on en conclura, en faisant converger ε vers la limite o,

$$\int_{x_0}^{X}[\varphi(x,Y)-\varphi(x,y_0)]dx=\int_{x_0}^{X}[\chi(x,Y)-\chi(x_0,y)]dy-\Delta,$$

la valeur de Δ étant déterminée par la formule

$$\Delta=\lim\int_{y_0}^{Y}[\chi(a+\varepsilon,y)-\chi(a-\varepsilon,y)]\,dy.$$

Dans le cas général où les fonctions deviendraient infinies pour un certain nombre de systèmes de valeurs de x et de y, Δ serait la somme de plusieurs termes de même forme.

Exemple :

$$f(x,y)=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

ou

$$\varphi(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad \chi(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$x_0=-1,\quad X=1,\quad y_0=-1,\quad Y=1,$$

on trouvera

$$\Delta=\lim\int_{-1}^{+1}\frac{2\varepsilon dy}{\varepsilon^2+y^2}=2\pi,\int_{-1}^{+1}\frac{-2dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{+1}\frac{2dy}{1+y^2}-2\pi,$$

ou

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dydx=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy-2\pi.$$

Il est facile de voir que les fonctions $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ vérifieront les conditions

$$\frac{d\chi(x,y)}{dx}dx=f(x,y)\,dx,\quad \frac{d\varphi(x,y)}{dy}dy=f(x,y)\,dy,$$

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\frac{d\chi(x,y)}{dx}.$$

Si l'on a $\varphi(x,y)dx+\chi(x,y)dy=f(u)du$, et par suite

$$\varphi(x,y)=f(u)\frac{du}{dx},\quad \chi(x,y)=f(u)\frac{du}{dy}.$$

59. Ce que nous venons de dire s'applique encore évidemment au cas où les fonctions $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$, $\chi(x,y)$ deviennent imaginaires pourvu qu'elles satisfassent toujours aux équations qui précèdent. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$\varphi(x,y)=F(x+y\sqrt{-1}),$$
$$\chi(x,y)=\sqrt{-1}\,F(x+y\sqrt{-1});$$

on aura alors, en effet,

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dy}=\sqrt{-1}F'(x+y\sqrt{-1}),\qquad \frac{d\chi(x,y)}{dx}=\sqrt{-1}F'(x+y\sqrt{-1}),$$

on aura donc, en posant

$$\Delta = \sqrt{-1}\lim \int_{y_0}^{\mathrm{Y}} \left[F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1}) - F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1})\right] dy,$$

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} \left[F(x+\mathrm{Y}\sqrt{-1}) - F(x+y_0\sqrt{-1})\right] dx$$
$$= \sqrt{-1}\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} \left[F(\mathrm{X}+y\sqrt{-1}) - F(x_0+y\sqrt{-1})\right] dy - \Delta.$$

Posons

$$(x-a-b\sqrt{-1})F(x) = \mathrm{F}(x), \quad y = b+\varepsilon z,$$

on en déduira

$$z_0 = -\frac{b-y_0}{\varepsilon}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{Y}-b}{\varepsilon}, \quad dy = \varepsilon dz, \quad F(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{x-a-b\sqrt{-1}},$$

$$F(a+\varepsilon+y\sqrt{-1}) = \frac{\mathrm{F}(a+\varepsilon+y\sqrt{-1})}{a+\varepsilon+y\sqrt{-1}-a-b\sqrt{-1}} = \frac{\mathrm{F}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{\varepsilon(1+z\sqrt{-1})},$$

$$F(a-\varepsilon+y\sqrt{-1}) = \frac{\mathrm{F}[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{\varepsilon(-1+z\sqrt{-1})},$$

$$\Delta = \sqrt{-1}\lim \int_{z_0}^{\mathrm{Z}} \left[\frac{\mathrm{F}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{\mathrm{F}[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}}\right] dz.$$

Soient maintenant

$$\frac{\mathrm{F}[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1+z\sqrt{-1}} - \frac{\mathrm{F}[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1+z\sqrt{-1}} = \lambda(\varepsilon)+\sqrt{-1}\mu(\varepsilon),$$

$$\frac{\lambda(\varepsilon)-\lambda(0)}{\varepsilon} = \lambda'(\theta\varepsilon) = \alpha, \quad \frac{\mu(\varepsilon)-\mu(0)}{\varepsilon} = \mu'(\theta\varepsilon) = \beta,$$

$\lambda(\varepsilon)$, $\mu(\varepsilon)$, et par suite $\lambda'(\varepsilon)$, $\mu'(\varepsilon)$, α, β étant des quantités réelles. Supposons d'ailleurs que Y surpasse y_0, et que les fonctions $\mathrm{F}(x+y\sqrt{-1})$, $\mathrm{F}'(x+y\sqrt{-1})$ restent finies et continues par rapport aux variables x

et y entre les limites x_0, X, y_0, Y; comme on aura

$$\lambda'(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\mu'(\varepsilon)=F'\left[a+\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}\right]\\ -F'\left[a-\varepsilon+(b+\varepsilon z)\sqrt{-1}\right],$$

les valeurs de $\lambda'(\varepsilon)$ et $\mu'(\varepsilon)$ resteront toujours très-petites en même temps que ε, et il en sera de même de α et de β.

Cela posé, on trouvera

$$\Delta=\sqrt{-1}\lim\int_{z_0}^{Z}\left[\lambda(\varepsilon)+\sqrt{-1}\,\mu(\varepsilon)\right]dz\\ =\sqrt{-1}\int_{z_0}^{Z}\left[\lambda(0)+\sqrt{-1}\,\mu(0)\right]dz.$$

Or, si l'on fait

$$\mathrm{f}=\mathrm{F}(a+b\sqrt{-1})=\lim \varepsilon F(a+b\sqrt{-1}+\varepsilon),$$

et si l'on remarque que pour $\varepsilon=0$, $z_0=-\infty$, $Z=+\infty$, on trouvera

$$\lambda(0)+\sqrt{-1}\,\mu(0)=\frac{\mathrm{F}(a+b\sqrt{-1})}{1+z\sqrt{-1}}-\frac{\mathrm{F}(a+b\sqrt{-1})}{-1+z\sqrt{-1}}=+\frac{2\mathrm{f}}{1+z^2};$$

$$\Delta=2\mathrm{f}\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}=2\pi\mathrm{f}\sqrt{-1}.$$

Si l'on avait $y_0=b$ ou $Y=b$, on aurait $z_0=0$ ou $Z=0$. L'intégrale relative à z ne devrait plus être prise qu'entre les limites $z=0$, $z=\infty$; ou $z=-\infty$, $z=0$, et par suite, la valeur de Δ se réduirait à $\pi\mathrm{f}\sqrt{-1}$.

60. Dans tout ce qui précède, $a+b\sqrt{-1}$ représente une racine de l'équation $F(x)=\pm\infty$. Si cette équation admettait plusieurs racines dans lesquelles les parties réelles fussent comprises entre les limites x_0, X et les coefficients de $\sqrt{-1}$ entre les limites y_0, Y; alors, en désignant par $x_1=a_1+b_1\sqrt{-1}$, $x_2=a_2+b_2\sqrt{-1}$, etc.

ces mêmes racines, et par f_1, f_2, etc., les véritables valeurs que reçoivent les produits

$$(x-x_1)F(x) = \left(x - a_1 - b_1\sqrt{-1}\right)F(x),$$
$$(x-x_2)F(x) = \left(x - a_2 - b_2\sqrt{-1}\right)F(x), \text{etc.},$$

tandis que leurs premiers facteurs convergent vers o, on trouverait

$$\Delta = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\sqrt{-1}.$$

Mais chacun des termes $f_1, f_2, \ldots$ devra être réduit à moitié, toutes les fois que dans la racine correspondante le coefficient de $\sqrt{-1}$ coïncidera avec une des limites y_0, Y.

61. Lorsque la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit, 1° pour $x = \pm\infty$ quel que soit y; 2° pour $y = \infty$ quel que soit x; alors, en prenant $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, $y_0 = 0$, $Y = \infty$, on tirera de l'équation

$$\int_{x_0}^{X}\left[F\left(x+Y\sqrt{-1}\right) - F\left(x+y_0\sqrt{-1}\right)\right]dx$$
$$= \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y}\left[F\left(X+y\sqrt{-1}\right) - F\left(x_0+y\sqrt{-1}\right)\right]dy - \Delta,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \Delta = 2\pi(f_1 + f_2 + \ldots + f_m)\sqrt{-1}.$$

f_1, f_2, etc., sont des nombres faciles à déterminer; on pourra donc, dans ce cas, calculer immédiatement la valeur de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$.

Lorsque la fonction $F(x)$ se présente sous la forme $\frac{f(x)}{F(x)}$, et que ceux des termes $f_1, f_2, \ldots, f_m$ qui ne s'évanouissent pas, correspondent à des racines de l'équation

$F(x) = 0$, on a

$$f_1 = \lim \frac{(x-x_1)f(x)}{F(x)} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, \quad f_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}, \text{ etc.},$$

et par suite

$$\Delta = 2\pi \left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} + \ldots + \frac{f(x_m)}{F'(x_m)} \right] \sqrt{-1},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx = 2\pi \left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_m)}{F'(x_m)} \right] \sqrt{-1}.$$

On ne doit prendre pour $x_1, x_2, \ldots, x_m$ que les racines réelles ou les racines imaginaires dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, en ayant soin de réduire à moitié les termes qui correspondent à des racines réelles.

Exemple :

1°. $$F(x) = 1 + x^2,$$

on aura $x_1 = \sqrt{-1}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f \sqrt{-1};$$

2°. $F(x) = 1 - x^2, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = +1,$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [f(-1) - f(1)] \sqrt{-1};$$

3°. $$F(x) = 1 + x^2,$$

$$f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1};$$

μ étant un nombre compris entre 0 et 2, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} dx = \left[(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1} \right] \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} = \pi,$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \sin \frac{1}{2}\mu\pi},$$

4°.
$$F(x) = 1 - x^2,$$
$$f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left[(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}\right].$$
$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{2\sin\frac{1}{2}\mu\pi} = \frac{\pi}{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\mu\pi}.$$

En posant
$$x^2 = z, \quad \mu = 2a,$$
on retrouvera les équations
$$\int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \int_0^{\infty} \frac{z^{a-1}\,dz}{1-z} = \frac{\pi}{\text{tang}\,a\pi},$$
qui se trouveront ainsi démontrées pour toutes les valeurs de a comprises entre 0 et 1.

En partant de ces principes et s'aidant du calcul des résidus, M. Cauchy est parvenu à établir un grand nombre de formules générales dont on peut déduire presque toutes les intégrales définies connues jusqu'à ce jour, et un grand nombre d'autres.

62. Quelquefois aussi des transformations particulières peuvent conduire à la détermination d'une intégrale définie. Nous en citerons quelques exemples.

1°. $\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx$. Multiplions par une autre intégrale semblable $\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy$, il viendra

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2}dx \int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dx\,dy;$$

posons
$$y = tx,$$
d'où
$$dy = x\,dt,$$

on aura, pour $y=0$,
$$t=0;$$
pour $y=\infty$,
$$t=\infty,$$
et
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty dt\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}xdx.$$

On a d'ailleurs
$$\int_0^\infty e^{-(1+t^2)x^2}xdx=\frac{1}{2(1+t^2)},$$
et par conséquent
$$\left(\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)^2=\int_0^\infty\frac{1}{2}\frac{dt}{1+t^2}=\tfrac{1}{2}(\text{arctang}\,\infty-\text{arctang}\,0)=\frac{\pi}{4},$$
$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi};$$

2°. $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bxdx$. Appelons cette intégrale u : en différentiant par rapport à b, on trouvera
$$\frac{du}{db}=-\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x\sin bxdx;$$
mais l'intégration par parties donne
$$\int e^{-a^2x^2}x\sin bxdx=-\frac{1}{2a^2}e^{-a^2x^2}\sin bx+\frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos bxdx;$$
d'où l'on déduit, en remarquant que la partie intégrée s'évanouit pour $x=0$ et $x=\infty$,
$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x\sin bxdx=\frac{b}{2a^2},\quad \int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bxdx=\frac{b}{2a^2}u,$$
et par suite
$$\frac{du}{db}=-\frac{b}{2a^2}u,\quad \frac{du}{u}=-\frac{bdb}{2a^2},\quad u=Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}};$$

on a donc

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = Ce^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

Pour déterminer la constante, faisons $b = 0$, il vient

$$C = \int_0^\infty e^{-a^2x^2}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-z^2}dz = \frac{1}{2a}\sqrt{\pi},$$

et enfin

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}\,c^{-\frac{b^2}{4a^2}}.$$

DIXIÈME LEÇON.

Intégrales des divers ordres pour les fonctions d'une seule variable.

---

63. Ce qui précède avait pour but principal de trouver une fonction de x qui eût pour dérivée une autre fonction de x, $f(x)$, et pour différentielle le produit $f(x)dx$. On donne maintenant, non pas la dérivée première, mais la dérivée de l'ordre n, et l'on demande la valeur générale de y propre à vérifier l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Solution. En multipliant les deux membres de l'équation par dx, on peut la mettre sous la forme

$$d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = f(x)\,dx;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int f(x)dx = \int_{x_0}^{x} f(x)dx + C,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + C;$$

multipliant par dx et intégrant une seconde fois, on aura

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(z)dzdx + C_1(x-x_0) + C_2.$$

Le second membre se ramène facilement à une intégrale simple. En effet, l'équation

$$\mathrm{D}_x \int_{x_0}^{x} (x-z)^m f(z)\,dz = m\int_{x_0}^{x} (x-z)^{m-1} f(z)\,dz$$

donne

$$\int_{x_0}^{x} (x-z)^{m-1} f(z)dz = \frac{1}{m}\,\mathrm{D}_x \int_{x_0}^{x} (x-z)^m f(z)dz,$$

ou, en multipliant par dx, et intégrant entre les limites x_0, x,

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{m-1} f(z)dzdx = \frac{1}{m}\int_{x_0}^{x} (x-z)^m f(z)\,dz + C,$$

et en posant $m = 1$,

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(z)dzdx = \int_{x_0}^{x} (x-z)f(z)dz + C,$$

on aura donc

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int_{x_0}^{x} (x-z)f(z)\,dz + C_1(x-x_0) + C_2.$$

Intégrant de nouveau et plusieurs fois de suite, par rapport à la variable x, on trouvera successivement

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^2}{1.2} + C_2(x-x_0) + C_3,$$

. . . .

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2.3\ldots(n-3)} \ldots$$

$$y = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots C_{n-1}(x-x_0) + \ldots$$

C_1, C_2, C_3, ..., C_n, étant les diverses constantes arbitraires en nombre n que doit par conséquent renfermer, dans tous les cas, l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

On peut mettre sous une autre forme l'intégrale définie du second membre, à l'aide de l'équation déjà démontrée (n° 33),

$$\int_0^{X-x_0} f(X-x)dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0)dx = \int_{x_0}^{X} f(x)dx;$$

en remplaçant en effet dans cette équation x par z, et X par x; $f(z)$ par $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)$, on en tirera

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz = \int_0^{x-x_0} \frac{(x-x_0-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x_0+z)dz$$
$$= \int_0^{x-x_0} \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x-z)dz.$$

Si pour plus de simplicité on fait $x_0 = 0$, cette dernière équation devient

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(x-z)dz,$$

et la valeur générale de y se réduit à

$$y = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)dz + C_1 \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}$$
$$+ C_2 \frac{x^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} + \ldots + C_{n-1}x + C_n.$$

64. Supposons que $F(x)$ soit une valeur particulière de y propre à vérifier l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

en sorte qu'on ait

$$F^{(n)}x = f(x);$$

la fonction $F(x)$ et ses dérivées $F^{(n-1)}(x)$, $F^{(n-2)}(x)$,... $F'(x)$, devront aussi vérifier les équations

$$F^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} f(z)\,dz + C_1,$$

$$F^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} (x-z) f(z)\,dz + C_1(x-x_0) + C_2,$$

$$F^{(n-3)}(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^2}{1.2} + C_2(x-x_0) + C_3.$$

....

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} + \ldots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n.$$

et si, dans le cas où la fonction $F(x)$ et ses dérivées successives restent continues entre les limites x_0, x, on fait dans ces équations $x_0 = 0$, on trouvera

$$C_1 = F^{(n-1)}(x_0),\quad C_2 = F^{(n-2)}(x_0),\ldots,\quad C_n = F(x_0),$$

et par suite

$$F(x) = F(x_0) + (x-x_0)F'(x_0) + \ldots \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

Cette équation subsiste quel que soit x_0, elle sera donc vraie quand on fera $x = x_0$, ce qui donnera

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1}F'(0) + \frac{x^2}{1.2}F''(0) + \ldots \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz.$$

65. Lorsqu'on se sert d'intégrales indéfinies et que l'on se contente d'indiquer les intégrations successives, les va-

leurs des fonctions

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\quad \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}},\quad \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}},\ldots y,$$

se présentent sous la forme

$$\int f(x)\,dx,\quad \int.\int f(x)\,dx\,dx,\quad \int.\int.\int f(x)\,dx\,dx\,dx,\ldots.$$
$$\int.\int.\int\ldots\int f(x)\,dx\ldots dx.$$

Ces dernières expressions sont ce que nous appellerons les intégrales du premier, du second, du troisième ordre,..., de l'ordre n, enfin; relativement à la variable x. On les désigne par les notations

$$\int f(x)\,dx,\ \int\int f(x)\,dx^2,\ \int\int\int f(x)\,dx^3,\ldots,\ \int\int\int\int\ldots\int f(x)\,dx^n,$$

auxquelles on substitue les suivantes

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx,\quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2,\ldots,\quad \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots\ f(x)\,dx^n,$$

quand chaque intégration est effectuée par rapport aux limites x_0, x. Cela posé, on aura évidemment

$$(x)\,dx^2 = \int_{x_0}^{x} (x-z)\,f(z)\,dz + C_1(x-x_0) + C_2,$$

$$\ldots f(x)\,dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} + \ldots C_{n-1}(x-x_0) + C_n,$$

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^2 = \int_{x_0}^{x}(x-z)\,f(z)\,dz,\ \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx^3 = \int\int_{x_0}^{x}\frac{(x-z)^2}{1.2} f(z)\,dz,$$

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} f(z)\,dz.$$

En développant le second membre de cette dernière équation et remarquant que les intégrations étant prises par rapport à z, on peut regarder x comme constant, il

viendra

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\begin{array}{l} x^{n-1}\int_{x_0}^{x} f(z)\,dz - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x} z f(z)\,dz \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\int_{x_0}^{x} z^2 f(z)\,dz \ldots \pm \int_{x_0}^{x} z^{n-1} \ldots \end{array}\right.$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[x^{n-1}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int_{x_0}^{x} x f(x)\,dx \ldots \pm \int_{x_0}^{x} x^{n-1} \ldots\right.$$

On peut vérifier facilement cette formule à l'aide de plusieurs intégrations par parties.

On trouvera encore, en remplaçant l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} f(z)\,dz$ par sa valeur tirée de l'une des équations qui précèdent (n° 62) :

$$\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = F(x) - F(x_0) - \frac{(x-x_0)}{1}F'(x_0)$$
$$-\frac{(x-x_0)^2}{1.2}F''(x_0)\ldots - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x_0);$$

et en faisant $x_0 = 0$,

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\ldots f(x)\,dx^n = F(x) - F(0) - \frac{x}{1}F'(0) - \frac{x^2}{1.2}F''(x_0)\ldots$$
$$-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(0).$$

Exemple : Soit $F(x) = e^x$, on aura

$$f(x) = F^{(n)}(x) = e^x$$

et par conséquent

$$\int_{0}^{x}\int_{0}^{x}\ldots e^x\,dx^n = e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2}\ldots$$
$$-\frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} = \int_{0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} e^z\,dz.$$

66. *Applications analytiques.* Ces applications sont

de deux genres et sont comprises dans la solution de deux questions, dont l'une a déjà été résolue et consiste à chercher la fonction y qui a pour différentielle du premier ou du $n^{ième}$ ordre l'expression $f(x)\,dx$ ou $f(x)\,dx^n$.

2me *question*. On demande de développer des fonctions quelconques de x ou de $x+h$, en séries ordonnées suivant les puissances entières de x ou de h, en assignant les restes de ces séries.

Solution. Reprenons les deux équations du n° 62 :

$$\begin{aligned}F(x) &= F(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} F''(x_0) \ldots \\ &+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F(x) &= F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \int_{0}^{x} \frac{(x-z)^{(n-1)}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz,\end{aligned}$$

dans lesquelles nous avons remplacé $f(z)$ par sa valeur $F^{(n)}(z)$. Si dans la première de ces équations on fait $x=x_0+h$, puis qu'on remplace x_0 par x ; ou si dans la seconde, après avoir remplacé $F(x)$ par $F(x+h)$, on change x en h et réciproquement, il viendra

$$\begin{aligned}F(x+h) &= F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) \ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n-1)}(x) + \int_{x}^{x+h} \frac{F^{(n)}(x+h-z)\,dz}{1.2.3\ldots(n-1)}.\end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre pourra d'ailleurs être présenté sous diverses formes, car on déduira de ce que nous avons vu

$$\begin{aligned}\frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+z)\,dz &= \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(x+h-z)\,dz \\ &= \int_x^{x+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz = \int_0^h \int_0^h \ldots F^{(n)}(x+z)\,dz^n.\end{aligned}$$

On peut établir directement, à l'aide de la seule intégration par parties, l'équation qui donne $F(x+h)$.

En effet, si dans l'équation déjà rappelée

$$\int_{x_0}^{X} f(z)dz = \int_0^{X-x_0} f(X-z)dz = \int_0^{X-x_0} f(z+x_0)dz,$$

on remplace X par x_0+h et ensuite x_0 par x, on en tirera

$$\int_0^h f(x+z)dz = \int_0^h f(x+h-z)\,dz,$$

et par conséquent

$$F(x+h)-F(x) = \int_0^h F'(x+z)dz = \int_0^h F'(x+h-z)\,dz.$$

D'ailleurs, en intégrant plusieurs fois par parties, on trouve

$$\begin{aligned}\int F'(x+h-z)\,dz &= \frac{z}{1}F(x+h-z) + \int \frac{z}{1}F''(x+h-z)\,dz \\ &= \frac{z}{1}F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2}F'''(x+h-z)\,dz \\ &= \frac{z}{1}F'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2}F''(x+h-z)\ldots\ldots \\ &+ \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n-1)}(x+h-z) + \int \frac{z^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}F^{(n)}(x+h-z)\,dz;\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en supposant que les intégrations soient effectuées entre les limites $z=0$, $z=h$ et que les fonctions $F(x+z)$, $F'(x+z)$, ..., $F^{(n)}(x+z)$ restent continues :

$$\begin{aligned}F(x+h) &= F(x) + \frac{h}{1}F'(x) + \frac{h^2}{1.2}F''(x)\ldots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}F^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2..(n-1)}F^{(n)}(x+h-z)dz.\end{aligned}$$

En vertu de l'équation (n° 38)

$$\int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx,$$

on aura

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2...(n-1)} F^{(n)}(x+z)\,dz = F^{(n)}(x+\theta h)\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}\,dz}{1.2.3...(n-1)}$$
$$= \frac{h^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(x+\theta h),$$

$$\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz = F^{(n)}(\theta x)\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\,dz = \frac{x^n}{1.2.3...n} F^{(n)}(\theta x),$$

et l'on retrouvera les équations

$$F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \ldots$$
$$+ \frac{x^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(x+\theta h),$$
$$F(x+h) = F(x) + \frac{h}{1} F'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \ldots$$
$$+ \frac{h^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} F^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3..n} F^{(n)}(x+\theta h),$$

déjà établies dans le Calcul différentiel et qui conduisent aux séries de Taylor et de Maclaurin, séries qui seront, par conséquent, convergentes et auront pour somme $F(x)$ et $F(x+h)$ toutes les fois que les deux intégrales

$$\int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} F^{(n)}(z)\,dz = \frac{x^n}{1.2.3...n} F^{(n)}(\theta x),$$
$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)} F^{(n)}(x+z)\,dz = \frac{h^n}{1.2.3...n} F^{(n)}(x+\theta h),$$

convergeront pour des valeurs croissantes de n vers la limite zéro. Le Calcul intégral, qui, comme on vient de le voir, ramène aux formules de Taylor et de Maclaurin, a l'avantage de donner, sous la forme d'une intégrale définie, la valeur déterminée du reste de ces séries, et par conséquent l'expression de l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à un terme donné.

ONZIÈME LEÇON.

Applications géométriques de la première partie du Calcul intégral. — Première application à la rectification des courbes planes.

67. Les applications géométriques sont aussi de deux sortes : I. On demande de construire une courbe qui soit telle, que la touchante, en un quelconque de ses *points*, fasse avec l'axe des x, un angle dont la tangente trigonométrique soit exprimée par une fonction donnée $f(x)$. C'est, sous un énoncé géométrique, le problème déjà résolu et qui consiste à chercher la valeur générale de y propre à vérifier l'une des équations

$$dy = f(x)\,dx, \quad \frac{dy}{dx} = f(x).$$

On montrera plus tard comment, dans tous les cas, on peut construire la courbe par points en la considérant comme un polygone d'une infinité de côtés infiniment petits.

II. On demande la longueur d'un arc ou l'aire d'une surface courbe ou plane, ou le volume d'un solide renfermé entre des limites données.

Solution générale : Il est évident, d'après ce qu'on a déjà dit, que si la différentielle ou l'accroissement infiniment petit de cet arc, de cette aire, de ce volume, correspondant à l'accroissement infiniment petit de la va-

riable x est donné par une équation de la forme

$$du = F(x)dx,$$

et que si de plus, cet arc, cette aire ou ce volume désignés par u, sont limités dans le sens des x par deux plans fixes $x = x_0$, $x = X$, ou par un plan fixe $x = x_0$, et un plan variable $x = x$, u sera donné par les équations

$$u = \int_{x_0}^{X} F(x)dx, \quad \text{ou} \quad u - u_0 = \int_{x_0}^{x} F(x)dx.$$

68. Considérons d'abord une courbe plane représentée par une équation $f(x, y) = 0$, entre deux coordonnées rectangulaires, ou bien une courbe à double courbure représentée par deux équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

entre trois coordonnées; et sur cette courbe un arc S renfermé entre un point fixe A et le point mobile dont l'abscisse est x; si l'on désigne par S cet arc, et si l'on appelle τ l'angle aigu que la tangente à la courbe fait avec l'axe des x, on aura

$$dS = \pm \text{séc}\,\tau\, dx,$$

le signe $+$ devant être pris dans le cas où l'arc S croît avec l'abscisse x, et le signe $-$ dans le cas contraire. Dès lors la portion de cet arc comprise entre les deux plans fixes $x = x_0$, $x = X$, ou entre le plan fixe $x = x_0$ et le plan variable $x = x$, sera donnée par les équations

$$S - S_0 = \int_{x_0}^{X} \text{séc}\,\tau\, dx, \quad \text{ou} \quad S - S_0 = \int_{x_0}^{x} \text{séc}\,\tau\, dx.$$

En comptant les arcs à partir du point dont l'abscisse est x_0, on aura

$$S_0 = 0, \quad S = \pm \int_{x_0}^{X} \text{séc}\,\tau\, dx, \quad \text{ou} \quad S = \pm \int_{x_0}^{x} \text{séc}\,\tau\, dx$$

on aura d'ailleurs, si la courbe est plane,

$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+y'^2};$$

si la courbe est à double courbure,

$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

et l'on calculera $dS = \pm\,\text{séc}\,\tau\,dx$ en tirant de l'équation, ou des équations de la courbe, les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ ou de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, et les substituant dans les valeurs de sécτ.

Corollaire 1[er]. Si l'inclinaison τ devient constante, on aura

$$S = \pm\int_{x_0}^{x} \text{séc}\,\tau\,dx = \pm\,\text{séc}\,\tau\int_{x_0}^{x} dx = \pm(x-x_0)\,\text{séc}\,\tau,$$

et par conséquent, lorsqu'une ligne a dans tous ses points la même inclinaison par rapport à l'axe des x, une longueur portée sur cette ligne est équivalente au produit de sa projection sur l'axe des x par la sécante de l'inclinaison. C'est ce qui arrive quand la courbe se réduit à une droite ou à une hélice tracée sur un cylindre qui a pour axe l'axe des x.

Corollaire 2[me] : En appelant N la normale à la courbe, on a

$$N = \pm\,\text{séc}\,\tau \times y, \quad \text{séc}\,\tau = \pm\frac{N}{y},$$

et par suite

$$S = \pm\int_{x_0}^{X} \frac{N}{y}\,dx.$$

Corollaire 3[me] : L'intégrale $\int_{x_0}^{X} \text{séc}\,\tau\,dx$ est égale

comme on sait, à la différence des limites $X - x_0$ multipliée par séc T, T désignant une moyenne entre les diverses valeurs de l'inclinaison τ; donc $S = (X - x_0)$ séc T, et $\frac{S}{X - x_0} = \text{séc}\, T$, c'est-à-dire que le rapport de l'arc d'une courbe à sa projection sur un axe, est une moyenne entre les sécantes des diverses inclinaisons de l'arc par rapport à ce même axe. Ce théorème suppose que l'arc, entre les limites x_0, X, n'est rencontré qu'en un seul point par les plans perpendiculaires à l'axe des x.

69. 1[er] *Exemple :*

Le cercle $x^2 + y^2 = r^2$; on a

$$N = r, \quad S = \pm r\int \frac{dx}{y} = \int \frac{rdx}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$
$$S = r\left[\arcsin\frac{x}{r} - \arcsin\frac{x_0}{r}\right].$$

2°. L'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

d'où

$$\frac{x}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 0, \quad y'^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2} = \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)},$$
$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}},$$

ou, en désignant par e l'excentricité déterminée par l'équation

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}; \quad \text{séc}\,\tau = \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}}:$$

on aura donc, en posant

$$x_0 = 0, \quad x = a,$$

et en appelant par conséquent S la partie de l'ellipse

comprise entre le sommet du petit axe et le sommet du grand axe, ou le quart du périmètre,

$$S = \int_0^a dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2x^2}{a^2 - x^2}},$$

et, en faisant $x = az$,

$$S = a\int_0^1 dz \sqrt{\frac{1 - e^2 z^2}{1 - z^2}}.$$

On ne peut intégrer cette expression qu'en ayant recours aux développements en séries. Si au lieu de faire $x = az$ on avait posé $x = a \cos\varphi$, on aurait eu, pour l'arc compté depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x$,

$$S = -a\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \cos^2\varphi},$$

et pour le quart S′ du périmètre

$$S' = a\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi};$$

or on a

$$\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi} = (1 - e^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1 - \frac{e^2}{2}\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\frac{e^4}{4}\cos^4\varphi - \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\frac{e^6}{6}\cos^6\varphi - \text{etc.},$$

série toujours convergente, puisque la quantité e, et *à fortiori* la quantité $e^2 \cos^2\varphi$, sont plus petites que l'unité; donc

$$S' = a\pi - \frac{e^2}{2}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi - \frac{1}{2}\frac{e^4}{4}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi$$
$$- \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{e^6}{6}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\varphi d\varphi + \text{etc.};$$

mais on a trouvé, dans le Calcul intégral (n° 42),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi d\varphi = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\frac{\pi}{2};$$

donc

$$\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{e}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4\right)-\text{etc.}\right].$$

Le périmètre entier de l'ellipse P sera donné par l'équation

$$P = 2a\pi\left[1-\left(\frac{1}{2}e\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}e^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3\right)^2-\text{etc.}\right].$$

Les produits de la série du second membre renfermés entre parenthèses, sont, aux coefficients près, les carrés des termes correspondants du développement

$$(1-e)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}e+\frac{1.3}{2.4}e^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}e^3+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}e^4+\text{etc.}$$

On peut calculer autrement l'arc de l'ellipse. L'équation

$$\text{séc}^2\tau = \frac{1}{\cos^2\tau} = \frac{e^2x^2-a^2}{x^2-a^2}$$

donne

$$x^2 = \frac{a^2(1-\cos^2\tau)}{1-e^2\cos^2\tau},\quad x = \pm\frac{a\sin\tau}{\sqrt{1-e^2\cos^2\tau}},$$

$$dx = \pm\frac{a(1-e^2)\cos\tau d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}};$$

donc, en appelant τ_0 la valeur de τ correspondante à x_0, et comptant toujours l'arc à partir de $x = x_0$, on aura, en admettant que l'arc croisse avec l'inclinaison,

$$S = \int_{x_0}^{x}\text{séc}\,\tau\, dx = a(1-e^2)\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{(1-e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

En désignant toujours par φ l'angle déterminé par l'équa-

tion $x = a\cos\varphi$, on trouverait que, dans le cas où $\cos\varphi$ est positif, φ est lié à τ par l'équation

$$\cos\varphi = \frac{\sin\tau}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau}};$$

d'où l'on tire

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\tau + e^2\cos^2\varphi\cos^2\tau = 0,$$

$$d(e^2\cos\varphi\cos\tau) = d\left[\frac{(e^2\cos\tau\sin\tau)}{\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau}}\right] = -\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau}\,d\tau + \frac{(1 - e^2)\,d\tau}{(1 - e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}},$$

et en intégrant, à partir de $\tau = \tau_0$,

$$(1 - e^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1 - e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}} = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau}$$
$$+ e^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0),$$

et enfin

$$S = a(1 - e^2)\int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{(1 - e^2\cos^2\tau)^{\frac{3}{2}}} = ac^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0)$$
$$+ a\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1 - e^2\cos^2\tau}:$$

en comparant cette équation qui suppose $\tau > \tau_0$ à celle trouvée plus haut

$$S = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi\sqrt{1 - e^2\cos^2\varphi},$$

on voit que l'intégrale

$$a\int_{\tau_0}^{\tau} d\tau\sqrt{1 - c^2\cos^2\tau}$$

représente l'arc renfermé entre les points de l'ellipse qui ont pour abscisse $x = a\cos\tau_0$, $x = a\cos\tau$; donc, si l'on désigne cet arc par s, on aura

$$S = ac^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0) + s,$$
$$S - s = ac^2(\cos\varphi\cos\tau - \cos\varphi_0\cos\tau_0);$$

x_0, x, ξ_0, ξ étant les abscisses des extrémités des arcs S et s, on aura

$$x_0 = a\cos\varphi_0, \quad x = a\cos\varphi, \quad \xi_0 = a\cos\tau_0, \quad \xi = a\cos\tau,$$

et par suite

$$S - s = e^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}.$$

L'angle φ, déterminé par l'équation $\cos\varphi = \frac{a}{x}$, est précisément l'angle que fait, avec le demi-axe des x positifs, le rayon vecteur mené de l'origine au point où l'ordonnée correspondante à l'abscisse x rencontre la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre : τ est toujours l'angle de la tangente avec l'axe des x, en ayant égard à cette remarque, on conclura de l'équation $S - s = e^2\frac{x\xi - x_0\xi_0}{a}$, que l'on peut évaluer en termes finis, la différence qui existe entre deux arcs d'ellipse tellement choisis que les inclinaisons des tangentes menées par les deux extrémités de l'un de ces arcs soient respectivement égales aux inclinaisons des deux rayons vecteurs menés du centre de l'ellipse aux points où la circonférence de cercle décrite sur le grand axe comme diamètre, est coupée par les ordonnées qui renferment les extrémités du second arc.

Lorsque l'on suppose $\tau = 0$, on a

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 0, \quad S - s = \frac{e^2 x\xi}{a},$$

et l'on retrouve un théorème découvert par le comte de Fagnano. Dans tous les cas, en substituant dans l'équation

$$1 - \cos^2\varphi - \cos^2\tau + c^2\cos^2\varphi\cos^2\tau = 0,$$

pour $\cos\varphi$, $\cos\tau$ leurs valeurs $\frac{x}{a}$, $\frac{\xi}{a}$, on trouvera

$$a^4 - a^2(x^2+\xi^2) + e^2x^2\xi^2 = 0;$$

les abscisses x et ξ devront donc toujours satisfaire à cette équation.

3°. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; en faisant $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$; on trouve

$$S = \int_{x_0}^{x} \left(\frac{e^2x^2 - a^2}{x^2 - a^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx,$$

et en posant

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad S = a\int_{\varphi_0}^{\varphi} (e^2 - \cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi};$$

d'où l'on tire, en développant et intégrant,

$$S = ae(\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi_0) - \frac{a}{2e}(\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2}\frac{a}{4e^3}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos^2\varphi d\varphi$$
$$- \frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{a}{6e^5}\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos^4\varphi d\varphi - \text{etc.}$$

Les asymptotes ont pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$, de sorte que la longueur comptée sur l'asymptote entre l'origine et le point dont l'abscisse est x, sera donnée par l'équation

$$l = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2x^2}{a^2}} = x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}},$$

ou

$$l = ex = \frac{ae}{\cos\varphi},$$

et si l'on observe que

$$\frac{1}{\cos\varphi} - \operatorname{tang}\varphi = \frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi},$$

on trouvera, en supposant $\varphi_0 = 0$,

$$l - s = ae \frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi} + \frac{a}{2e}\varphi + \frac{1}{2}\frac{a}{4e^3}\int_0^\varphi \cos^2\varphi d\varphi$$
$$+ \frac{1.3}{2.4}\frac{a}{6e^5}\int_0^\varphi \cos^4\varphi d\varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{a}{8e^7}\int_0^\varphi \cos^6\varphi d\varphi + \text{etc.}$$

Si maintenant on fait $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui suppose $x = \infty$, il viendra

$$s = ae + \frac{a\pi}{4e}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{e^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{e^3}\right)^3 + \ldots\right].$$

cette équation donnera la différence entre deux longueurs très considérables portées, la première sur l'asymptote à partir de l'origine; la seconde sur l'hyperbole à partir du sommet, de manière que leurs extrémités répondent à la même abscisse.

4°. La parabole $y^2 = 2px$, d'où

$$yy' = px,\quad y' = \frac{p}{y} = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}},$$
$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{1+\frac{p}{2x}},\quad S = \int_{x_0}^x dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}}.$$

En posant

$$\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = t,$$

on trouve

$$x = \frac{p}{2(t^2-1)},$$

$$\int dx\sqrt{1+\frac{p}{2x}} = \int t dx = tx - \int x dt = tx - \frac{p}{2}\int\frac{dt}{t^2-1}$$
$$= tx - \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + C.$$

Si maintenant on fait, pour plus de simplicité, $x_0 = 0$,

on aura

$$S = x\sqrt{1+\frac{p}{2x}} - \frac{p}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}-1}{\sqrt{1+\frac{p}{2x}}+1}\right).$$

Telle est la valeur de l'arc de parabole compris entre le sommet et le point correspondant à l'abscisse x.

5°. La logarithmique $y = a\,\mathrm{l}x$; d'où

$$y' = \frac{a}{x},\quad x = \frac{a}{y'} = a\cot\tau,\quad dx = -a\frac{d\tau}{\sin^2\tau},$$

$$S = -a\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\cos\tau\,\sin^2\tau};$$

d'ailleurs

$$\frac{1}{\cot\tau\,\sin^2\tau} = \frac{\cos^2\tau+\sin^2\tau}{\cos\tau\sin^2\tau} = \frac{\cos\tau}{\sin^2\tau}+\frac{1}{\cos\tau},$$

$$\int\frac{\cos\tau d\tau}{\sin^2\tau} = -\frac{1}{\sin\tau}+C,$$

$$\int\frac{d\tau}{\cos\tau} = \mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)+C;$$

donc

$$S = a\left[\left(\frac{1}{\sin\tau}-\frac{1}{\sin\tau_0}\right)-\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right)+\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right].$$

6°. La chaînette $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$; en posant $x_0 = 0$, c'est-à-dire en comptant l'arc à partir du point le plus bas, on trouvera

$$S = \int_0^x \frac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}dx = a\frac{e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}}{2} = ay'.$$

Cet arc est proportionnel à la tangente trigonométrique de l'inclinaison correspondante à son extrémité. Comme

on a

$$y' = \frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2},$$

$$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{a}{2}\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} - 2} = \frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}} + 2\right) - 4}$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - 4} = \sqrt{\frac{a^2}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 - a^2} = \sqrt{y^2 - a^2},$$

on aura aussi

$$S = \sqrt{y^2 - a^2};$$

l'arc, compté à partir du point le plus bas est donc le côté d'un triangle rectangle dont y est l'hypoténuse, et a l'autre côté.

7°. Enfin, la cycloïde

$$x = R \arccos \frac{R - y}{R} - \sqrt{2Ry - y^2}.$$

Si dans la formule $S = \int_{x_0}^{x} \text{séc}\, \tau dx$ on remplace x par y, il faudra remplacer en même temps τ par $\frac{\pi}{2} - \tau$; on aura donc

$$dS = \pm \text{coséc}\, \tau dy; \quad S - S_0 = \pm \int_{y_0}^{y} \text{coséc}\, \tau dy = \pm \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}},$$

ou, en comptant l'arc à partir de $x = x_0$, et supposant $y_0 < y$,

$$S = \int_{y_0}^{y} \text{coséc}\, \tau dy = \int_{y_0}^{y} dy \sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}.$$

Pour la cycloïde, on a

$$dx=\sqrt{\frac{y}{2R-y}}dy,\quad y'=\sqrt{\frac{2R-y}{y}},\quad 1+\frac{1}{y'^2}=\frac{2R}{2R-y};$$

donc, en comptant l'arc à partir de $x=0$ ou du point de rebroussement, il viendra

$$S=\sqrt{2R}\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{2R-y}}=2\sqrt{2R}(\sqrt{2R}-\sqrt{2R-y}),$$

$$4R-S=2\sqrt{2R(2R-y)}.$$

Pour avoir la demi-cycloïde, il faut faire $y=2R$, ce qui donne $S=4R$; le double de cette valeur, ou $8R$, sera la longueur d'une branche entière de cycloïde.

DOUZIÈME LEÇON.

Étant donnée la relation qui existe entre l'arc et l'une des coordonnées de son extrémité, trouver l'équation de la courbe.

---

70. Nous avons vu que lorsqu'une courbe est donnée par son équation, on peut obtenir en termes finis, ou à l'aide d'un développement en séries, la relation qui existe entre un arc quelconque de cette courbe et les coordonnées de son extrémité, ce qui permet de calculer exactement, ou à un degré quelconque d'approximation, la longueur de l'arc compris entre deux points donnés.

Mais on peut se proposer un autre problème inverse du précédent, et que l'on peut énoncer comme il suit : *Étant donnée la relation qui existe entre l'arc d'une certaine courbe et l'une des coordonnées de son extrémité, trouver l'équation de cette courbe.* Nous avons cru que cette recherche était assez intéressante pour qu'on fût bien aise d'en trouver ici quelques exemples.

Soit $s = \varphi(x)$ la relation donnée entre l'arc s et l'abscisse x de son extrémité, on aura

$$ds = \varphi'(x)dx = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad dy = dx\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1},$$

et par suite

$$y = \int dx\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1} + C.$$

L'intégration sera plus ou moins facile, suivant la forme de la fonction $\varphi(x)$. On l'achève plus facilement dans beaucoup de cas en substituant à la variable indépendante x l'angle $\theta = \frac{\pi}{2} - \tau$, que la tangente à la courbe fait avec l'axe des y. Cet angle est lié évidemment aux coordonnées x, y par les équations

$$dy = \operatorname{tang}\tau dx = \cot\theta dx, \quad dx = ds\sin\theta, \quad dy = ds\cos\theta.$$

On a d'ailleurs, comme nous l'avons vu,

$$dx = \frac{ds}{\varphi'(x)},$$

et par conséquent

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{coséc}\theta,$$

d'où l'on tire

$$x = \psi(\operatorname{coséc}\theta), \quad dx = -\psi'(\operatorname{coséc}\theta)\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}d\theta,$$

$$y = -\int\psi'(\operatorname{coséc}\theta)\frac{\cos^2\theta}{\sin^3\theta}d\theta + C,$$

et enfin, en éliminant θ entre cette équation et celle qui donne la valeur de x, on arriverait à l'équation cherchée

$$F(x, y) = 0.$$

L'arc s de la courbe et son rayon de courbure, seront d'ailleurs donnés par les équations

$$s = \varphi(x) = \varphi[\psi(\operatorname{coséc}\theta)] = f(\operatorname{coséc}\theta),$$

$$\rho = \pm\frac{ds}{d\tau} = \mp\frac{ds}{d\theta} = \pm\frac{\operatorname{coséc}^2\theta\sqrt{\operatorname{coséc}^2\theta - 1}}{\psi(\operatorname{coséc}\theta)},$$

ou

$$\rho = \pm\frac{ds^3}{dxd^2y} = \pm\frac{[\varphi'(x)]^2}{\varphi''(x)}\sqrt{[\varphi'(x)]^2 - 1}.$$

1[re] *Application*. L'arc s est lié à l'abscisse x par l'é-

quation

$$s^2 = px, \quad s = \sqrt{px};$$

on aura

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta = \frac{2\sqrt{px}}{p}, \quad x = \frac{p\sin^2\theta}{4}, \quad dx = \frac{p\sin\theta\cos\theta d\theta}{2},$$

$$s = \frac{p}{2}\sin\theta, \quad dy = \frac{p}{2}\cos^2\theta d\theta, \quad y = \frac{p}{2}\int\cos^2\theta d\theta + C.$$

En intégrant à partir de $\theta = 0, y = 0$, et posant

$$p = 8R, \quad 2\theta = \omega,$$

on trouve définitivement

$$y = R(\omega + \sin\omega), \quad x = R(1 - \cos\omega).$$

Ces deux équations représentent une cycloïde dont le rayon générateur aurait R pour rayon, et l'on arrive de cette manière au théorème suivant : Si en partant du sommet de la cycloïde on décrit une parabole dont le paramètre soit égal au quadruple du diamètre du cercle générateur, les arcs de la cycloïde seront égaux aux ordonnées de la parabole. Cette relation entre les deux courbes ne doit pas s'étendre au-delà du foyer de la parabole, puisque les ordonnées de la cycloïde deviennent imaginaires pour des valeurs de x plus grandes que 2R. On arriverait à la même conclusion en remarquant que l'arc s de la cycloïde est donné par l'équation

$$s = 2\sqrt{2Rx}, \quad \text{ou} \quad s^2 = 8Rx,$$

équation d'une parabole dont le paramètre est 8R.

2me *Application*. L'équation qui lie l'arc à l'abscisse est celle d'une parabole de l'ordre $m + n$,

$$s^{m+n} = p^n x^m.$$

On aura

$$(m+n)s^{m+n-1}ds = mp^n x^{m-1}dx,$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta = \frac{(m+n)s^{m+n-1}}{mp^n x^{m-1}} = \frac{(m+n)x}{ms} = \frac{m+n}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{n}{m+n}};$$

$$\cos\theta = \left[1 - \left(\frac{m+n}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2n}{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

et, en posant

$$q = p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}},\quad x = \frac{m}{m+n}\,q\sin^{\frac{m+n}{n}}\theta,\quad s = q\sin^{\frac{m}{n}}\theta,$$

$$dx = \frac{mq}{n}\sin^{\frac{m}{n}}\theta\cos\theta d\theta,$$

$$dy = \frac{mq}{n}\sin^{\frac{m}{n}-1}\theta\cos^2\theta d\theta = q\cos\theta\, d\sin^{\frac{m}{n}}\theta.$$

On trouvera encore, pour la valeur du rayon vecteur,

$$\rho = \pm\frac{mq}{n}\sin^{\frac{m-n}{n}}\theta\cos\theta.$$

Considérons le cas particulier où, n étant égal à 1, la parabole est de l'ordre $m+1$ et a pour équation

$$s^{m+1} = px^m;$$

q est alors égal à $p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$, et l'on a

$$s = q\sin^m\theta,\quad ds = mq\sin^{m-1}\theta\cos\theta d\theta,$$

$$x = \frac{m}{m+1}\,q\sin^{m+1}\theta,\quad dx = mq\sin^m\theta\cos\theta d\theta,$$

$$\sin\theta = \frac{m+1}{m}\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{1}{m}},\quad \cos\theta = \left[1 - \left(\frac{m+1}{m}\right)^2\left(\frac{s}{p}\right)^{\frac{2}{m}}\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\left[1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{m+1}}\right]^{\frac{1}{2}}dx}{\frac{m+1}{m}\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{1}{m+1}}} = q\cos\theta d.\sin^m\theta = mq\sin^{m-1}\theta\cos^2\theta d\theta,$$

$$\rho = \pm mq\sin^{m-1}\theta\cos\theta.$$

L'intégration par partie donnera

$$y = q\left(\sin^m\theta\cos\theta + \int\sin^{m+1}\theta d\theta\right) + C.$$

On a d'ailleurs (n° 30), en posant $m+1=\mu$:

1°. Si μ est impair,

$$\int\sin^{m+1}\theta d\theta = \int\sin^\mu\theta d\theta = -\frac{\cos\theta}{\mu}\left[\sin^{\mu-1}\theta + \frac{\mu-1}{\mu-2}\sin^{\mu-3}\theta + \ldots\frac{2.4\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{1.3\ldots(\mu-4)(\mu-2)}\right];$$

2°. Si μ est pair

$$\int\sin^{m+1}\theta d\theta = \int\sin^\mu\theta d\theta$$

$$= -\frac{\cos\theta}{\mu}\left[\sin^{\mu-1}\theta + \frac{\mu-1}{\mu-2}\sin^{\mu-3}\theta\ldots + \frac{3.5\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{2.4\ldots(\mu-4)(\mu-2)}\sin\theta\right]$$
$$+ \frac{1.3\ldots(\mu-3)(\mu-1)}{2.4\ldots(\mu-2)\mu}\theta + C.$$

A l'aide de ces deux formules on arrive immédiatement aux relations qui lient les deux coordonnées x, y avec l'angle θ, et par suite à l'équation $F(x, y) = 0$ de la courbe cherchée.

Supposons que m soit égal à 2, la parabole est du troisième ordre, et donnée par l'équation $s^3 = px^2$; on aura

$$q = \frac{4}{9}p,\quad x = \frac{2q}{3}\sin^3\theta,\quad s = q\sin^2\theta,$$

$$dy = 2q\sin\theta\cos^2\theta d\theta,\quad y = -\frac{2q}{3}\cos^3\theta + C;$$

mais quand $\theta = 0$, y est aussi nul, donc

$$C = \frac{2q}{3}, \quad y = \frac{2}{3} q (1 - \cos^3 \theta);$$

on aura encore

$$\rho = 2q \sin\theta \cos\theta = q \sin 2\theta.$$

Pour obtenir sous une forme très simple l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes, posons

$$\frac{2}{3} q - y = \eta, \quad x = \xi, \quad \frac{2}{3} q = \left(\frac{2}{3}\right)^8 p = \text{A},$$

nous trouverons ainsi

$$\xi = \text{A} \sin^3\theta, \quad \eta = \text{A} \cos^3\theta,$$

$$\left(\frac{\xi}{\text{A}}\right)^{\frac{1}{3}} = \sin\theta, \quad \left(\frac{\eta}{\text{A}}\right)^{\frac{1}{3}} = \cos\theta,$$

$$\left(\frac{\xi}{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad \rho = 2q \left(\frac{\xi\eta}{\text{A}^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Telle est donc l'équation de la courbe dont les arcs sont égaux aux ordonnées d'une parabole cubique; elle a quelque rapport de forme avec l'équation

$$\left(\frac{x}{\text{A}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\text{B}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

de la développée de l'ellipse, sans pouvoir s'en déduire cependant, puisque dans cette dernière équation on ne peut supposer $\text{A} = \text{B}$ sans que l'on ait en même temps $\text{A} = 0$, $\text{B} = 0$.

Si l'on faisait

$$m = 3, \quad s^4 = px^3, \quad q = (\tfrac{3}{4})^3 p, \quad (\tfrac{3}{4})^4 p = a,$$

on trouverait

$$s = q \sin^3\theta, \quad x = \tfrac{3}{4} q \sin^4\theta, \quad dy = 3q \sin^2\theta \cos^2\theta d\theta,$$

et en intégrant à partir de $\theta = 0, y = 0$,

$$y = \frac{1}{8} a (4\theta - \sin 4\theta),$$

on aura encore

$$\sin\theta = \sqrt[4]{\frac{x}{a}}, \quad \theta = \text{arc}\sin\sqrt[4]{\frac{x}{a}},$$

$$x = \frac{a}{8}(3 - 4\cos 2\theta + 1 + \cos 4\theta),$$

et en posant

$$x - \frac{a}{8}(3 - 4\cos 2\theta) = \xi, \quad 4\theta = \pi + \omega, \quad \eta = y - \pi a, \quad R = \frac{a}{8},$$

$$\xi = R(1 - \cos\omega), \quad \eta = R(\omega + \sin\omega).$$

Si ξ n'était pas fonction à la fois de x et de θ, ces deux équations représenteraient une cycloïde.

On trouvera encore que l'équation de la courbe dont les arcs sont représentés par la parabole du cinquième degré $s^5 = px^4$ est représentée par l'équation

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{5}} + \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{5}} = 1,$$

dans laquelle η est une fonction de ξ et de θ, ce qui empêche qu'elle ne soit un cas particulier de l'équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{m}{n}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{m}{n}} = 1;$$

3me *Application*. L'arc s est l'ordonnée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

on aura

$$\sin\theta = -\frac{a^2}{b^2}\frac{s}{x} = -\frac{a}{b}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}, \quad x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2\theta}},$$

$$s = \mp\frac{b^2\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2\theta}}, \quad dx = \mp\frac{a^2b^2\sin\theta\cos\theta d\theta}{(a^2+b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$dy = \mp\frac{a^2b^2\cos^2\theta d\theta}{(a^2+b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

En intégrant cette dernière équation et éliminant θ, on arriverait à l'équation de la courbe ; mais l'intégration n'est pas possible en termes finis, elle ne peut s'effectuer que par approximation : nous nous contenterons ici de quelques transformations assez élégantes.

Posons

$$x = a\cos u, \quad s = b\sin u,$$

d'où

$$dx = -a\sin u du, \quad ds = b\cos u du,$$

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta = -\frac{a}{b}\frac{\sin u}{\cos u}, \quad \cot\theta = -\frac{\sqrt{b^2\cos^2 u - a^2\sin^2 u}}{a\sin u};$$

et en posant $c^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2}$,

$$dy = bdu\sqrt{1-c^2\sin^2 u}.$$

L'intégrale de cette dernière équation représente une fonction elliptique de seconde espèce, et sera réelle tant que l'angle u vérifiera la condition $\sin u < \frac{1}{c}$.

Si $a = b$,

$$dy = adu\sqrt{1-2\sin^2 u} = adu\sqrt{\cos 2u},$$

l'intégrale sera réelle tant que $\sin u < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u < 45°$;

4me *Application.* L'arc s est donné par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{s^2}{b^2}=1,$$

qui représente une hyperbole; on trouvera, dans ce cas,

$$\frac{dx}{ds}=\sin\theta=\frac{a}{b}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x},$$

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}},\quad s=\frac{b^2\sin\theta}{\sqrt{a^2-b^2\sin^2\theta}},$$

$$dx=\frac{a^2b^2\sin\theta\cos\theta d\theta}{(a^2-b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},\quad dy=\frac{a^2b^2\cos\theta^2 d\theta}{(a^2-b^2\sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale de cette dernière expression est encore une fonction elliptique de seconde espèce que l'on ne peut obtenir qu'à l'aide d'un développement en série. Examinons en particulier le cas où, a étant égal à b, l'hyperbole est équilatère. On a alors

$$x=\frac{a}{\cos\theta},\quad dx=\frac{a\sin\theta d\theta}{\cos^2\theta},\quad dy=\frac{ad\theta}{\cos\theta},$$

et en intégrant à partir de $\theta=0$, $y=0$,

$$y=\frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right)=\frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=a\,\mathrm{l}\,\mathrm{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right).$$

En passant aux nombres, on trouve

$$e^{\frac{y}{a}}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta};$$

or

$$\cos\theta=\frac{a}{x},\quad \sin\theta=\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{x},$$

donc

$$a\left(e^{\frac{y}{a}}-x\right)^2=x^2-a^2,\quad y=a\,l\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a},$$

et enfin

$$x=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}}+e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

On voit évidemment sous cette dernière forme que la courbe cherchée est une chaînette.

Si l'on posait

$$x=\frac{a}{\cos u},\qquad s=b\operatorname{tang} u,$$

ces deux valeurs vérifieraient l'équation de l'hyperbole donnée, et l'on trouverait

$$dy=\frac{du}{\cos^2 u}\sqrt{b^2-a^2\sin^2 u}.$$

L'intégrale ne peut s'obtenir qu'en série, et ne sera réelle qu'autant que l'angle u satisfera à l'équation $\sin u<\frac{b}{a}$.

5me *Application :* à la cycloïde

$$x=\mathrm{R}(1-\cos\omega),\quad s=\mathrm{R}(\omega+\sin\omega),$$

ou

$$s=\mathrm{R}\operatorname{arc\,sin}\frac{\sqrt{2\mathrm{R}x-x^2}}{\mathrm{R}}+\sqrt{2\mathrm{R}x-x^2},$$

on a

$$\frac{ds}{dx}=\varphi'(x)=\frac{\sqrt{2\mathrm{R}-x}}{x},\quad dy=\sqrt{2}\,dx\sqrt{\frac{\mathrm{R}-x}{x}},$$

et en posant

$$\frac{y}{\sqrt{2}}=\eta,\quad x=\xi,\quad \mathrm{R}=2\mathrm{R}',$$

il vient

$$d\eta=d\xi\sqrt{\frac{2\mathrm{R}'-\xi}{\xi}}.$$

Or cette dernière équation est l'équation différentielle d'une cycloïde dont le cercle générateur aurait pour rayon R′ ou $\frac{R}{2}$; donc pour tracer la courbe dont les arcs seraient représentés par une cycloïde donnée, il suffit de décrire une seconde cycloïde ayant pour cercle générateur un cercle d'un rayon deux fois plus petit, et de faire croître les ordonnées de cette seconde cycloïde dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

On arriverait à la même conclusion de la manière suivante : les équations

$$x = R(1 - \cos\omega), \quad s = R(\omega + \sin\omega),$$

donnent

$$\sin\theta = \frac{dx}{ds} = \frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{x}{2R-x}},$$

$$x = \frac{2R\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta},$$

$$dx = \frac{4R\sin\theta\cos\theta d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}, \quad dy = \frac{4R\cos^2\theta d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}.$$

En transformant les puissances des sinus et des cosinus en sinus et cosinus d'arcs multiples, on trouvera

$$x = \frac{2R(1-\cos 2\theta)}{3-\cos 2\theta}, \quad dy = \frac{8R(1+\cos 2\theta)}{(3-\cos 2\theta)^2}d\theta.$$

L'équation

$$\sin\theta = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\omega$$

donne

$$\cos\theta d\theta = \frac{\frac{1}{2}d\omega}{\cos^2\frac{1}{2}\omega},$$

et par suite

$$dy = 2Rd\omega\cos\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{\cos\omega}.$$

En faisant

$$\cos\omega = \cos^2 \tfrac{1}{2}\omega',$$

d'où

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{\sqrt{1-\cos^2\frac{1}{2}\omega'}}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}\omega'}{\sqrt{2}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega d\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}\omega' d\omega'}{\sqrt{2}},$$

on trouvera enfin

$$dy = \mathrm{R}\sqrt{2}\cos^2\tfrac{1}{2}\omega' d\omega',$$

$$y = \sqrt{2}\frac{\mathrm{R}}{2}(\omega' + \sin\omega'), \quad x = \frac{\mathrm{R}}{2}(1-\cos\omega'),$$

et ces deux équations représentent évidemment une courbe dont les ordonnées sont à celle de la cycloïde de rayon $\frac{\mathrm{R}}{2}$, dans le rapport de $\sqrt{2}$ à 1.

On arriverait encore au même résultat en intégrant le second membre de l'équation

$$y = 4\mathrm{R}\int\frac{(1+\cos 2\theta)}{(3-\cos 2\theta)^2}d.2\theta;$$

on a en effet

$$\int\frac{(1+\cos 2\theta)d.2\theta}{(3-\cos 2\theta)^2} = \frac{4\sin 2\theta}{8(3-\cos 2\theta)} + \frac{4}{8}\int\frac{d.2\theta}{3-\cos 2\theta},$$

$$\int\frac{d.2\theta}{3-\cos 2\theta} = \frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{\sin 2\theta\sqrt{8}}{3-\cos 2\theta},$$

et par conséquent

$$y = 2\mathrm{R}\left(\frac{\sin 2\theta}{3-\cos 2\theta} + \frac{1}{\sqrt{8}}\arcsin\frac{\sin 2\theta\sqrt{8}}{3-\cos 2\theta}\right).$$

Mais l'équation

$$x = \frac{2R(1 - \cos 2\theta)}{3 - \cos 2\theta}$$

donne

$$\sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2x(a-x)}}{2a - x}, \quad \cos 2\theta = \frac{2a - 3x}{2a - x};$$

donc

$$y = \frac{R}{2}\sqrt{2} \arc\sin \frac{\sqrt{Rx - x^2}}{\frac{1}{2}R} + \sqrt{2}\sqrt{Rx - x^2}, \text{ etc.}$$

6me *Application* : à la logarithmique $s = a\,l\,x$. On a

$$\frac{dx}{ds} = \sin\theta = \frac{x}{a}, \quad x = a \sin\theta,$$

$$dx = a \cos\theta d\theta, \quad \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

$$dy = a\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}d\theta, \quad y = a(l\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta + \cos\theta) + C.$$

En appelant b l'ordonnée correspondante à $\theta = \frac{\pi}{2}$, on trouvera

$$C = b \quad \text{et} \quad y = a(l\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta + \cos\theta) + b,$$

d'où

$$y - b - a\cos\theta = a\,l\,\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta}.$$

En substituant pour $\sin\theta$, $\cos\theta$ leurs valeurs en x, et passant des logarithmes aux nombres, on trouvera définitivement

$$e^{\frac{y - b - \sqrt{a^2 - x^2}}{a}} = \frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Telle est l'équation de la courbe dont les arcs sont égaux respectivement aux ordonnées d'une logarithmique.

En partant de l'équation $s = e^{\frac{x}{a}}$, on aurait eu

$$\sin\theta = ae^{-\frac{x}{a}}, \quad x = a\,\mathrm{l}\frac{a}{\sin\theta}, \quad dx = -\frac{a\cos\theta d\theta}{\sin\theta},$$
$$dy = -a\cot^2\theta d\theta, \quad y = a(\theta + \cot\theta) + C.$$

En appelant b l'ordonnée correspondante à $\theta = \frac{\pi}{2}$, et posant

$$\frac{\pi}{2} - \theta = t,$$

on aura

$$y = a(\operatorname{tang} t - t) + b;$$

on a d'ailleurs

$$\operatorname{tang} t = \cot\theta = \frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a},$$

et par conséquent

$$b - y + \sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2} = a \operatorname{arc\,tang} \frac{\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a},$$

ou

$$\sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2} = a \operatorname{tang} \frac{b - y + \sqrt{e^{\frac{2x}{a}} - a^2}}{a}.$$

71. Il est facile, dans beaucoup de cas, de trouver les développantes des courbes que nous avons considérées dans ce qui précède. En effet, si l'on représente par ξ, η, ρ, σ les coordonnées, le rayon de courbure et l'arc d'une première courbe considérée comme développée; par x, y, r, s les coordonnées, le rayon de courbure et l'arc

de la développante, on a, d'après des formules connues de calcul différentiel,

$$\frac{\eta - y}{dx} = \frac{r}{d\sigma}, \quad \frac{\xi - x}{dy} = -\frac{r}{d\sigma}, \quad dr = d\sigma.$$

De plus, en appelant θ l'angle que la touchante à la développée fait avec l'axe des y, cette touchante étant normale à la développante, on aura

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \cot\theta = -\frac{dx}{dy};$$

et si l'on prend pour origine des coordonnées l'extrémité de l'arc s, on aura simplement

$$r = \sigma, \quad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{tang}\theta,$$
$$\frac{dx}{ds} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{ds} = -\sin\theta.$$

Les valeurs de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, jointes aux équations qui précèdent, conduisent immédiatement aux expressions

$$y = \eta - \sigma\cos\theta, \quad x = \xi - \sigma\sin\theta,$$

qui donneront y et x en fonction de θ, dès qu'on connaîtra ξ, η et σ. Il suffira ensuite d'éliminer θ entre les deux équations qui précèdent pour parvenir à l'équation cherchée de la développante.

1er *Exemple:* La développée est un point $\xi = a$, $\eta = b$. On pourra prendre $\sigma = \sqrt{a^2 + b^2}$, et l'on trouvera

$$y - b = -\sigma\cos\theta, \quad x - a = -\sigma\sin\theta.$$

L'équation de la développante sera dès lors

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2;$$

par conséquent cette développante sera un cercle passant

par l'origine des coordonnées. La développée d'un cercle est donc un point, ce qui est évident *à priori*.

2[me] *Exemple :* La développée est la courbe dont l'arc σ est donné par l'équation

$$\sigma^{m+n} = p^n \xi^m;$$

on trouvera

$$x = \frac{n}{m+n} q \sin^{\frac{m+n}{n}} \theta,$$

$$y = \frac{mq}{n} \int \sin^{\frac{m}{n}-1} \theta \cos^2 \theta d\theta - q \sin^{\frac{m}{n}} \theta \cos \theta;$$

$$dx = q \sin^{\frac{m}{n}} \theta \cos \theta d\theta, \quad dy = \sin^{\frac{m+n}{n}} \theta d\theta, \quad ds = q \sin^{\frac{m}{n}} \theta d\theta;$$

q, comme nous l'avons vu, est égal à $p\left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{n}}$.

Si $n = 1$, $\sigma^{m+1} = p\xi^m$, on aura

$$x = \frac{1}{m+1} q \sin^{m+1} \theta,$$

$$y = mq \int \sin^{m-1} \theta \cos^2 \theta d\theta - q \sin^m \theta \cos \theta,$$

$$s = q \int \sin^m \theta d\theta.$$

Si de plus $m = 0$, $s = p$, on trouvera

$$x = q \sin \theta, \quad y = -q \cos \theta, \quad s = q\theta, \quad x^2 + y^2 = q^2.$$

La développante est un cercle; $q = p\left(\frac{m}{m+1}\right)^m$ prend la forme indéterminée 0^0; mais, pour avoir sa véritable valeur, il suffit (*Calcul différentiel*, n° 25), en faisant

$$\left(\frac{m}{m+1}\right)^m = z^u, \quad z = \frac{m}{m+1}, \quad u = m,$$

de calculer la valeur de l'expression $e^{-\frac{s'u}{su}}$ correspondante à $m = 0$. On trouve de cette manière que la véritable valeur de q est égale à p.

Si au contraire on avait fait à la fois $n = 1$, $m = 1$, $\sigma^2 = p\xi$, la développée serait la cycloïde

$$\eta = \frac{p}{8}(2\theta + \sin 2\theta), \quad \xi = \frac{p}{8}(1 - \cos 2\theta),$$

on aurait

$$\sigma = \frac{p}{2}\sin\theta,$$

et la développante serait déterminée par les deux équations

$$y = \frac{p}{8}(2\theta - \sin 2\theta), \quad x = -\frac{p}{8}(1 - \cos 2\theta),$$

qui représentent évidemment une cycloïde égale à la première; la cycloïde est donc à elle-même sa développante, ce que l'on savait déjà.

Supposons encore $n = 1$, $m = 2$, $\sigma^2 = p\xi^2$; la développée a pour équation

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

et l'on aura

$$y = \frac{2}{3}q(1 - \cos^3\theta) - q\sin^2\theta\cos\theta, \quad x = -\tfrac{1}{3}q\sin^3\theta,$$

$$s = q\int \sin^2\theta d\theta = \frac{q}{4}(2\theta - \sin 2\theta).$$

3me *Exemple:* La développée est la courbe dont l'arc est lié à l'abscisse par l'équation d'une hyperbole

$$\frac{\xi^2}{a^2} - \frac{\sigma^2}{b^2} = 1,$$

et qui est déterminée par les équations

$$\xi = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\theta}}, \quad \eta = a^2 b^2 \int \frac{\cos^2\theta d\theta}{(a^2 - b^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\sigma = \frac{b^2 \sin^2\theta}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\theta}};$$

on trouvera pour la développante

$$y = a^2 b^2 \int \frac{\cos^2\theta d\theta}{(a^2 - b^2 \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{b^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\theta}},$$

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\theta}.$$

Pour connaître la forme de l'intégrale qui donne la valeur de y, différentions la première des deux équations qui précèdent, et posons, pour abréger,

$$\frac{b^2}{a^2} = c^2,$$

il vient ainsi

$$dy = \frac{b^2}{a} \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}},$$

$$y = a\left(\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}} - \int d\theta \sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}\right),$$

et en désignant, comme l'a fait Legendre, les fonctions elliptiques de première et de seconde espèce

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta}}, \quad \int d\theta \sqrt{1 - c^2 \sin^2\theta},$$

par les notations $F(c, \theta)$, $E(c, \theta)$, on aura définitivement

$$y = a[F(c, \theta) - E(c, \theta)];$$

on a d'ailleurs

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2\theta}.$$

L'ensemble de ces deux équations représentera la déve-

loppante de la courbe dont les arcs sont égaux aux ordonnées d'une hyperbole. Si $a = b$, l'hyperbole devenant équilatère, la développée donnée est la chaînette

$$\xi = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right),$$

on aura

$$F(c, \theta) = \int \frac{d\theta}{\cos\theta}, \quad E(c, \theta) = \int \cos\theta d\theta,$$

$$x = a\cos\theta, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a},$$

$$y = a\left[\frac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}\right) - \sin\theta\right],$$

$$y + a\sin\theta = a\,\mathrm{l}\frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta},$$

$$y + \sqrt{a^2 - x^2} = a\,\mathrm{l}\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}.$$

Telle est donc l'équation de la développante de la chaînette.

4me *Exemple :* Les arcs de la développée sont les coordonnées de la logarithmique $\sigma = e^{\frac{\xi}{a}}$; cette développée a, comme on l'a vu, pour équation

$$\sqrt{e^{\frac{2\xi}{a}} - a^2} = a\,\mathrm{tang}\,\frac{b - u + \sqrt{e^{\frac{2\xi}{a}} - a^2}}{a}:$$

on trouvera pour la développante

$$y = b - \frac{\pi\theta}{2} + a\theta, \quad x = a\,\mathrm{l}\frac{a}{\sin\theta} - a,$$

et en posant $\frac{\pi}{2} - \theta = \theta'$,

$$y = b + a\theta', \quad x = a\,\mathrm{l}\frac{a}{\cos\theta'} - a,$$

$$e^{\frac{x+a}{a}} = \frac{a}{\cos\theta'}, \quad \theta' = \frac{y-b}{a},$$

et enfin

$$e^{\frac{x+a}{a}} = \frac{a}{\cos\frac{y-b}{a}} = a\,\text{séc}\,\frac{y-b}{a}.$$

TREIZIÈME LEÇON.

Applications géométriques. Deuxième application à la quadrature des surfaces planes.

72. Considérons deux courbes planes dont les coordonnées correspondantes soient y, Y, puis un segment A compris entre ces deux courbes CM, cm, et deux lignes M_0m_0, Mm, ou $x=x_0$, $x=X$, perpendiculaires à l'axe des x, l'accroissement de ce segment

$$\Delta A = Mmm'M',$$

correspondant à l'accroissement Δx de la variable indépendante, est évidemment égal au produit de Δx par une valeur de la différence $Y - y$ moyenne entre la plus grande et la plus petite des valeurs que prend cette même différence dans l'intervalle Δx, moyenne qu'on pourra représenter par $Y - y + \varepsilon$, ε désignant une quantité très petite qui s'évanouira avec Δx : on aura donc

$$\Delta A = \Delta x (Y - y + \varepsilon), \qquad \frac{dA}{dx} = Y - y, \qquad dA = (Y - y) dx.$$

Si l'on substitue à Y et y leurs valeurs en x, cette expression prendra la forme $f(x)dx$, et en intégrant entre les limites x_0, X, on aura

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y) dx.$$

Si l'on avait compté les segments à partir d'une certaine droite fixe C_0c_0, on aurait trouvé, en appelant A_0 la valeur initiale $C_0c_0m_0M_0$ de ce segment, ou sa valeur correspondante à $x = x_0$, et A la valeur correspondante à $x = x$,

$$A - A_0 = \int_{x_0}^{x} (Y - y)dx.$$

Corollaire 1[er]. Pour calculer le segment compris entre la courbe CM et l'axe des x, il suffit, dans l'expression qui précède, de faire $y_0 = 0$; on trouve de cette manière

$$A = \int_{x_0}^{X} Y dx, \quad \text{ou} \quad A - A_0 = \int_{x_0}^{x} Y dx,$$

ou enfin, en comptant le segment à partir de $x = x_0$,

$$A_0 = 0, \quad A = \int_{x_0}^{x} Y dx.$$

Corollaire 2[me]. Pour un autre segment renfermé entre deux courbes dont les ordonnées seraient Y', y', on aurait

$$A' = \int_{x_0}^{X} (Y' - y')dx,$$

et si l'on a

$$Y' - y' = m(Y - y),$$

c'est-à-dire si les sections linéaires, faites dans les deux segments par des lignes perpendiculaires à l'axe des x, sont entre elles dans un rapport constant, on aura aussi

$$A' = m \int_{x_0}^{X} (Y - y)dx = mA,$$

et par conséquent les deux aires seront entre elles dans le même rapport. C'est ce qui arrivera, par exemple, si l'équation d'une des courbes étant $f(x, y) = 0$, l'équa-

tion de l'autre est

$$f\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0.$$

Si en effet de la première équation on tire

$$Y = \varphi(x), \quad y = \chi(x),$$

on tirera de la seconde

$$Y' = b\varphi(x), \quad y' = b\chi(x),$$

et par suite

$$Y' - y' = b(Y - y):$$

on aura donc, dans ce cas,

$$A' = bA.$$

Si Y et y, Y' et y' sont respectivement les deux branches inférieures et supérieures de deux courbes fermées, A et A' seront les aires de ces courbes.

En raisonnant comme on vient de le faire, mais échangeant l'une contre l'autre les deux ordonnées x, y, on prouverait que les aires des courbes fermées représentées par les équations

$$f(x, y) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, y\right) = 0,$$

ou par les équations

$$f\left(x, \frac{y}{b}\right) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0,$$

sont entre elles dans le rapport de l'unité à la constante a, et l'on en conclurait que les aires des deux courbes fermées $f(x, y) = 0$, $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0$, sont entre elles dans le rapport de l'unité au produit ab. De sorte que pour déterminer l'aire d'une courbe plane fermée de toutes parts

et représentée par une équation de la forme

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right),$$

il suffit de mesurer l'aire de la courbe dont l'équation serait $f(x, y) = 0$, et de multiplier cette dernière par le produit ab.

Lorsque dans l'équation $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right) = 0$, on suppose $b = a$, cette équation, réduite à la forme

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = 0,$$

représente une courbe semblable à la courbe $f(x, y) = 0$, et dont les dimensions sont à celles de cette seconde courbe comme le nombre a est à l'unité. Cela posé, il résulte de ce qui précède que les aires comprises dans deux courbes semblables sont entre elles comme les carrés des dimensions des deux courbes.

Corollaire 3[me]. Comme on a

$$A = \int_{x_0}^{x} (Y - y)dx = (x - x_0)D,$$

$$A' = \int_{x_0}^{x} (Y' - y') = (x - x_0)D',$$

D et D' étant des valeurs moyennes des différences $Y - y$, $Y' - y'$, on en conclura $\frac{A}{A'} = \frac{D}{D'}$, c'est-à-dire que le rapport de deux surfaces planes est toujours une quantité moyenne entre les diverses valeurs que peut acquérir le rapport des sections linéaires faites dans ces deux surfaces par des plans perpendiculaires à l'axe des x, qui peut être d'ailleurs une droite quelconque menée dans le plan de la courbe.

Enfin l'équation

$$A = (x - x_0)D$$

donne

$$\frac{A}{x - x_0} = D,$$

ce qui prouve que le rapport d'une surface plane à sa projection sur un axe quelconque tracé dans le plan qui la renferme, est toujours une moyenne entre les diverses longueurs qui représentent les sections faites dans cette surface par des plans perpendiculaires à l'axe dont il s'agit.

73. *Applications.* 1°. Le cercle $x^2 + y^2 = r^2$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$; posons

$$\sqrt{r^2 - x^2} = tx,$$

on aura

$$x^2 = \frac{r^2}{t^2 + 1};$$

d'où

$$\sqrt{r^2 - x^2} = \int txdx = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}\int x^2dt = \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}r^2\int\frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \tfrac{1}{2}tx^2 - \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc tang } t + C = \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc tang } \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x} + C.$$

Si maintenant, pour plus de simplicité, on fait $x_0 = 0$, il viendra

$$A = \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} - \tfrac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tang}\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}x\sqrt{r^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc tang } \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

ou

$$A = \tfrac{1}{2}xy + \tfrac{1}{2}r^2 \text{ arc tang } \frac{x}{y}.$$

Il serait facile de vérifier directement cette équation en remarquant que le segment se compose d'un triangle et d'un secteur. Si l'on suppose $x = r$ et $y = 0$, on aura pour l'aire du cercle, πr^2.

2°. L'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; on aura

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x}\sqrt{a^2 - x^2},$$

et en supposant

$$x_0 = 0, \quad A = \frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}ab \operatorname{arc tang}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

ou

$$u = \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}ab \operatorname{arc tang}\frac{bx}{ay},$$

la surface de l'ellipse entière est πab.

3°. L'hyperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ou $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$,

$$A = \frac{b}{a}\int_{x_0}^{x} dx\sqrt{x^2 \mp a^2};$$

posons

$$\sqrt{x^2 \mp a^2} = tx,$$

on en tirera

$$x^2 = \pm\frac{a^2}{1 - t^2},$$

$$\int dx\sqrt{x^2 \mp a^2} = \int txdx = \frac{1}{2}tx^2 - \frac{1}{2}\int x^2 dt = \frac{1}{2}tx^2 \mp a^2\int\frac{dt}{1 - t^2}$$

$$= \frac{1}{2}tx^2 - \frac{a^2}{8}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+t}{1-t}\right)^2 + C = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \mp a^2} - \frac{1}{4}a^2\,\mathrm{l}\left(\frac{x+\sqrt{x^2 \mp a^2}}{x-\sqrt{x^2 \mp a^2}}\right).$$

Pour l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, on aura, en prenant $x_0=0$,

$$A=\frac{1}{2}\frac{b}{a}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{1}{4}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$A=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{4}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}}{\frac{x}{a}-\frac{y}{b}}\right)=\frac{1}{2}xy-\frac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

Telle est la valeur de l'aire comprise entre l'axe des abscisses, l'ordonnée y et l'arc d'hyperbole qui joint le sommet au point (x,y). Si l'on retranche cette aire de la surface $\frac{1}{2}xy$ du triangle rectangle construit avec les ordonnées x,y, le reste $\frac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)$ ou $\frac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\frac{1}{\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)}$ représentera le secteur hyperbolique compris entre l'axe des x, l'arc de l'hyperbole et le rayon mené du centre au point (x, y). Si ce dernier point s'éloigne à l'infini, la surface du secteur devient elle-même infinie. En désignant par ξ, η les coordonnées de l'asymptote qui s'approche indéfiniment de l'hyperbole prolongée du côté des x et des y positives, on aura

$$\frac{\eta}{b}=\frac{\xi}{a},$$

et en supposant $\eta=y$, $\frac{y}{b}=\frac{\xi}{a}$, $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{x-\xi}{a}$, l'aire du secteur hyperbolique sera

$$\frac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{a}{x-\xi}\right)=-\frac{1}{2}ab\,\mathrm{l}\left(\frac{x-\xi}{a}\right).$$

Si l'hyperbole était équilatère, on aurait $b=a$, et

l'aire du secteur serait

$$\tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{l}\left(\frac{x+y}{a}\right).$$

Si la même hyperbole était rapportée, non plus à ses axes, mais à ses asymptotes, son équation deviendrait

$$xy = \tfrac{1}{2}a^2,$$

et l'on trouverait

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{2}a^2 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \tfrac{1}{2}a^2\,\mathrm{l}\left(\frac{x}{x_0}\right).$$

L'aire du segment ou du secteur hyperbolique est donc exprimée à l'aide des logarithmes pris dans le système dont la base est le nombre $e = 2{,}71828\ldots$ et que l'on a désigné pour cela sous le nom de logarithmes hyperboliques.

4°. La parabole $y^2 = 2px$: en supposant, pour abréger, $x_0 = 0$, on trouvera

$$\mathrm{A} = \tfrac{2}{3}(2p)^{\frac{1}{2}}\,x^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3}\,xy,$$

de sorte que l'aire comprise entre l'axe de la parabole, un arc de cette courbe qui a le sommet pour origine et une ordonnée perpendiculaire à l'axe, est égal aux deux tiers de la surface du rectangle circonscrit.

5°. La courbe $y = \mathrm{A}x^a$: on trouve, en prenant $x_0 = 0$,

$$\mathrm{A} = \frac{xy}{a+1}.$$

6°. La logarithmique $y = a\,\mathrm{l}\,x$: a désignant une constante positive, l'on aura, en supposant $x_0 = 1$, $x > 1$,

$$\mathrm{A} = a\int_1^x \mathrm{l}x\,dx;$$

en intégrant par parties, on trouve

$$\int dx\,\mathrm{l}x = x\,\mathrm{l}x - \int dx = x\,\mathrm{l}x - x + C,$$

et par suite

$$A = a(x\,l\,x - x + 1).$$

On verra que l'aire comprise entre le demi-axe des y négatives, la partie de la logarithmique qui a ce demi-axe pour asymptote, et l'axe des x est égale à a et n'est par conséquent pas infinie.

7°. La chaînette $y = a\,\dfrac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$. On aura, pour la surface comprise entre l'axe des x, la chaînette et les deux ordonnées a et y correspondantes à $x = 0$ et $x = x$,

$$A = a^2\,\frac{e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}}{2} = aS,$$

S étant l'arc de la courbe, comprise entre le point le plus bas et le point (x, y).

8°. La cycloïde, représentée par les équations

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega),$$

on aura, en désignant par ω_0 la valeur de ω correspondante à $x = x_0$, et comptant les aires à partir de x_0,

$$A = \int_{x_0}^{x} y\,dx = \int_{\omega_0}^{\omega} y^2 d\omega = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^2 d\omega$$
$$= R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega)\,d\omega,$$

ou parce que

$$\cos^2\omega = \frac{1 + \cos 2\omega}{2}, \qquad A = R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} \left(\tfrac{3}{2} - 2\cos\omega + \tfrac{1}{2}\cos 2\omega\right) d\omega,$$

et en faisant $x_0 = 0$, $\omega_0 = 0$,

$$A = R^2\left(\tfrac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \tfrac{1}{4}\sin 2\omega\right).$$

Pour avoir l'aire comprise dans une branche entière de

cycloïde, il faut poser $\omega = 2\pi$, on trouve alors

$$A = 3\pi R^2.$$

Cette aire est donc équivalente au triple de la surface du cercle générateur.

9°. On demande l'aire comprise dans la courbe fermée $x^{2m} + y^{2m} = 1$; reprenons l'équation

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y_0)dx,$$

il faudra prendre

$$Y = (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}, \quad y_0 = -(1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}}, \quad x_0 = -1, \quad X = 1;$$

on aura donc

$$A = 2\int_{-1}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}} dx = 4\int_{0}^{1} (1 - x^{2m})^{\frac{1}{2m}} dx;$$

si $m = 1$, il vient $A = \pi$, ce qui devait être.

10°. On demande l'aire comprise dans l'intérieur de la courbe

$$x^{\frac{2m}{2n+1}} + y^{\frac{2m}{2n+1}} = 1,$$

on aura

$$A = 2\int_{-1}^{+1} \left(1 - x^{\frac{2m}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2m}} dx = 4\int_{0}^{1} \left(1 - x^{\frac{2m}{2n+1}}\right)^{\frac{2n+1}{2m}} dx;$$

considérons le cas où $m = 1$, et faisons

$$x = \sin^{2n+1}\varphi,$$

il viendra

$$A = 4(2n+1)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\varphi \sin^{2n}\varphi d\varphi = (8n+4)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2}\varphi (1 - \cos^2\varphi)^n d\varphi.$$

puis en développant $(1 - \cos^2\varphi)^n$ et intégrant,

$$2+2)\pi\left[\frac{1.3.5\ldots(2n+1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}-\frac{n}{1}\frac{1.3.5\ldots(2n+3)}{2.4.6\ldots(2n+4)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1.3.5\ldots(2n+5)}{2.4.6\ldots(2n+6)}+\text{etc.}\right].$$

Si l'on suppose à la fois $m = 1$, $n = 1$, l'équation de la courbe se réduit à $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, et l'on a

$$A = 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^4\varphi - \cos^6\varphi)\,d\varphi = 6\pi\left(\frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\right) = \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\pi = \frac{3}{8}\pi,$$

et en ayant égard au deuxième corollaire (n° 72), on en conclurait que l'aire de la développée de l'ellipse, représentée par l'équation

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

dans laquelle

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad B = \frac{a^2 - b^2}{b},$$

a étant le grand axe, et b le petit axe de l'ellipse, a pour mesure

$$\frac{3}{8}\pi AB = \frac{3}{8}\pi\frac{(a^2 - b^2)^2}{ab}.$$



QUATORZIÈME LEÇON.

Applications géométriques. — Troisième application à la quadrature des surfaces courbes.

---

74. *Lemme*. Si l'on projette sur un plan un élément a de surface courbe dont les deux dimensions sont très petites, et si l'on prolonge, quand il sera nécessaire, les arêtes du cylindre projetant jusqu'à ce qu'elles rencontrent le plan tangent mené à l'élément a par un de ces points, le rapport de l'élément a à la petite aire a' ainsi déterminée sur le plan tangent, aura pour limite l'unité; de sorte que la projection a'' de l'élément a sera sensiblement égale à $a \cos\tau \times (1 + i) = a(\cos\tau + \varepsilon)$, τ étant l'angle que forme le plan tangent avec le plan de projection, et i, ε, des quantités très petites.

Démonstration. Par le point de contact C du plan tangent avec l'élément a, je fais passer un troisième plan, il coupera les aires a et a', suivant deux lignes AB, A'B' qui seront deux dimensions correspondantes mais quelconques de ces aires; or, de ce que nous avons dit sur un arc de courbe, on conclura facilement que le rapport de l'arc AB à la portion de tangente A'B' a pour limite l'unité. D'ailleurs deux surfaces dont les dimensions correspondantes sont sensiblement égales, ne peuvent différer elles-mêmes que de quantités très petites; donc l'aire a de la surface courbe est sensiblement égale à la portion a' du plan tangent, et l'on aura

$$a' = a(1+i),\ \lim \frac{a}{a'} = 1;$$

si maintenant on appelle a'' la projection commune des aires a, a', et τ l'angle du plan tangent avec le plan de projection, on aura

$$a'' = a' \cos\tau = a \cos\tau \times (1+i) = a(\cos\tau + i),\ \lim \frac{a}{a''} = \frac{1}{\cos\tau}.$$

75. Considérons maintenant une portion d'aire curviligne située sur la surface $z = F(x, y)$ et terminée d'une part par deux plans AB, DC ou $x = x_0$, $x = X$, et de l'autre par deux portions de cylindres AD, BC dont les équations soient

$$y = \varphi(x), \quad Y = \chi(x),$$

et proposons-nous de déterminer cette aire qui sera évidemment une certaine fonction de x.

Pour cela coupons l'aire dont il s'agit par deux plans perpendiculaires à l'axe des x et séparés par un intervalle infiniment petit Δx ou dx. Ces plans détermineront une bande $abcd$ qui sera l'accroissement ΔA de l'aire ABCD correspondant à Δx, accroissement dont on pourra déduire la différentielle

$$dA = \psi(x)\,dx$$

de l'aire A, et par suite cette aire elle-même,

$$A = \int_{x_0}^{X} \psi(x)\,dx.$$

Reste à évaluer la fonction $\psi(x)$ ou la différentielle $\psi(x)\,dx$, au moyen des données de la question. Pour cela partageons la bande $abcd = B$ en éléments infiniment petits dans deux dimensions, par des plans perpendiculaires à l'axe des y et séparés l'un de l'autre par un intervalle $\Delta y = dy$: l'élément $mnpq$ qui a pour projection $m'n'p'q' = \Delta x\,\Delta y$ est l'accroissement $\Delta_y B$ de

la bande B correspondant à l'accroissement Δy. On a d'ailleurs, en vertu du lemme déjà démontré, et en désignant par τ l'angle du plan tangent avec le plan $\overline{xy}$,

$$mnpq = \Delta_y \mathrm{B} = \frac{m'n'p'q'}{\cos\tau + \epsilon} = \frac{\Delta x \Delta y}{\cos\tau + \epsilon},$$

donc

$$\frac{\Delta_y \mathrm{B}}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{\cos\tau + \epsilon} = \frac{dx}{\cos\tau + \epsilon},$$

$$\mathrm{D}_y \mathrm{B} = \frac{d\mathrm{B}}{dy} = \frac{dx}{\cos\tau}, \quad \mathrm{B} = dx \int_{y_1}^{\mathrm{Y}} \frac{dy}{\cos\tau},$$

et par conséquent

$$\mathrm{A} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} dx \int_{y}^{\mathrm{Y}} \frac{dy}{\cos\tau} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{y}^{\mathrm{Y}} \frac{dx dy}{\cos\tau} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{y}^{\mathrm{Y}} \text{séc}\,\tau\, dy dx.$$

τ ou l'angle du plan tangent avec le plan $\overline{xy}$ est en même temps l'angle de la normale à la surface avec l'axe des z; on aura donc, en posant $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$,

$$\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad \text{séc}\,\tau = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}.$$

Si l'équation de la surface avait été donnée sous la forme

$$u = \mathrm{F}(x, y, z) = 0,$$

on aurait eu

$$\cos\tau = \frac{\frac{du}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}},$$

on aura donc, en substituant,

$$\mathrm{A} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \int_{y}^{\mathrm{Y}} dx dy \sqrt{p^2 + q^2 + 1},$$

ou

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} dx dy \frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}{\frac{du}{dz}}.$$

Au moyen de l'équation de la surface qui donnera z en fonction de x, y, on ramènera $\sqrt{p^2 + q^2 + 1}$, ou

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}{\frac{du}{dz}},$$

à la forme $F(x, y)$; une première intégration faite par rapport à y entre les limites $y = \varphi(x)$, $Y = \chi(x)$, donnera

$$\int_{y}^{Y} F(x, y) dx = F(x),$$

et l'aire curviligne cherchée sera enfin exprimée par l'intégrale $\int_{x_0}^{X} F(x) dx$.

76. On peut encore démontrer, comme il suit, et plus rigoureusement peut-être, la formule fondamentale

$$A = \int_{x_0}^{x} \int_{y}^{Y} \text{séc}\,\tau\, dx\, dy.$$

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'évaluer la portion de surface courbe comprise entre les quatre plans $x = x_0$, $x = x, y = y_0, y = y$. Cette aire A sera une fonction de x et de y et l'on peut poser

$$A = \varphi(x, y);$$

elle a de plus, pour projection sur le plan xy, le rectangle $(x - x_0)(y - y_0)$, et comme elle devra s'évanouir en même temps que sa projection, c'est-à-dire pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que

soit x, on aura

$$\varphi(x_0, y) = 0, \quad \varphi(x, y_0) = 0.$$

Enfin l'élément ou l'accroissement $\Delta_y \Delta_x \varphi(x, y)$ correspondant à des accroissements très petits Δx, Δy, aura pour projection sur le plan $\overline{xy}$, le rectangle $\Delta x \Delta y$, et l'on aura, en appelant τ l'inclinaison du plan tangent en un point de l'élément,

$$\Delta y \Delta x = (\cos\tau + \iota)\, \Delta_y \Delta_x \varphi(x, y);$$

on en conclut

$$\frac{\Delta_y \dfrac{\Delta_x \varphi(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y} = \frac{1}{\cos\tau + \iota},$$

puis en faisant décroître indéfiniment la valeur de Δy,

$$\frac{d}{dy} \frac{\Delta_x \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\cos\tau + \iota'},$$

et en faisant aussi $\Delta x = 0$,

$$\frac{d^2 \varphi(x, y)}{dy\,dx} = \frac{1}{\cos\tau},$$

ou

$$\frac{d}{dy} \frac{d\varphi(x, y)}{dx} = \text{séc}\,\tau.$$

En intégrant l'équation $\frac{d}{dy} \frac{\Delta_x \varphi(x, y)}{\Delta x} = \frac{1}{\cos\tau + \iota'}$ entre les limites y, Y, on aurait

$$\Delta_x \varphi(x, Y) = \Delta x \int_{y_0}^{Y} \frac{1}{\cos\tau + \iota'}\, dy$$

pour la valeur de l'aire qui a pour projection sur le plan $\overline{xy}$ le rectangle déterminé par les quatre lignes $x = x$. $X = x + \Delta x$, $y = y$, $y = Y$.

Multiplions par dy l'équation $\frac{d}{dy}\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \text{séc}\,\tau$, et intégrons à partir de y_0, il viendra

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} - \frac{d\varphi(x,y_0)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\varphi(x,y) - \varphi(x,y_0)\right] = \int_{y_0}^{y} \text{séc}\,\tau\,dy;$$

mais $\varphi(x,y_0) = 0$, donc

$$\frac{d\varphi(x,y)}{dx} = \int_{y_0}^{y} \text{séc}\,\tau\,dy:$$

par suite

$$\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y) = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \text{séc}\,\tau\,dy\,dx;$$

et enfin, puisque $\varphi(x_0,y) = 0$,

$$\varphi(x,y) = \text{A} = \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \text{séc}\,\tau\,dx\,dy.$$

Concevons maintenant que l'aire à évaluer soit comprise entre deux plans $x = x_0$, $x = x$, et deux surfaces cylindriques $y = \varphi(x)$, $Y = \chi(x)$, elle sera une certaine fonction de l'abscisse x et l'on pourra poser

$$\text{A} = f(x):$$

l'accroissement de cette aire $\Delta f(x)$ correspondant à Δx sera une petite surface dont la projection sur le plan xy est renfermée entre deux plans $x = x$, $x = x + \Delta x$, et deux petites portions de lignes courbes appartenant aux courbes $y = \varphi(x)$, $Y = \chi(x)$. Cette projection est comprise entre deux rectangles, l'un inscrit, l'autre circonscrit, correspondant à la plus petite et à la plus grande des valeurs de la différence $Y - y$ entre les limites x et $x + \Delta x$; la plus grande et la plus petite valeur de la différence $Y - y$, seront d'ailleurs deux quantités de la forme

$$[\chi(x + \theta\Delta x) - \varphi(x + \theta'\Delta x)],$$

θ et θ' désignant deux nombres plus petits que l'unité. Les rectangles inscrit et circonscrit seront les projections de deux nouvelles aires dont l'une est inférieure, l'autre supérieure à l'aire $\Delta f(x)$. De plus, chacune de ces nouvelles aires étant comprise entre quatre plans

$$x = x, \quad X = x + \Delta x, \quad y_0 = \chi(x + \theta\Delta x), \quad y = \varphi(x + \theta'\Delta x),$$

sera mesurée, en vertu de ce qui précède, par une expression de la forme

$$\Delta x \int_y^Y \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon} = \Delta x \int_{\varphi(x+\theta'\Delta x)}^{\chi(x+\theta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon};$$

il en sera donc aussi de même de l'aire $\Delta f(x)$, et l'on aura

$$\Delta f(x) = \Delta x \int_{\varphi(x+\theta'\Delta x)}^{\chi(x+\theta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon},$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \int_{\varphi(x+\theta'\Delta x)}^{\chi(x+\theta\Delta x)} \frac{dy}{\cos\tau + \varepsilon},$$

et en passant à la limite

$$\frac{df(x)}{dx} = \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} \frac{dy}{\cos\tau},$$

on en tirera, en intégrant à partir de x_0, et remarquant que l'aire $f(x)$ s'évanouit quand on y fait $x = x_0$,

$$f(x) = \mathrm{A} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{\varphi(x)}^{\chi(x)} \frac{dy}{\cos\tau} = \int_{x_0}^{x} \int_{y}^{Y} \frac{dxdy}{\cos\tau},$$

ce qu'il fallait démontrer.

77. *Corollaire* 1[er]. On a

$$\int_y^Y \text{séc}\,\tau\, dy = (Y - y)\,\text{séc}\, t,$$

t désignant une quantité moyenne entre les diverses valeurs que reçoit l'angle τ, tandis que y varie entre les li-

mites y, Y, on aura donc

$$A = \int_{x_0}^{X} (Y - y)\,\text{séc}\,t\,dx = \text{séc}\,T \int_{x_0}^{X} (Y - y)\,dx = P\,\text{séc}\,T.$$

P désignant la projection $\int_{x_0}^{X} (Y - y)dx$ de la surface courbe A sur le plan $\overline{xy}$; T une moyenne, entre les diverses valeurs de t, qui correspondent aux diverses valeurs de x, et par conséquent une moyenne entre les diverses inclinaisons de la surface A par rapport au plan $\overline{xy}$. Comme ce plan $\overline{xy}$ est d'ailleurs quelconque, il s'ensuit que le rapport entre une surface courbe et sa projection sur un plan quelconque, est une moyenne entre les sécantes des diverses inclinaisons de la surface, par rapport au plan dont il s'agit.

Corollaire 2me. Si l'inclinaison τ devient constante et égale à T, on aura

$$A = \text{séc}\,T \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} dxdy = P\,\text{séc}\,\tau,$$

et l'on en conclut que lorsqu'une surface a dans tous ses points la même inclinaison par rapport au plan $\overline{xy}$, une aire, mesurée sur cette surface, est équivalente au produit de sa projection sur le plan $\overline{xy}$ par la sécante de l'inclinaison.

Cette proposition permet de calculer directement l'aire de certaines surfaces courbes. Supposons, par exemple, qu'on veuille calculer la surface d'un tronc de cône droit, qui a pour base des cercles dont les rayons sont R et r, on a

$$P = \pi(R^2 - r^2), \quad A = \pi(R + r)(R - r)\,\text{séc}\,\tau.$$

Or, si l'on désigne par l l'apothème du tronc de cône,

on a

$$\text{R} - r = \text{l} \cos\tau, \quad \frac{\text{R} - r}{\cos\tau} = (\text{R} - r)\,\text{séc}\,\tau = \text{l},$$

donc

$$\text{A} = \frac{2\pi\text{R} + 2\pi r}{2}\,\text{l},$$

la surface d'un tronc de cône droit est donc égale au produit de son apothème par la demi-somme des circonférences des bases.

78. Lorsque l'équation de la surface se réduit à $z=f(x)$. c'est-à-dire lorsque la surface devient un cylindre dont la génératrice est parallèle à l'axe des y, on a

$$\frac{dz}{dy} = q = 0, \quad \frac{dz}{dx} = f'(x),$$

$$\text{A} = \int_{x_0}^{\text{X}} \int_{y}^{Y} dx dy \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

$$\text{A} = \int_{x_0}^{\text{X}} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \int_{y}^{Y} dy$$

$$= \int_{x_0}^{\text{X}} dx (Y - y) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \int_{x_0}^{\text{X}} (Y - y)\,\text{séc}\,\tau\, dx.$$

Alors si l'on veut calculer l'aire comprise entre deux génératrices et deux courbes planes parallèles à la base, il faudra supposer que Y et y sont deux quantités constantes dont la différence est la distance D des deux plans ou l'épaisseur de la tranche cylindrique; donc

$$\text{A} = \text{D} \int_{x_0}^{\text{X}} \text{séc}\,\tau\, dx.$$

Mais dans le même cas, τ ou l'inclinaison de la surface par rapport au plan $\overline{xy}$, est aussi l'inclinaison par rapport à l'axe des x de la courbe qui sert de base au cylindre dans le plan $\overline{zx}$, et par conséquent l'intégrale

$\int_{x_0}^{X}$ sécτdx représente évidemment l'arc s compté sur cette courbe entre les génératrices données: il en résulte que l'aire d'une portion de surface cylindrique comprise entre deux génératrices et deux courbes renfermées dans deux plans parallèles à la base, est égale au produit de la distance de ces deux plans par l'arc compris sur l'une des courbes entre les deux génératrices, et par conséquent l'aire d'une surface cylindrique droite est égale au produit de la hauteur par le périmètre de sa base.

Comme exemple de calcul on peut déterminer la portion de surface du cylindre $x^2 - Rx + z^2 = 0$, renfermée dans la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, la portion de la surface cherchée est terminée sur le plan $\overline{xy}$, par la parabole $y^2 = R(R - x)$, projection sur ce plan de l'intersection du cylindre et de la sphère; on aura par conséquent

$$y = -\sqrt{R(R-x)},\quad Y = \sqrt{R(R-x)};$$

on a de plus

$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \sqrt{p^2 + 1} = \sqrt{1 + \frac{(\frac{1}{2}R - x)^2}{Rx - x^2}} = \frac{\frac{1}{2}R}{\sqrt{Rx - x^2}}.$$

Les limites x_0, X seront d'ailleurs $x_0 = 0$, $X = R$; on aura donc, pour l'aire mesurée du côté des z positives, en remarquant que sécτ ne dépend que de x,

$$A = \int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y} \text{séc}\,\tau\, dy dx = \int_0^R \text{séc}\,\tau\, dx(Y - y) = \int_0^R R^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2R^2,$$

et pour la surface totale interceptée par la sphère

$$A = 4R^2.$$

Si l'on cherchait la portion de la surface de la sphère

comprise dans l'intérieur du cylindre du côté des y positives et du côté des z positives, on trouverait

$$x_0 = 0,\quad X = R,\quad y = \sqrt{R(R-x)},\quad Y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$\text{séc}\,\tau = \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} = \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$A = R\int_0^R \int_{\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx\,dy \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}};$$

on a d'ailleurs

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + C,$$

$$\int_{\sqrt{R^2-Rx}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{\frac{R}{R+x}} = \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}}.$$

donc

$$A = R\int_0^R dx \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}}.$$

Posons

$$u = \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}},\quad x = R\,\text{tang}^2 u,$$

il vient

$$\int dx \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}} = \int u\,dx = ux - \int x\,du = ux - R\int\left(\frac{1}{\cos^2 u} - 1\right)du$$
$$= (x+R)u - R\,\text{tang}\,u + C,$$

et par suite

$$A = R\int_0^R dx \arccos\sqrt{\frac{R}{R+x}} = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)R^2.$$

En doublant cette dernière quantité, on obtiendra la portion de la surface sphérique interceptée par le cylindre du côté des y positives, et correspondante à des valeurs

soit positives, soit négatives de l'ordonnée z. En désignant cette portion par A, l'on aura

$$A = (\pi - 2)R^2 = (1,14159\ldots)R^2.$$

79. Concevons qu'après avoir tracé dans le plan $\overline{xy}$ une courbe représentée par l'équation $y = f(x)$, on fasse tourner cette courbe autour de l'axe des x, elle engendrera une surface de révolution dont l'équation sera

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2,$$

et la portion de cette surface située du côté des z positives entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x, sera donnée par l'équation

$$A = \int_{x_0}^{X} \int_{-f(x)}^{f(x)} \sec\tau\, dy\, dx,$$

pourvu que la fonction $f(x)$ ne change pas de signe entre les limites x_0, X. Comme on a

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{f(x)f'(x)}{z}, \quad q = \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z},$$

on aura

$$\sec\tau = \sqrt{1 + \left[\frac{f(x)f'(x)}{z}\right]^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2} = \pm\frac{f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

$$A = \int_{x_0}^{X} f(x)dx\sqrt{1 + [f'(x)]^2} \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}};$$

or

1°. $$\int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}} = \pi;$$

2°. La valeur numérique du produit

$$f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = y\sqrt{1 + y'^2}$$

est précisément la normale N à la courbe génératrice : on aura donc

$$A = \pi \int_{x_0}^{X} N dx,$$

et l'aire totale de la surface de révolution sera donnée par l'équation

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} N dx.$$

80. On peut arriver d'une manière directe à une formule importante qui comprend la précédente comme cas particulier. Appelons B l'aire mesurée sur la surface de révolution entre deux plans fixes qui, passant par l'axe des x, comprennent entre eux un angle α et deux plans $x = x_0$, $x = x$ perpendiculaires à cet axe; puis désignons par τ l'inclinaison de la génératrice au point (x, y, z); si l'on attribue à x l'accroissement Δx, $\Delta_x B$ sera une petite portion de surface dont l'inclinaison par rapport au plan $\overline{yz}$ restera sensiblement la même en tous ses points et différera très-peu de $\frac{\pi}{2} - \tau$. Donc, en vertu d'un théorème ci-dessus démontré, on aura, en appelant P la projection de $\Delta_x B$ sur le plan $\overline{yz}$,

$$\frac{\Delta_x B}{P} = \text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) + \iota;$$

mais P est la différence entre deux secteurs dont les rayons y et $y + \Delta y$ comprennent entre eux un angle α, on aura donc

$$P = \frac{\alpha}{2}[(y + \Delta y)^2 - y^2] = \alpha y \Delta y \left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right),$$

et par suite

$$\frac{\Delta_x B}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \alpha y \left[\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) + \iota\right]\left(1 + \frac{\Delta y}{2y}\right),$$

et en passant à la limite

$$\frac{dB}{dx} = \frac{dy}{dx}\alpha y \,\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right),$$

mais

$$\frac{dy}{dx}\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = \pm \text{tang}\,\tau\,\text{séc}\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) = \frac{\text{tang}\,\tau}{\sin\tau} = \frac{1}{\cos\tau} = \text{séc}\,\tau,$$

et d'ailleurs le produit $\pm y$ séc τ est égal, en valeur absolue, à la normale N de la génératrice ; on trouvera donc

$$\frac{dB}{dx} = N\alpha, \quad B = \int_{x_0}^{X} N\alpha dx = \alpha \int_{x_0}^{X} N dx....$$

Si on veut l'aire engendrée par la révolution complète de l'arc de la génératrice compris entre les limites x_0, X, il faudra supposer $\alpha = 2\pi$; on aura ainsi

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} N dx,$$

ou, ce qui revient au même,

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{X} y \,\text{séc}\,\tau dx = 2\pi \int_{x_0}^{X} y\sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Exemple : 1° La courbe génératrice est une droite parallèle à l'axe des x, et située à une distance R de cet axe; on aura

$$N = R, \quad A = 2\pi R(X - x_0):$$

la surface latérale d'un cylindre droit à base circulaire, est le produit de la hauteur du cylindre par la circonférence de sa base.

2°. La génératrice est un cercle dont le rayon est R, et dont le centre est situé sur l'axe des x : on a

$$N = R, \quad A = 2\pi R(X - x_0):$$

la surface de la zone sphérique est donc égale au produit de sa hauteur par la circonférence d'un grand cercle. En prenant $X - x_0 = 2R$ pour avoir la surface de la sphère. on trouvera qu'elle équivaut à quatre fois la surface du grand cercle.

3°. La génératrice est une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

la surface engendrée est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1;$$

en supposant $a > b$ et posant $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, on a

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - e^2x^2},$$

$$A = 2\pi\,\frac{be}{a}\int_{x_0}^{X}\sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}:$$

or si l'on pose $\frac{a}{e} = a'$, il viendra

$$A = \pi \times \frac{2b}{a'}\int_{x_0}^{X} dx\sqrt{a'^2 - x^2}.$$

$\frac{2b}{a'}\int_{x_0}^{X} dx\sqrt{a'^2 - x^2}$ est l'aire correspondante aux abscisses x_0, X, dans l'ellipse qui aurait pour équation

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc si l'on fait tourner une ellipse autour de son grand axe, la surface de la zone, engendrée par la révolution d'un arc de cette ellipse, sera le produit du nombre π par la surface comprise entre les plans qui renfermeront les deux bases de la zone dans une seconde ellipse que l'on

déduira de la première en faisant croître le grand axe dans le rapport de 1 à $\frac{1}{e}$, e étant l'excentricité : on trouvera, par ce moyen, que l'aire totale de l'ellipsoïde de révolution est donnée par l'équation

$$A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \text{arc tang} \frac{ae}{b}.$$

Si l'on supposait $a < b$, ou si l'ellipse tournait autour de son petit axe, on aurait, en posant $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, et par suite $N = \frac{b^2 e}{a^2}\sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2}$,

$$A = 2\pi \frac{b^2 e}{a^2}\int_{x_0}^{X} dx \sqrt{\frac{a^4}{b^2 e^2} + x^2} = \pi A',$$

A' étant (n° 73) l'aire comprise entre les plans $x = x_0$, $x = X$, dans l'hyperbole $\frac{y^2}{b^2} - \frac{b^2 e^2 x^2}{a^4} = 1$, et l'on aura par conséquent, pour l'aire totale de ce second ellipsoïde de révolution,

$$A = 2\pi b^2 + \frac{\pi a^2}{e}\, l\left(\frac{1 + e}{1 - e}\right).$$

4°. La génératrice est une hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1;$$

les surfaces engendrées auront pour équations

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{y^2 + z^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1,$$

et représenteront un hyperboloïde de révolution à deux nappes distinctes ou à une seule nappe. En posant

$$ae = \sqrt{a^2 + b^2},$$

on trouvera

$$\mathrm{N}=\frac{b}{a}\sqrt{e^2x^2\mp a^2},\quad \mathrm{A}=2\pi\frac{be}{a}\int_{x_0}^{\mathrm{X}}dx\sqrt{x^2\mp\frac{a^2}{e^2}}=\pi\mathrm{A}',$$

A′ désignant la surface comprise entre les plans $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$, dans les hyperboles que l'on déduit des premières, en faisant décroître l'axe réel dans le rapport de 1 à $\frac{1}{e}$.

5°. La génératrice est une parabole $y^2=2px$, le paraboloïde engendré a pour équation $y^2+z^2=2px$; on trouvera

$$\mathrm{N}=\sqrt{2px+p^2},\quad \mathrm{N}^2=2px+p^2,\quad x=\frac{\mathrm{N}^2-p^2}{2p},$$

$$dx=\frac{1}{p}\mathrm{N}d\mathrm{N},\quad \mathrm{A}=\frac{2\pi}{p}\int_{\mathrm{N}_0}^{\mathrm{N}}\mathrm{N}^2d\mathrm{N}=\frac{2\pi}{3p}(\mathrm{N}^3-\mathrm{N}_0^3).$$

Si l'on fait $x_0=0$, et par suite $\mathrm{N}_0=p$, on aura

$$\mathrm{A}=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{\mathrm{N}^3}{p}-p^2\right).$$

6°. La génératrice est l'hyperbole $xy=\frac{1}{2}a^2$, la surface engendrée a pour équation

$$x^2(y^2+z^2)=\tfrac{1}{4}a^4.$$

De l'équation

$$\mathrm{A}=2\pi\int_{x_0}^{x}y\ \text{séc}\,\tau\,dx$$

on tirera

$$\mathrm{A}=\pi a^2\int_{x_0}^{x}\text{séc}\,\tau\,\frac{dx}{x};$$

de plus on a

$$\text{tang}\,\tau=-y'=-\frac{1}{2}\frac{a^2}{x^2},$$

et par suite

$$x^2=\frac{a^2}{2\,\text{tang}\,\tau},\quad \text{l}x=\text{l}a-\tfrac{1}{2}\text{l}2-\tfrac{1}{2}\text{l}\,\text{tang}\,\tau,$$

$$\frac{dx}{x}=-\frac{1}{2}\frac{d\tau}{\sin\tau\cos\tau},$$

$$A = -\tfrac{1}{2}\pi a^2 \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{d\tau}{\sin\tau\cos^2\tau}$$
$$= -\tfrac{1}{2}\pi a^2\left(\frac{1}{\cos\tau_0} - \frac{1}{\cos\tau} + \mathrm{l\,tang}\frac{\tau_0}{2} - \mathrm{l\,tang}\frac{\tau}{2}\right).$$

7°. La génératrice est la logarithmique $y = e^{\frac{x}{a}}$.
La formule

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} y\,dx\sqrt{1+y'^2}$$

donne

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{a}}dx\sqrt{1+y'^2};$$

de plus

$$y' = \frac{1}{a}e^{\frac{x}{a}},\quad dy' = \frac{1}{a^2}e^{\frac{x}{a}}dx,\quad e^{\frac{x}{a}}dx = a^2 dy',$$

donc

$$A = 2\pi a^2 \int_{y'_0}^{y'} dy'\sqrt{1+y'^2}:$$

or

$$\int_{y'_0}^{y'} dy'\sqrt{1+y'^2} = \tfrac{1}{2}y'\sqrt{1+y'^2} + \tfrac{1}{4}\mathrm{l}\left(\frac{\sqrt{1+y'^2}+y'}{\sqrt{1+y'^2}-y'}\right) + C$$
$$= \tfrac{1}{2}\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + \tfrac{1}{2}\mathrm{l}\left(\frac{1+\sin\tau}{1-\sin\tau}\right) + C,$$

donc

$$A = \pi a^2\left[\frac{\sin\tau}{\cos^2\tau} + \mathrm{l\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau}{2}\right) - \frac{\sin\tau_0}{\cos^2\tau_0} - \mathrm{l\,tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\tau_0}{2}\right)\right].$$

8°. La génératrice est la chaînette $y = a\dfrac{e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}}{2}$. On a

$$N = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right),$$

et en faisant $x_0 = 0$, on aura

$$A = \pi a \int_0^x \left(1 + \frac{e^{\frac{2x}{a}} + e^{-\frac{2x}{a}}}{2}\right) dx = \pi a \left[x + \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

9°. La génératrice est la cycloïde

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega),$$

d'où

$$dx\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = R d\omega \sqrt{2}\sqrt{1 - \cos\omega},$$

$$A = 2^{\frac{3}{2}}\pi R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^{\frac{3}{2}} d\omega = 8\pi R^2 \int_{\omega_0}^{\omega} \sin^3\frac{\omega}{2}\, d\omega;$$

on a d'ailleurs

$$8\sin^3\frac{\omega}{2} = \left(\frac{e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}\right)^3 = 6\sin\frac{\omega}{2} - \sin\frac{3\omega}{2},$$

donc, en supposant $\omega_0 = 0$,

$$A = 4\pi R^2 \left(\frac{8}{3} - 3\cos\frac{\omega}{2} + \frac{1}{3}\cos\frac{3\omega}{2}\right).$$

L'aire de la surface de révolution, engendrée par la demi-cycloïde entière, s'obtiendra en faisant $\omega = 2\pi$, et sera

$$A = \frac{64}{3}\pi R^2 = \frac{\pi}{3}(8R)^2.$$

81. Si l'on faisait tourner autour de l'axe des x, non plus la courbe $y = f(x)$, mais celle qui est représentée par l'équation

$$y = b + f(x),$$

b désignant une constante positive, on aurait

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = [b + f(x)] \times \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

$$A = 2\pi \int_{x_0}^{x} dx\, f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$
$$+ 2\pi b \int_{x_0}^{X} dx \sqrt{1 + y'^2} = A' + 2\pi b s,$$

en désignant par A' la portion de surface engendrée par la courbe $y = f(x)$, et par s l'arc compris sur la courbe $y = f(x)$ entre les points correspondants aux abscisses x_0, x.

Si l'on remplaçait b par $-b$, mais en supposant $f(x) < b$; $A' - 2\pi bs$ représenterait, non plus l'aire A, mais cette aire prise avec le signe $-$; on aurait

$$A + A' = 2\pi bs.$$

On conclura de ce qui précède que si l'on fait tourner successivement un arc de courbe, 1° autour d'un axe choisi arbitrairement, 2° autour d'un axe parallèle séparé du premier par la distance b; la différence entre les deux surfaces engendrées, si les deux axes sont situés du même côté par rapport à l'arc générateur, ou leur somme, si les axes de révolution sont situés de différents côtés de l'arc générateur, sera égale au produit de ce même arc par la circonférence que décrirait un point du second axe tournant autour du premier.

A l'aide de ce théorème, que l'on peut étendre au cas même où l'arc de courbe sera rencontré en plusieurs points par des plans perpendiculaires à l'axe de rotation, on prouvera sans peine que toute courbe qui a un centre, en tournant autour d'un axe qui ne le rencontre pas, engendre une surface équivalente au produit de son périmètre par la circonférence que décrit le centre autour de cet axe.

82. La formule fondamentale $A = \int_{x_0}^{X} \int_{y_0}^{Y} dxdy \text{ séc } \tau$ suppose que la projection de la surface sur le plan $\overline{xy}$ n'est coupée qu'en deux points par un plan perpendiculaire à l'axe des x; s'il en était autrement, alors, pour déterminer l'aire A, il faudrait la partager en plusieurs parties, dont chacune pût être calculée à l'aide de la for-

mule qui précède. Supposons, pour fixer les idées, que les quantités

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_n,$$

rangées par ordre de grandeur, soient des fonctions de x propres à représenter, entre les limites $x = x_0$, $x = x$, les ordonnées des diverses lignes qui comprennent entre elles les différentes parties de la projection de l'aire A, on partagera l'aire A en autant de parties correspondantes qui seront mesurées par les intégrales doubles

$$\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1} \text{séc}\,\tau\, dy\, dx, \quad \int_{x_0}^{x}\int_{y_2}^{y_3} \text{séc}\,\tau\, dy\, dx, \text{ etc.};$$

en ajoutant toutes ces intégrales, on obtiendra la valeur de A. On aura donc

$$\begin{aligned} \text{A} &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y_1} \text{séc}\,\tau\, dy\, dx + \int_{x_0}^{x}\int_{y_2}^{y_3} \text{séc}\,\tau\, dy\, dx \text{ etc.}\ldots \\ &= \int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y_1} \text{séc}\,\tau\, dy + \int_{y_2}^{y_3} \text{séc}\,\tau\, dy + \text{etc.}\ldots\right) dx. \end{aligned}$$

Dans la même hypothèse, la projection de l'aire A sera représentée par l'expression

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}\left(\int_{y_0}^{y_1} dy + \int_{y_2}^{y_3} dy + \text{etc.}\right) dx \\ &\qquad = \int_{x_0}^{x} (y_1 - y_0 + y_3 - y_2 + \text{etc.}\ldots)\, dx. \end{aligned}$$

Si la surface A était rencontrée en plusieurs points par des droites parallèles à l'axe des z, c'est-à-dire si à une même valeur de x correspondaient plusieurs valeurs de séc τ, on ne pourrait pas la déterminer à l'aide des équations ci-dessus établies, mais il sera possible, dans tous les cas, de la décomposer en plusieurs parties dont chacune puisse être calculée par les méthodes indiquées.

QUINZIÈME LEÇON.

Applications géométriques. — Troisième application à la cubature des solides.

---

83. Le problème de la cubature des solides consiste à déterminer le volume compris sous une enveloppe donnée. Il est d'abord facile de prouver que le volume V d'un cylindre droit à base quelconque B, est égal au produit de sa base B par la hauteur H, en sorte qu'on ait $V = BH$.

Démonstration. Plaçons le cylindre de manière que la génératrice étant parallèle à l'axe des x, le plan de la base coïncide avec le plan $\overline{zy}$. Désignons par $f(z)$ la section linéaire, faite dans la base par un plan perpendiculaire à l'axe des z, par b et v la portion de la base B et du volume V comprise au-dessous du plan sécant ; si nous donnons à z un accroissement Δz, b et v prendront des accroissements Δb, Δv ; de plus on aura évidemment

$$\Delta b = \Delta z\,[f(z) + \varepsilon], \quad \Delta V = H\Delta z[\,f(z) + \varepsilon'\,],$$

ε, ε' désignant des quantités qui s'évanouissent avec Δz, et par conséquent

$$\frac{db}{dz} = f(z), \quad \frac{dv}{dz} = Hf(z),$$

et en intégrant depuis $z = z_0$ jusqu'à $z = Z$, $z = z_0$,

et $z = Z$ étant les équations des plans qui terminent le volume cylindrique V, on aura

$$B = \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz, \quad V = H \int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz = B \times H;$$

ce qu'il fallait prouver.

Si la section $f(z)$, faite dans la base B par un plan perpendiculaire à l'axe des z, se transformait en un système de plusieurs longueurs distinctes, représentées par $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ..., on diviserait la base B et le volume V en parties B_1, B_2, ..., V_1, V_2, correspondantes à ces longueurs; on trouverait ainsi

$$V_1 = HB_1, \quad V_2 = HB_2, \quad V_3 = HB_3, \ldots,$$
$$V = V_1 + V_2 + V_3 \ldots = H(B_1 + B_2 + B_3 \ldots) = BH.$$

Supposons à présent que l'on cherche le volume V, terminé par une enveloppe quelconque comprise entre deux plans $x = x_0$, $x = X$. Soit $F(x)$ l'aire de la section faite dans le volume V par un plan perpendiculaire à l'axe des x et correspondant à l'abscisse x, et nommons V la portion du volume compris entre les deux plans $x = x_0$, $x = x$. Si l'on attribue à x un accroissement Δx, le volume V recevra un accroissement $\Delta V = \Delta x[F(x) + \varepsilon]$, ε désignant une quantité qui s'évanouit avec Δx : en effet, le volume très-pétit ΔV sera compris entre deux cylindres, l'un inscrit au volume, l'autre circonscrit, ayant tous deux pour hauteur Δx, et pour bases des aires très-peu différentes de $F(x)$. De l'équation qui précède, on tire

$$\frac{dV}{dx} = F(x), \quad dV = F(x)\,dx,$$

et en intégrant entre les limites x_0 et x, ou x_0 et X,

$$v = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx, \quad V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx.$$

Cette formule subsiste dans le cas même où l'aire $F(x)$ de la section faite dans le volume V par un plan perpendiculaire à l'axe des x, se change en une somme de plusieurs aires $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$,... terminées par divers contours. Alors le volume V est la somme de plusieurs volumes représentés par les équations

$$\int_{x_0}^{X} F_1(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} F_2(x)\,dx, \quad \int_{x_0}^{X} F_3(x)\,dx, \ldots,$$

et l'on a

$$\int_{x_0}^{X} F_1(x)dx + \int_{x_0}^{X} F_2(x)dx + \text{etc.} = \int_{x_0}^{X} [F_1(x)+F_2(x)+\text{etc}\ldots]dx = \int_{x_0}^{X} F(x)dx.$$

84. *Corollaire* 1er. Si la section $F(x)$ est constante, et égale à B, ce qui arrivera si le volume V est une portion de surface cylindrique, on aura

$$V = B\int_{x_0}^{X} dx = B(X - x_0) = BH,$$

en désignant par H la distance des deux plans. On en conclut que le volume compris dans un cylindre oblique dont B représente la base, et H la hauteur, est équivalent au produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire 2me. Si la section $F(x)$ est toujours semblable à elle-même, ce qui arrivera, par exemple, si le volume est une portion de cône dont le sommet coïncide avec l'origine et dont la base soit dans un plan perpendiculaire à l'axe des x; l'aire de la section $F(x)$ sera proportionnelle au carré de la distance au sommet, et en appelant B la base du cône, et H sa hauteur, on aura

$$\frac{F(x)}{B} = \frac{x^2}{H^2}, \quad F(x) = \frac{Bx^2}{H^2},$$

$$V = \int_0^H \frac{Bx^2dx}{H^2} = \frac{B}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{BH^3}{3H^2} = \tfrac{1}{3}BH.$$

Le volume d'un cône à base quelconque est le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Le volume du tronc de cône compris entre les plans $x_0 = h$, $x = H$, serait donné par l'équation

$$V = \frac{B}{H^2}\int_h^H x^2 dx = \frac{B}{H^2}\left(\frac{H^3 - h^3}{3}\right);$$

en désignant par b la petite base du tronc de cône, par h_1 sa hauteur, on aura

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2}, \quad \frac{h}{H} = \sqrt{\frac{b}{B}}, \quad h_1 = H - h,$$

et parce que

$$H^3 - h^3 = (H - h)(H^2 + Hh + h^2),$$

on trouvera

$$V = \frac{h_1}{3}\left(B + B\frac{h}{H} + B\frac{h^2}{H^2}\right) = \frac{h_1}{3}(B + \sqrt{Bb} + b),$$

c'est-à-dire que le volume d'un tronc de cône est le tiers du produit qu'on obtient en multipliant sa hauteur par la somme de trois surfaces respectivement équivalentes aux deux bases du tronc de cône et à une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Si l'on ne voulait pas emprunter à la géométrie ce théorème que les sections faites dans un cône par des plans parallèles sont proportionnelles aux carrés de la distance de ces plans aux sommets, on le démontrerait en procédant comme il suit. Supposons que $f(\eta, \zeta) = 0$ soit l'intersection du cône par un plan perpendiculaire à l'axe des x et situé à une distance 1 de l'origine. La génératrice qui passera par le point η, ζ de cette courbe sera représentée par les deux équations

$$\frac{y}{x} = \eta, \quad \frac{z}{x} = \zeta,$$

et si entre les trois équations qui précèdent on élimine η, ζ, l'équation résultante $f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) = 0$ sera vérifiée pour tous les points de toutes les génératrices et représentera, par conséquent, la surface conique en question. Cela posé, les sections faites dans cette surface par les plans $x = h$, $x = \mathrm{H}$, auront pour équations

$$f\left(\frac{y}{h}, \frac{z}{h}\right) = 0, \quad f\left(\frac{y}{\mathrm{H}}, \frac{z}{\mathrm{H}}\right) = 0,$$

et leurs surfaces a, A, d'après un théorème démontré (n° 72), auront pour expression $\mathrm{A}_1 h^2$, $\mathrm{A}_1 \mathrm{H}^2$, A_1 étant l'aire de la courbe $f(y, z) = 0$; donc

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = \frac{h^2}{\mathrm{H}^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

85. *Corollaire* 3me. On a

$$\mathrm{V} = \int_{x_0}^{\mathrm{X}} \mathrm{F}(x)dx = (\mathrm{X} - x_0)\,\mathrm{F}(\xi),$$

par conséquent le volume d'un corps est égal au produit de la distance entre les deux plans parallèles qui le terminent par une valeur moyenne entre les aires des sections que déterminent, dans ce volume, des plans intermédiaires et parallèles aux premiers. Il en résulte que le rapport entre un volume donné et sa projection sur un axe quelconque est une moyenne entre les aires des différentes sections faites dans le volume par des plans perpendiculaires à l'axe. On prouverait encore que le rapport entre un volume et sa projection sur un plan est une moyenne entre les diverses valeurs que peut acquérir le rapport des longueurs interceptées par l'enveloppe de ce volume sur une sécante constamment parallèle au plan.

Corollaire 4me. Pour un second volume V′, on aura

$$V' = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx,$$

et par suite

$$\frac{V}{V'} = \frac{\int_{x_0}^{X} \mathrm{F}(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx};$$

mais si dans l'équation connue,

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{X} \varphi(x)\chi(x)\,dx = \varphi(\xi)\int_{x_0}^{X} \chi(x)\,dx,$$

on fait

$$f(x) = \mathrm{F}(x), \quad \chi(x) = F(x), \quad \varphi(x) = \frac{\mathrm{F}(x)}{F(x)},$$

on en tirera

$$\frac{V'}{V}\ \frac{\int_{x_0}^{X} \mathrm{F}(x)\,dx}{\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx} = \frac{\mathrm{F}(\xi)}{F(\xi)}.$$

On en conclut que le rapport entre les deux volumes V et V′ est une quantité moyenne entre les diverses valeurs que peut acquérir le rapport des deux sections faites dans ces deux volumes par un plan constamment parallèle à un plan donné; et parce que (n° 72) le rapport des deux sections est lui-même une moyenne entre les diverses valeurs du rapport des longueurs interceptées par ces deux sections sur une droite mobile constamment parallèle à un axe donné, il sera vrai que le rapport entre les volumes renfermés dans deux enveloppes est une moyenne entre les valeurs du rapport des longueurs in-

terceptées par ces enveloppes sur une droite constamment parallèle à un axe donné.

Corollaire 5[me]. Il résulte du corollaire 4[me], 1° que si les sections faites dans deux volumes par un système de plans parallèles les uns aux autres sont entre elles dans un rapport constant, les deux volumes seront entre eux dans le même rapport;

2°. Que si les longueurs interceptées par deux enveloppes sur une droite constamment parallèle à un certain axe, sont entre elles dans un rapport constant, les deux volumes terminés par ces enveloppes seront entre eux dans le même rapport : c'est ce qui arrivera, par exemple, si l'un de ces volumes V étant terminé par la surface fermée qui aurait pour équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

l'autre V′ était compris dans une des surfaces

$$f\left(\frac{x}{a}, y, z\right) = 0, \quad f\left(x, \frac{y}{b}, z\right) = 0, \quad f\left(x, y, \frac{z}{c}\right) = 0.$$

En effet, si de la première équation on tire

$$x = \varphi(y, z), \quad y = \chi(x, z), \quad z = \psi(x, y),$$

on tirera des autres

$$x = a\varphi(x, y, z),$$

ou

$$y = b\chi(x, y, z),$$

ou

$$z = c\psi(x, y, z),$$

ce qui prouve que les longueurs interceptées par les deux enveloppes sur des droites parallèles à un des axes sont dans le rapport constant a, ou b, ou c, et par suite le volume

V sera au volume V', dans le rapport de l'unité, à a, ou b, ou c.

Si l'on compare successivement l'un à l'autre les volumes renfermés dans les quatre surfaces représentées par les équations

$$f(x, y, z) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, y, z\right) = 0,$$
$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, z\right) = 0, \quad f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0,$$

on conclura de ce qui précède que les rapports du second volume au premier, du troisième au second et du quatrième au troisième, sont mesurés par les nombres a, b, c, et par conséquent le rapport du quatrième volume au premier aura pour mesure abc. Donc, pour déterminer le volume compris dans une surface courbe fermée de toutes parts et représentée par une équation de la forme

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0,$$

dans laquelle a, b, c désignent trois constantes positives, il suffit d'évaluer le volume compris dans la surface courbe $f(x, y, z) = 0$, et de multiplier ce volume par le produit des trois constantes a, b, c. Si l'on suppose $c = b = a$, l'équation $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right) = 0$, réduite à la forme

$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right) = 0,$$

représente l'enveloppe d'un solide semblable à celui qui termine la surface $f(x, y, z) = 0$; de plus les dimensions du second solide seront à celles du premier

comme le nombre a est à l'unité; et il résulte des propositions ci-dessus établies, que les volumes compris dans deux solides semblables sont entre eux comme les cubes de leurs dimensions respectives.

86. Pour appliquer la formule $A = \int_{x_0}^{X} F(x)dx$, il suffira de calculer l'aire $F(x)$ de la section faite dans la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des x; or cette aire sera facile à déterminer à l'aide des principes déjà établis.

Supposons, pour fixer les idées, que x_0, X étant deux constantes, y, Y deux fonctions de la variable x, et z, Z deux fonctions des variables x, y, on demande le volume renfermé d'une part entre les deux surfaces courbes représentées par les équations

$$z = z, \quad z = Z,$$

d'autre part entre les deux surfaces cylindriques représentées par les équations

$$y = y, \quad y = Y,$$

d'autre part enfin, entre les deux plans

$$x = x_0, \quad x = X.$$

La section $EFF'E' = F(x)$, faite dans le volume par un plan parallèle au plan yz, et correspondant à une valeur particulière de l'abscisse, sera comprise entre quatre lignes, savoir, deux courbes EF, $E'F'$, tracées sur les surfaces $z = z$, $z = Z$, et deux lignes EE', FF', parallèles à l'axe des z, et situées sur les cylindres $y = y$, $y = Y$; et pour obtenir les équations de ces quatre lignes, il suffit, dans les équations

$$z = z, \quad z = Z, \quad y = y_0, \quad y = Y,$$

de faire de x une constante. Cela posé, si l'on nomme $f(x,y)$ la section linéaire GG' faite dans la surface $F(x)$ par un plan perpendiculaire à l'axe des y correspondant à une valeur particulière de y, on aura évidemment

$$f(x, y) = GG' = Gg - gG' = Z - z_0,$$

et l'on tirera, par suite, des formules connues,

$$F(x) = \int_{y_0}^{Y} f(x,y)\,dy = \int_{y_0}^{Y} (Z - z_0)\,dy = \int_{y_0}^{Y}\int_{z_0}^{Z} dz\,dy.$$

Il y aura donc, dans le cas le plus général, trois intégrations à faire, l'une par rapport à z et prise entre les limites $z = z_0$, $z = Z$, qui sont des fonctions de x et de y; la seconde entre les limites y_0, Y, qui sont fonctions de x seulement; la troisième entre les limites constantes x_0, X, si les deux surfaces cylindriques $y = y_0$, $y = Y$ se coupent suivant deux génératrices; et si l'on suppose que x_0, X désignent précisément les abscisses des points situés sur les génératrices dont il s'agit, le volume V sera limité en tous sens par les deux surfaces et par les deux cylindres. Il en serait encore de même si les deux surfaces cylindriques se touchaient suivant les génératrices correspondantes aux abscisses x_0, X. Ces deux surfaces cylindriques se réduiraient à une seule si les deux fonctions y_0, Y représentaient deux valeurs de y tirées d'une seule équation entre y et x.

Enfin dans cette même hypothèse, il peut arriver que, les surfaces $z = z_0$, $z = Z$ étant distinctes l'une de l'autre, se coupent suivant une courbe tracée sur la surface cylindrique; ou que z_0, Z soient les deux valeurs de z tirées d'une seule équation $F(x, y, z) = 0$ propre à représenter une surface convexe et fermée de toutes parts, et à laquelle la surface cylindrique se trouverait circonscrite. Dans le premier cas le volume V serait li-

mité dans tous les sens par les surfaces; dans le second, V désignerait le volume compris dans la surface

$$F(x, y, z) = 0.$$

87. L'aire $F(x)$ est facile à déterminer, lorsque l'enveloppe est une surface de révolution. Concevons que, après avoir tracé dans le plan $\overline{xy}$ une courbe représentée par l'équation $y = f(x)$, on la fasse tourner autour de l'axe des x, elle engendrera une surface de révolution dans laquelle la section $F(x)$, faite par un plan perpendiculaire à l'axe des x, sera précisément un cercle qui aura pour rayon l'ordonnée de la courbe génératrice. On aura donc

$$F(x) = \pi y^2,$$

et par suite

$$V = \pi \int_{x_0}^{x} y^2 dx.$$

Exemples:

1°. La courbe génératrice est un cercle $x^2 + y^2 = R^2$,

$$V = \pi \int_0^x (R^2 - x^2) dx = \pi x (R^2 - \tfrac{1}{3} x^2) = \tfrac{2}{3}\pi R^2 x + \tfrac{1}{3}\pi y^2 x;$$

le volume d'un segment sphérique compris entre deux plans parallèles dont l'un passe par le centre de la sphère surpasse le volume du cône construit sur la hauteur du segment et sur la plus petite base d'une quantité précisément égale à la surface de la zone qui enveloppe le segment multiplié par le tiers du rayon de la sphère. Si la hauteur de ce même segment devient égale au rayon R, le volume V a pour valeur $\tfrac{2}{3}\pi R^3$, et le double de cette quantité, $\tfrac{4}{3}\pi R^3$, représente le volume entier de la sphère. On en conclura (n° 85) que le volume de l'ellipsoïde a pour mesure le produit $\tfrac{4}{3}\pi abc$.

2°. La génératrice coïncide avec la parabole $y^2 = 2px$; on aura, en posant $x_0 = 0$,

$$V = \pi p \int_0^x 2x dx = \pi p x^2 = \tfrac{1}{2} \pi y^2 x.$$

Le solide, engendré par la révolution d'une portion de parabole comprise entre le sommet et un plan $x = x$, a pour mesure la moitié du produit du volume du cylindre circonscrit.

3°. La génératrice est la courbe $y = Ax^a$; en posant $x_0 = 0$, on trouvera

$$V = \pi A^2 \int_0^x x^{2a} dx = \pi A^2 \frac{x^{2a+1}}{2a+1} = \frac{1}{2a+1} \pi y^2 x.$$

Le volume du solide de révolution est au volume du cylindre circonscrit comme 1 est à $2a + 1$.

4°. La génératrice est la logarithmique $y = a\mathrm{l}x$; on aura, en posant $x_0 = 0$,

$$V = \pi a^2 \int_0^x [\mathrm{l}(x)]^2 dx = \pi a^2 x \{ [\mathrm{l}(x)]^2 - 2\mathrm{l}x + 2 \}.$$

Si l'équation de la logarithmique était mise sous la forme $y = e^{\frac{x}{a}}$, on trouverait, en posant toujours $x_0 = 0$,

$$V = \pi \int_0^x e^{\frac{2x}{a}} dx = \frac{\pi a}{2} \left(e^{\frac{2x}{a}} - 1 \right) = \frac{\pi a}{2} (y^2 - 1).$$

5°. La génératrice est la chaînette

$$y = a \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2};$$

on aura, en posant $x_0 = 0$,

$$V = \frac{\pi a^2}{4}\int_0^x \left(e^{\frac{2x}{a}} + 2 + e^{-\frac{2x}{a}}\right)dx = \frac{\pi a^2}{2}\left[x + \frac{a}{4}\left(e^{\frac{2x}{a}} - e^{-\frac{2x}{a}}\right)\right].$$

6°. Quelquefois on facilite l'évaluation du volume en remplaçant la variable x par une autre variable.

Prenons pour exemple le cas où la génératrice est la cycloïde

$$x = R(\omega - \sin\omega), \quad y = R(1 - \cos\omega),$$

on a

$$dx = y\,d\omega, \quad y^2 dx = y^3 d\omega = R^3(1 - \cos\omega)^3 d\omega,$$

$$V = \pi R^3 \int_{\omega_0}^{\omega} (1 - \cos\omega)^3 d\omega,$$

et en supposant $x_0 = 0$, $\omega_0 = 0$,

$$V = \pi R^3 \int_0^{\omega} (1 - \cos\omega)^3 d\omega;$$

d'ailleurs

$$(1 - \cos\omega)^3 = 2^3 \sin^6\frac{\omega}{2} = \frac{1}{(-2)^3}\left(e^{\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}}\right)^6$$
$$= \frac{1}{4}(10 - 15\cos\omega + 6\cos 2\omega - \cos 3\omega),$$

et par suite

$$V = \frac{\pi R^3}{4}(10\omega - 15\sin\omega + 3\sin 2\omega - \tfrac{1}{3}\sin 3\omega).$$

Il suffit de faire dans cette équation $\omega = 2\pi$ pour avoir le volume du solide engendré par la révolution de la première branche de la cycloïde qui se trouve ainsi donné par l'équation

$$V = 5\pi^2 R^3.$$

88. Si l'on faisait tourner autour de l'axe des x, non

plus une seule courbe représentée par l'équation $y=f(x)$, mais deux courbes $y=y$, $y=Y$; y, Y étant deux fonctions de la variable x dont les valeurs sont toujours positives entre les limites $x=x_0$, $x=\mathrm{X}$; le volume engendré par leur révolution aurait évidemment pour mesure la différence des intégrales

$$\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}} Y^2 dx,\quad \pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}} y^2 dx,$$

et l'on aurait

$$\mathrm{V}=\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}}(Y^2-y^2)dx=2\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\int_{y}^{Y} y\,dy\,dx.$$

On arriverait très-simplement à cette même équation en remarquant que la section $\mathrm{F}(x)$ faite dans le volume V est la différence de deux cercles dont les rayons sont y et Y. De sorte que l'on a

$$\mathrm{F}(x)=\pi Y^2-\pi y^2=\pi(Y^2-y^2),\text{ etc.}$$

89. Si les ordonnées y, Y croissent toutes d'une même quantité b, ou si l'axe de révolution s'éloigne de tous les points des deux courbes d'une même quantité b, le nouveau solide engendré sera donné par l'équation

$$\begin{aligned}\mathrm{V}'&=\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}}[(Y+b)^2-(y+b)^2]\,dx\\ &=\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}}(Y^2-y)^2\,dx+2\pi b\int_{x_0}^{\mathrm{X}}(Y-y)dx;\end{aligned}$$

mais $\int_{x_0}^{\mathrm{X}}(Y-y)dx$ est l'aire A de la surface plane renfermée entre les deux courbes $y=y$, $y=Y$; $\pi\int_{x_0}^{\mathrm{X}}(Y^2-y^2)dx$ est le volume déjà calculé V; on a donc

$$\mathrm{V}'=\mathrm{V}+2\pi b\mathrm{A}.$$

On en conclut que si l'on fait tourner une surface plane, 1° autour d'un axe situé dans le plan de cette surface, mais qui ne la traverse pas; 2° autour d'un axe parallèle plus éloigné de la surface dont il s'agit, et situé à la distance b du premier, les valeurs des solides engendrés par la révolution de la surface autour du second et du premier axe, donneront pour différence un volume égal au produit de cette même surface par la circonférence du cercle dont le rayon coïncide avec la distance entre les deux axes.

Si la surface plane A est divisible en deux parties symétriques par une droite menée parallèlement à l'axe des x et à la distance b de cet axe, on devra avoir

$$y = b - f(x), \quad Y = b + f(x),$$

et l'on aura

$$V = \pi \int_{x_0}^{X} \{[b+f(x)]^2 - [b-f(x)]^2\} dx = 4\pi b \int_{x_0}^{X} f(x)\, dx;$$

mais on a aussi

$$A = \int_{x_0}^{X} \{[b+f(x)] - [b-f(x)]\} dx = 2\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

donc $V = 2\pi b A$, et par conséquent lorsqu'une surface plane est divisible par un axe en deux parties symétriques, le solide engendré par la révolution de cette surface autour d'un second axe parallèle au premier et tracé dans le plan de la surface, mais de manière qu'il ne la traverse pas, est équivalent au produit de la même surface par la circonférence du cercle qui a pour rayon la distance entre les deux axes. Ainsi, par exemple, le solide V' qu'engendre la révolution de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ autour de la tangente menée par l'une des extrémités de

l'axe $2b$ est équivalent au produit de la surface de l'ellipse πab par la circonférence que décrit le centre de cette courbe ; donc $V = 2\pi^2 ab^2$.

90. On peut déduire de la formule $V = \int_{x_0}^{X} F(x)dx$ un théorème remarquable dont voici l'énoncé. Étant donnés deux plans parallèles à un axe avec un contour fermé dans l'un de ces deux plans, si l'on fait mouvoir une droite de manière qu'elle passe successivement par les différents points de ce contour, et forme toujours un angle droit avec l'axe que l'on considère, le volume V du solide compris entre la surface courbe engendrée par la droite, et les deux plans donnés, sera le produit de sa hauteur par la demi-somme des surfaces planes qui lui servent de bases.

Démonstration. Prenons l'axe donné pour axe des x, et soit b la distance des deux plans parallèles à cet axe ; si l'on coupe le volume V par un plan perpendiculaire au même axe et correspondant à l'abscisse x, la section $F(x)$ qui en résultera sera évidemment un trapèze dans lequel les côtés parallèles se réduiront aux sections linéaires faites par le plan coupant dans les deux bases du volume V. Si l'on désigne par $f(x)$ et $\mathrm{f}(x)$ les deux sections linéaires dont il s'agit, on aura

$$F(x) = \frac{b}{2}[f(x) + \mathrm{f}(x)], \quad V = b\,\frac{\int_{x_0}^{x} f(x)dx + \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)dx}{2}.$$

Mais en appelant A et A' les deux bases, on a aussi

$$A = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx, \quad A' = \int_{x_0}^{x} \mathrm{f}(x)dx,$$

donc

$$V = b\,\frac{A + A'}{2}.$$

91. Pour montrer une application de la formule

$$V=\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y} z\,dx\,dy,$$

cherchons le volume V renfermé entre le plan $\overline{xy}$, une surface cylindrique dont la génératrice soit parallèle à l'axe des z, et la surface du paraboloïde hyperbolique représenté par l'équation $xy = cz$, d'où $z = \frac{xy}{c}$; on aura

$$V=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y} xy\,dy\,dx=\frac{1}{2c}\int_{x}^{X}(Y^2-y^2)x\,dx.$$

Si la base de la surface cylindrique se réduit au cercle représenté par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

on aura

$$y=b-\sqrt{R^2-(x-a)^2},\quad Y=b+\sqrt{R^2-(x-a)^2},$$
$$Y^2-y^2=4b\sqrt{R^2-(x-a)^2},$$
$$x_0=a-R,\ X=a+R,$$

et par conséquent

$$V=2\frac{b}{c}\int_{a-R}^{a+R}\sqrt{R^2-(x-a)^2}\times x\,dx,$$

ou, en posant $x-a=Rt$,

$$V=2\frac{b}{c}R^2\int_{-1}^{+1}(a+Rt)\sqrt{1-t^2}\,dt;$$

on a d'ailleurs évidemment

$$\int_{-1}^{+1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0,$$

tandis que l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} dt\sqrt{1-t^2},$$

représentant la moitié de la surface du cercle qui a pour rayon l'unité, est équivalente à $\frac{\pi}{2}$; on aura donc

$$V = \pi R^2 \frac{bc}{a}.$$

Le volume cherché est le produit de la base πR^2 par une quatrième proportionnelle aux trois longueurs a, b et c.

Si l'on substituait à la surface cylindrique qui a pour base le cercle, un système de quatre plans perpendiculaires aux axes des x et des y, $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$, on trouverait

$$V = \frac{1}{4c}(X^2 - x_0^2)(Y^2 - y_0^2)$$
$$= (X - x_0)(Y - y_0)\frac{x_0 y_0 + x_0 Y + X y_0 + XY}{4c},$$

en posant

$$z_1 = \frac{x_0 y_0}{c}, \quad z_2 = \frac{x_0 Y}{c}, \quad z_3 = \frac{X y_0}{c}, \quad z_4 = \frac{XY}{c},$$
$$V = (X - x_0)(Y - y_0)\frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_4}{4}.$$

Ajoutons que pour construire le paraboloïde hyperbolique, il suffira de tracer le quadrilatère gauche dont les sommets coïncident avec les extrémités des ordonnées z_1, z_2, z_3, z_4, et de faire mouvoir sur deux côtés opposés de ce quadrilatère une droite qui reste constamment comprise dans un plan parallèle aux deux autres côtés.

On arrive ainsi à la proposition suivante. Si après avoir tracé sur les quatre faces latérales d'un prisme droit à base rectangulaire un quadrilatère gauche, on fait mou-

voir une droite sur deux côtés opposés de ce quadrilatère, de manière qu'elle reste constamment parallèle aux plans des faces qui renferment les deux autres côtés; le volume compris entre la surface engendrée par cette droite et le rectangle qui sert de base au prisme sera le produit de ce rectangle par le quart de la somme des quatre longueurs comptées sur les arêtes du prisme entre les sommets du rectangle et ceux du quadrilatère.

92. La formule $V = \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx$ prouve aussi que, pour déterminer le volume V compris sous une enveloppe donnée, il suffit de mener un axe quelconque et de tracer dans un plan fixe passant par cet axe une courbe auxiliaire telle que la section faite dans le volume par un plan mobile perpendiculaire à l'axe soit toujours équivalente au rectangle construit sur une ligne donnée b et sur la section linéaire faite par le plan mobile dans l'aire renfermée entre la courbe auxiliaire et l'axe. Si l'on suppose cette aire limitée dans le sens de l'axe par les deux droites suivant lesquelles le plan mobile, parvenu aux deux positions extrêmes qu'il peut prendre, coupe le plan fixe, et si on la multiplie par la longueur b, le produit obtenu sera précisément la mesure du volume proposé.

En effet, si l'axe que l'on considère est pris pour axe des x, et si $F(x)$ est la section faite dans le volume par un plan perpendiculaire à cet axe, $\frac{F(x)}{b}$ sera l'ordonnée de la courbe auxiliaire ou la section linéaire faite dans l'aire comprise entre la courbe et l'axe; donc cette aire sera

$$\int_{x_0}^{X} \frac{F(x)}{b}\,dx = \frac{1}{b}\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx,$$

et si l'on multiplie cette intégrale par la longueur b, on

obtiendra évidemment le volume

$$V = \int_{x_0}^{X} F(x)dx.$$

Exemples: 1°. Si le volume V se trouve renfermé dans un cône ou dans une pyramide à base quelconque, dont le sommet coïncide avec l'origine, et si l'on prend pour axe des x une droite perpendiculaire à la base, la section $F(x)$ sera proportionnelle à x^2, et par suite la courbe auxiliaire sera une parabole qui aura l'origine pour sommet et pour axe l'axe des x; et puisque l'aire comprise entre une parabole, son axe et une ordonnée est le tiers du rectangle circonscrit, on en conclura que le volume compris dans un cône ou dans une pyramide à base quelconque est le tiers du volume du cylindre ayant même base et même hauteur; donc, etc.

2°. Si la section $F(x)$ se réduit à un trapèze dont les côtés parallèles représentent les sections linéaires faites dans deux surfaces planes dont les plans soient parallèles à l'axe donné, et si l'on suppose que la longueur b représente la distance des deux plans, l'ordonnée de la courbe auxiliaire sera précisément la demi-somme des sections linéaires dont nous venons de parler, et l'on en conclura sans peine que l'aire comprise entre l'axe des x et la courbe auxiliaire, est la demi-somme des deux surfaces planes. On déduira immédiatement de ce qui précède le théorème n° 90.

On déterminerait avec la même facilité, à l'aide du dernier théorème, le volume compris entre deux plans dans une sphère, dans une hyperboloïde, dans un ellipsoïde, etc.

SEIZIÈME LEÇON.

Autre méthode pour arriver aux formules qui résolvent le problème de la quadrature des aires planes et de la cubature des solides.

93. Comme le problème de la quadrature des surfaces et de la cubature des solides est très-important, il ne sera pas inutile de présenter sa solution sous un nouveau point de vue plus général et de résumer ainsi les leçons qui précèdent.

Si l'on considère une surface plane ou courbe, mais entièrement fixe, la position d'un point sur cette surface se trouvera déterminée par le moyen de deux coordonnées rectangulaires ou obliques, rectilignes ou curvilignes, etc., que nous désignerons dans tous les cas possibles par les lettres

$$x \text{ et } y;$$

et une ligne quelconque, tracée sur cette surface, pourra être représentée par une équation dont le premier membre renferme les deux variables x et y, ou au moins l'une d'entre elles. Dans le dernier cas, c'est-à-dire lorsque l'équation donnée renfermera une seule des variables x et y, nous dirons que la ligne correspondante est de première espèce. Ainsi les *lignes de première espèce* sont

celles qui auront des équations de la forme

$$f(x) = 0, \quad \text{ou} \quad f(y) = 0,$$

par conséquent celles dont les équations résolues par rapport à l'une des variables se réduiront à

$$x = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad y = \text{const.}$$

Au contraire, nous appellerons *lignes de deuxième espèce* toutes celles dont les équations seront de la forme

$$f(x, y) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$y = f(x).$$

94. Ces définitions étant admises, il est clair qu'à chaque valeur donnée de x ou de y correspondra toujours une ligne de première espèce, et que par un point donné on pourra toujours faire passer deux de ces lignes. Nous appellerons *lignes coordonnées* des x et des y les deux lignes de première espèce qui ont respectivement pour équations

$$y = 0, \quad x = 0.$$

L'*origine des coordonnées* sera le point d'intersection de ces deux lignes, c'est-à-dire, en d'autres termes, le point dont les coordonnées se réduisent à zéro.

Soient maintenant M le point qui a pour coordonnées x et y; N un deuxième point qui ait pour coordonnées $x + \Delta x$, $y + \Delta y$; Δx, Δy étant deux accroissements très-petits attribués aux variables x et y; et désignons par a la petite aire MNPQ comprise entre les quatre lignes de première espèce qui passent par les points M et N. L'aire a dépendra en général des quatre quantités

$$x, \; y, \; \Delta x, \; \Delta y,$$

et s'évanouira toujours en même temps que le produit $\Delta x \Delta y$; car il suffira, pour la rendre nulle, d'égaler à zéro un des facteurs de ce produit. Mais si l'on fait décroître indéfiniment Δx et Δy, le rapport $\frac{a}{\Delta x \Delta y}$ convergera vers une limite qui ne pourra plus dépendre que des variables x et y, et qui, dans plusieurs systèmes de coordonnées, se réduira simplement à une quantité constante. Ainsi, par exemple, on aura pour un système de coordonnées rectangulaires tracées sur une surface plane $a = \Delta x \Delta y$; et par suite $\frac{a}{\Delta x \Delta y} = 1$.

Pour un système de coordonnées obliques tracées sur une surface plane et comprenant entre elles l'angle ω,

$$a = \Delta x \Delta y \sin \omega,$$
$$\frac{a}{\Delta x \Delta y} = \sin \omega, \text{ etc.}$$

Donc, si l'on fait en général $\lim. \frac{a}{\Delta x \Delta y} = u$, on aura $u = 1$ dans le cas des coordonnées rectangulaires, $u = \sin \omega$ dans le cas des coordonnées obliques, etc. D'autres systèmes de coordonnées pourront fournir pour la quantité u, au lieu d'une valeur constante, une valeur variable, c'est-à-dire une fonction de x et de y. J'ajoute qu'après avoir trouvé la valeur de u, on en déduira sans peine l'aire comprise dans un contour quelconque : c'est ce que nous allons faire voir

95. Considérons d'abord un contour formé par quatre lignes de première espèce, savoir : celles qui passent par le point fixe, dont les coordonnées sont x_0, y_0, et celles qui passent par le point mobile, dont les coordonnées variables sont x, y.

L'aire, dans ce contour, sera variable elle-même, et nous la représenterons en conséquence par $\chi(x, y)$.

Cela posé, si l'on désigne par la caractéristique Δ_x l'accroissement que reçoit une fonction de x dans laquelle on fait croître x de Δx, et par la caractéristique Δ_y l'accroissement que reçoit une fonction de y dans laquelle on fait croître y de Δy, on aura $a = \Delta_y . \Delta_x \chi(x, y)$, et parce que le rapport $\frac{a}{u}$ a pour limite l'unité

$$\Delta_y . \Delta_x \chi(x, y) = a = (1 \pm \varepsilon) u \Delta x \Delta y,$$

ε étant un nombre très-petit.

En divisant les deux membres de l'équation précédente par Δx, Δy, et passant aux limites, on conclura

$$\frac{D_y D_x \chi(x, y)}{dx\, dy} = u,$$

ou, en d'autres termes,

$$D^2_{yx}\ \chi(x, y) = \frac{d^2 \chi(x, y)}{dx dy} = u.$$

En intégrant cette dernière équation par rapport à y, à partir de $y = y_0$, et ayant égard à la condition $\chi(x, y_0) = 0$ qui doit être vérifiée, quel que soit x, on trouvera

$$D_x \chi(x, y) = \int_{y_0}^{y} u dy.$$

Intégrant de nouveau par rapport à x, à partir de $x = x_0$, et ayant égard à la condition $\chi(x_0, y) = 0$, qui doit être vérifiée, quel que soit y, on obtient la formule

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} u\, dy = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} u\, dx\, dy.$$

Il est essentiel d'observer que de l'équation

$$D_x \chi(x, y) = \int_{y_0}^{y} u\, dy,$$

on tire

$$\Delta_x \chi(x, y) = \Delta x (1 + \varepsilon) \int_{y_0}^{y} u\, dy;$$

par conséquent $\Delta_x\chi(x, y)$, c'est-à-dire l'aire comprise d'une part entre les lignes de première espèce qui correspondent aux abscisses x et $x + \Delta x$, de l'autre entre les lignes de première espèce qui correspondent aux ordonnées y_0, y, est représenté par un produit de la forme

$$\Delta x(1 + \varepsilon)\int_{y_0}^{y} u\,dy,$$

ε étant un nombre très-petit.

Si l'on fait $y = \mathrm{Y}$, Y désignant une quantité constante, le produit précédent deviendra

$$\Delta x(1 + \varepsilon)\int_{y_0}^{\mathrm{Y}} u\,dy,$$

et représentera l'aire comprise entre les lignes de première espèce qui répondent d'une part aux abscisses x, $x + \Delta x$, de l'autre aux ordonnées y_0 et Y.

96. Concevons maintenant que, x_0 désignant toujours une quantité constante, on représente par y, Y, non plus deux valeurs constantes de y, mais deux fonctions de la variable x, et cherchons l'aire comprise d'une part entre les lignes de deuxième espèce qui ont pour équation

$$y = y, \quad y = Y,$$

de l'autre entre les lignes de première espèce qui correspondent aux abscisses x_0 et x; cette aire sera variable avec x, et si on la représente par $\varphi(x)$, elle recevra pour accroissement $\Delta\varphi(x)$, quand on fera croître x de Δx. Soit PQRS l'accroissement dont il s'agit, renfermé d'une part entre les lignes de première espèce PR et QS correspondantes aux abscisses x, $x + \Delta x$, de l'autre entre les portions PQ, RS des lignes de deuxième espèce qui ont pour ordonnées aux points P et R, y et Y; il est clair qu'on pourra, sans changer la valeur de l'aire PQRS,

remplacer séparément ou simultanément, 1° la ligne de deuxième espèce PQ, dont l'ordonnée au point P est Y, par une ligne de première espèce P'Q'; 2° la ligne de deuxième espèce RS, dont l'ordonnée au point R est y, par une ligne de première espèce R'S'; on aura donc encore

$$\Delta_x \varphi(x) = \mathrm{P'Q'R'S'}.$$

De plus, la ligne R'S' coupera évidemment la ligne RS, et par suite aura une équation de la forme

$$y = y + \varepsilon',$$

ε' désignant un certain accroissement que reçoit y considéré comme fonction de x, lorsqu'on fait croître x d'une certaine quantité plus petite que Δx. De même la ligne P' Q' aura une équation de la forme

$$y = Y + \varepsilon'',$$

ε'' étant l'ordonnée d'un point de la ligne PQ correspondant à une abscisse comprise entre x et $x + \Delta x$; cela posé, on trouvera, en vertu de ce qui précède (n° 95),

$$\mathrm{P'Q'R'S'} = (1 + \varepsilon)\Delta x \int_{y+\varepsilon'}^{Y+\varepsilon''} u\,dy,$$

et par conséquent aussi

$$\Delta_x \varphi(x) = (1+\varepsilon)\Delta x \int_{y+\varepsilon'}^{Y+\varepsilon''} u\,dy,$$

ε' et ε'' étant des nombres qui décroîtront indéfiniment avec Δx. Si l'on divise par Δx les deux membres de l'équation précédente, on en conclura, en passant aux limites,

$$\mathrm{D}_x \varphi(x) = \int_y^Y u\,dy,$$

puis en intégrant à partir de $x = x_0$, et ayant égard à

la condition $\varphi(x_0)=0$,

$$\varphi(x)=\int_{x_0}^{x}dx\int_{y}^{Y}u\,dy=\int_{x_0}^{x}\int_{y}^{Y}u\,dx\,dy.$$

Mais il faut se rappeler alors que la première intégration doit être faite par rapport à y, dans les limites y et Y qui dépendent de la variable x, et la deuxième par rapport à x, à partir de la limite x_0 qui est une quantité constante.

Si, en désignant par y, Y, deux fonctions de x, et par x_0, X, deux quantités constantes, on cherchait l'aire comprise, d'une part entre les lignes de deuxième espèce qui ont pour équations $y=y$ et $y=Y$, de l'autre entre les deux lignes de première espèce qui ont pour équations $x=x_0$ et $x=X$, on trouverait pour la valeur de cette aire que j'appellerai A,

$$A=\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}u\,dx\,dy;$$

dans le cas particulier où y, Y deviennent constants, la valeur précédente de A se réduit, comme on pouvait le prévoir, à la valeur précédemment obtenue.

Scolie. Il est essentiel d'observer que la méthode ci-dessus exposée peut servir à déterminer non-seulement la surface comprise entre les lignes que représentent les équations ci-dessus, mais aussi toute autre quantité assujettie à croître ou à décroître avec cette même surface. Une semblable quantité se trouverait encore exprimée par l'intégrale $\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}u\,dx\,dy$, si l'on désignait par $(u\pm\varepsilon)\Delta x\,\Delta y$, non plus l'élément de la surface, mais l'élément correspondant de la quantité cherchée.

Si la surface donnée se trouvait terminée par un contour quelconque, il serait facile de la décomposer en

plusieurs parties à chacune desquelles on pourrait appliquer la méthode précédente.

97. Après avoir établi les principes généraux relatifs aux quadratures des surfaces, passons au problème des cubatures.

La position d'un point dans l'espace se trouve complétement déterminée par le moyen de trois coordonnées rectangulaires ou obliques, rectilignes ou curvilignes, polaires, etc., que nous désignerons, dans tous les cas, par les trois lettres x, y, z. Cette notation étant adoptée, une surface quelconque pourra être représentée par une équation dont le premier membre renfermera les trois variables x, y, z, ou deux de ces variables, ou au moins l'une d'elles. Pour distinguer ces trois cas l'un de l'autre, nous dirons qu'une surface est de *première*, de *deuxième*, de *troisième espèce*, suivant que son équation renferme une, ou deux, ou trois variables. En conséquence, l'équation d'une surface de première espèce aura l'une des trois formes

$$f(x) = 0, \quad f(y) = 0, \quad f(z) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, l'une des suivantes

$$x = c, \quad y = c', \quad z = c''.$$

L'équation d'une surface de deuxième espèce aura l'une des trois formes

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, z) = 0, \quad f(y, z) = 0,$$

ou, si l'on veut, l'une des trois formes

$$y = f(x), \quad z = f(x), \quad z = f(y).$$

Enfin l'équation d'une surface de troisième espèce sera de la forme

$$f(x, y, z) = 0,$$

à laquelle on peut substituer la suivante

$$z = f(x, y).$$

Cela posé, il est clair qu'à chaque valeur donnée de x, y ou z correspondra toujours une surface de première espèce, et que par un point donné on pourra toujours faire passer trois semblables surfaces. Nous appellerons *surfaces coordonnées* des $\overline{yz}$, des $\overline{zx}$ et des $\overline{xy}$, les trois surfaces de première espèce qui auront pour équations respectives

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$$

Ces surfaces se couperont suivant trois lignes que nous appellerons *lignes coordonnées* des x, des y et des z; et ces lignes, en un point qui sera l'*origine* des coordonnées; par suite, l'origine sera le point dont les trois coordonnées se réduisent à zéro.

Une ligne pouvant être considérée comme l'intersection de deux surfaces, sera naturellement représentée par deux équations; si ces équations sont de la forme

$$z = 0, \quad f(x, y) = 0,$$

la ligne se trouvera située dans la surface coordonnée des $\overline{xy}$, et ne sera autre chose que l'intersection de cette surface coordonnée avec la surface de deuxième espèce à laquelle appartient l'équation $f(x, y) = 0$.

En général, il est clair que toute surface de deuxième espèce, représentée par une équation entre deux variables, coupera l'une des trois surfaces coordonnées suivant une ligne de deuxième espèce à laquelle appartiendra l'équation dont il s'agit. Nous dirons que cette ligne est la *base* de la surface.

98. Considérons maintenant l'élément de volume terminé par les six surfaces de première espèce, qui passent

par les deux points dont les coordonnées sont respectivement

$$x,\ y,\ z,$$
$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z.$$

Ce volume, équivalent dans le cas des coordonnées rectangles au produit $\Delta x\Delta y\Delta z$, s'évanouira dans tous les cas avec ce produit, et pourra être représenté par une expression de la forme

$$(w\pm\varepsilon)\Delta x\Delta y\Delta z,$$

w désignant la limite vers laquelle converge, pour des valeurs décroissantes de Δx, Δy, Δz, le rapport du volume ci-dessus mentionné au produit en question, et le nombre ε étant assujetti à décroître indéfiniment avec ce même produit. Dans chaque système de coordonnées, la quantité w ne pourra être qu'une quantité constante, ou une fonction déterminée des variables x, y, z. De plus, après avoir trouvé la valeur constante ou variable de cette quantité w, on en déduira facilement l'expression du volume renfermé dans une enveloppe quelconque.

En effet, cherchons d'abord le volume v compris entre les six surfaces de première espèce qui passent par les points dont les coordonnées sont

$$x,\ y,\ z,$$
$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z.$$

On pourra considérer ce volume comme l'accroissement, par rapport à x et y, d'un autre volume renfermé entre les surfaces de première espèce qui passent par les deux points dont les coordonnées sont respectivement

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\quad x,\ y,\ z.$$

Désignons par $\psi(x, y, z)$ ce dernier volume, et supposons que les caractéristiques Δ_x, Δ_y, Δ_z indiquent les ac-

croissements que reçoivent des fonctions de x, y, z, quand on y fait croître x de Δx, ou y de Δy, ou z de Δz, le volume cherché sera

$$v = \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z),$$

et de plus on aura évidemment

$$\Delta_z \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z) = (\varpi + \iota) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

En divisant par Δ_z les deux membres de l'équation précédente, puis faisant converger Δ_z vers la limite o, on obtiendra la formule suivante

$$D_z \cdot \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z) = (\varpi + \iota) \Delta x \Delta y;$$

puis en intégrant par rapport à z, à partir de $z = z_0$, et observant que l'on a, quels que soient x et y,

$$\psi(x, y, z_0) = 0,$$

on obtiendra

$$v = \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z) = \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} (\varpi \pm \iota) dz,$$

ou, ce qui revient au même,

$$v = \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z) = (1 + \iota) \Delta x \Delta y \int_{z_0}^{z} \varpi dz,$$

ι désignant un nombre qui aura des valeurs différentes dans les diverses formules, mais toujours des valeurs très-petites quand Δx et Δy seront eux-mêmes très-petits.

Si l'on voulait obtenir le volume compris d'une part entre les surfaces de première espèce qui correspondent aux coordonnées

$$x, x + \Delta x; \quad y, y + \Delta y,$$

de l'autre entre les surfaces de première espèce qui ont

pour équations $z = z_0$, $z = Z$, il suffirait de remplacer z par Z dans le deuxième membre de la formule; on trouverait ainsi, pour représenter le volume cherché, une expression de la forme

$$(1 + \varepsilon)\Delta x \Delta y \int_{z_0}^{Z} \varpi dz,$$

ε désignant toujours une quantité infiniment petite.

99. Concevons maintenant que, x, X désignant deux quantités constantes, y, Y deux fonctions de la variable x, z et Z deviennent des fonctions des deux variables x et y, et cherchons le volume compris d'une part entre les surfaces de première et de deuxième espèce, qui ont pour équations

$$x = x, \quad x = X, \quad y = y, \quad y = Y,$$

de l'autre entre les surfaces de troisième espèce qui ont pour équations

$$z = z, \quad z = Z.$$

Ce volume croîtra ou décroîtra en même temps que l'aire comprise entre les quatre bases des surfaces de première et de deuxième espèce; et si l'on désigne par $(u + \varepsilon)\Delta x \Delta y$ l'élément auquel se réduit ce volume dans le cas où l'on remplace les surfaces $x = X$, $y = Y$ par les deux surfaces de première espèce qui correspondent aux coordonnées

$$x, \ x + \Delta x, \quad y, \quad y + \Delta y,$$

on obtiendra, pour l'expression du volume cherché,

$$\int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} u dx dy,$$

Il reste à trouver la valeur de u, ou, ce qui revient au même, celle du volume élémentaire

$$(u + \varepsilon)\Delta x \Delta y,$$

compris d'une part entre les surfaces de première espèce

qui correspondent aux coordonnées

$$x,\ x + \Delta x,\quad y,\ y + \Delta y,$$

de l'autre entre les surfaces de troisième espèce qui ont pour équations $z = z$, $z = Z$.

Or, sans changer ce volume élémentaire, on pourra évidemment remplacer, 1° la petite portion de surface de troisième espèce qui prend son origine au point dont les coordonnées sont x, y, z, et qui se termine à celui dont les coordonnées sont

$$x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad z + \Delta^2_{xy} z,$$

par une portion correspondante de surface de première espèce dont l'équation serait de la forme $z = z + \varepsilon'$, ε' étant une quantité infiniment petite en même temps que Δx, Δy; 2° la petite portion de surface de troisième espèce qui s'étend depuis le point correspondant aux coordonnées x, y, Z, jusqu'à celui dont les coordonnées sont

$$x + \Delta x,\quad y + \Delta y,\quad Z + \Delta^2_{xy} Z,$$

par une partie correspondante de surface de première espèce dont l'équation soit de la forme $z = Z + \varepsilon''$, ε'' désignant encore une quantité infiniment petite. De plus, pour obtenir le volume compris, d'une part entre les surfaces de première espèce qui sont représentées par les équations

$$z = z + \varepsilon',\quad z = Z + \varepsilon'',$$

de l'autre entre les surfaces de première espèce qui correspondent aux coordonnées

$$x,\ x + \Delta x,\quad y,\ y + \Delta y,$$

il suffira évidemment de remplacer dans la formule

$$v = (1 + \varepsilon)\,\Delta x \Delta y \int_{z_0}^{Z} \varpi\, dz,$$

z_0 par $z+\varepsilon'$ et Z par $Z+\varepsilon''$. On trouvera en conséquence, pour représenter ce volume, une expression de la forme

$$(1+\varepsilon''')\Delta x\Delta y\int_{z+\varepsilon'}^{Z+\varepsilon''}\varpi dz,$$

ε''' étant une quantité infiniment petite. En égalant cette expression à $(u+\varepsilon)\Delta x\Delta y$, on trouvera

$$u+\varepsilon=(1+\varepsilon''')\int_{z_0+\varepsilon'}^{Z+\varepsilon''}\varpi dz;$$

puis, en passant aux limites,

$$u=\int_{z}^{Z}\varpi\, dz.$$

La valeur de u étant ainsi déterminée, la formule qui exprime le volume compris entre les surfaces données deviendra

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}\int_{z}^{Z}\varpi\, dx\, dy\, dz.$$

On aura donc, en désignant par V le volume cherché et supposant les intégrations faites, 1° par rapport à z entre les limites variables z, Z; 2° par rapport à y entre les limites variables y, Y; 3° par rapport à x, entre les limites constantes x_0, X,

$$V=\int_{x_0}^{X}\int_{y}^{Y}\int_{z}^{Z}\varpi dxdydz.$$

Scolie. Il est essentiel d'observer que la méthode précédente peut servir à déterminer non-seulement le volume compris entre les surfaces dont il s'agit, mais encore toute autre quantité assujettie à croître ou à décroître avec ce même volume. Une semblable quantité se trouverait encore exprimée par l'intégrale qui forme le deuxième membre de la formule ci-dessus; si l'on dési-

gnait par

$$(\varpi + \varepsilon)\,\Delta x \Delta y \Delta z,$$

non plus l'élément du volume V, mais l'élément correspondant de la quantité cherchée.

Ajoutons que si le volume donné se trouvait terminé, non par les surfaces données, mais par un contour quelconque, il serait facile de le décomposer en plusieurs parties, de manière que chacune de ces parties, ou la partie correspondante, pût être facilement calculée par la méthode que nous venons d'exposer.

100. On peut remarquer que si l'on divise par $\Delta x \Delta y \Delta z$ les deux membres de l'équation

$$\Delta_x \Delta_y \Delta_z \psi(x, y, z) = (\varpi \pm \varepsilon)\,\Delta x \Delta y \Delta z,$$

on en conclura, en passant aux limites,

$$\varpi = \frac{d^3 \psi(x, y, z)}{dx\,dy\,dz} = D^3_{xyz}\psi(x, y, z):$$

de plus, il est permis de prendre pour $\psi(x, y, z)$ le volume compris entre les six surfaces de première espèce qui correspondent aux coordonnées o, x; o, y; o, z; il suffit donc de connaître ce dernier volume pour en déduire la valeur de w.

Pour donner une première application des formules précédentes, supposons d'abord les coordonnées x, y, z rectangulaires. Dans cette hypothèse, le volume $\psi(x, y, z)$ compris entre les six plans de première espèce qui passent par l'origine et le point dont les coordonnées sont x, y, z, se trouve déterminé par l'équation

$$\psi(x, y, z) = xyz,$$

de laquelle on tire

$$\varpi = \frac{d^3 \psi(x, y, z)}{dx\,dy\,dz} = 1.$$

On aurait pu encore arriver au même résultat, en observant que le volume renfermé entre des plans rectangulaires qui passent par les points dont les coordonnées sont

$$x, \ y, \ z, \quad x + \Delta x, \quad y + \Delta y, \quad z + \Delta z,$$

se réduit à un parallélipipède rectangle, dont les dimensions sont respectivement égales à Δx, Δy, Δz, en sorte qu'on a

$$v = \Delta x \Delta y \Delta z,$$

et par suite

$$\text{lim.}\, w\,(1 \pm \epsilon) = 1, \quad w = 1.$$

Cela posé, on aura

$$V = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} \int_{z}^{Z} dx dy dz = \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} (Z - z) dx dy.$$

Si l'on considère des coordonnées obliques mais toujours rectilignes, en désignant par a le volume du parallélipipède qui aurait pour arêtes trois droites respectivement parallèles aux axes des coordonnées, et de plus égales à l'unité de longueur, on trouvera

$$\psi(x, y, z) = axyz,$$

et par suite $w = a$,

$$V = a \int_{y_0}^{X} \int_{y}^{Y} \int_{z}^{Z} dx dy dz = a \int_{x_0}^{X} \int_{y}^{Y} (Z - z) dx dy.$$

Concevons maintenant que la position du point dans l'espace se trouve déterminée par le moyen des coordonnées polaires

$$x = \theta, \quad y = u, \quad z = r,$$

r désignant le rayon vecteur mené du point que l'on considère à un point fixe pris pour origine; u l'angle que

forme ce rayon vecteur avec un axe fixe, ou plutôt avec un demi-axe passant par l'origine ; et θ l'angle formé par un plan fixe qui renferme ce demi-axe, avec le plan qui passe par le même demi-axe et le rayon vecteur. Les surfaces de première espèce, c'est-à-dire les surfaces représentées par des équations de la forme

$$u = c, \quad \text{ou} \quad \theta = c', \quad \text{ou} \quad r = c'',$$

seront évidemment ou des surfaces coniques droites à bases circulaires qui auront pour axe l'axe fixe, ou des plans passant par l'axe fixe, ou des surfaces sphériques qui auront pour centre l'origine.

Les équations $u = 0$, $\theta = 0$, $r = 0$ appartiendront en particulier, la première au plan fixe, la deuxième à l'axe fixe, la troisième au point unique pris pour origine.

Cela posé, le volume représenté par $\psi(u, \theta, r)$ se trouve terminé, 1° par deux plans qui renfermeront l'axe fixe, et comprendront entre eux un angle égal à u ; 2° par une portion de surface conique dont la génératrice formera avec l'axe fixe l'angle u ; 3° par une portion de zone sphérique dont la hauteur est équivalente à

$$r(1 - \cos u),$$

et l'aire, au produit

$$2\pi r[r(1 - \cos u)] = 2\pi r^2(1 - \cos u).$$

Le volume sera donc une partie de secteur sphérique qui a pour base cette zone et dont le volume est en conséquence

$$\tfrac{1}{3} r . 2\pi r^2 (1 - \cos u) = \tfrac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos u).$$

Ajoutons que le volume $\psi(u, \theta, r)$ sera au secteur sphérique dans le rapport de θ à 2π, d'où l'on conclura

$$\psi(u, \theta, r) = \frac{\theta}{2\pi}\frac{2\pi}{3} r^3(1 - \cos u),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\psi(u, \theta, r) = \frac{r^3}{3}(1 - \cos u)\theta;$$

on aura donc

$$w = \frac{d^3\psi(u, \theta, r)}{du\,d\theta\,dr} = r^2 \sin u,$$

et par suite

$$V = \int_{u_0}^{U}\int_{\theta}^{\Theta}\int_{r}^{R} r^2 \sin u\,du\,d\theta\,dr.$$

Dans ces dernières équations, r et R sont des fonctions des variables u et θ; θ et Θ des fonctions de la seule variable u, et u_0, U des quantités constantes.

On arriverait encore à cette expression du volume V en remarquant que l'accroissement infiniment petit du volume correspondant aux accroissements simultanés du, $d\theta$, dr peut être considéré comme un parallélipipède rectangle dont les trois dimensions sont rdu, $r\sin u d\theta$, dr, et qui a pour valeur $r^2 \sin u d\theta dr$.

DIX-SEPTIÈME LEÇON.

Réduction des intégrales multiples. Première méthode : par un changement de coordonnées.

---

101. La réduction des intégrales multiples a été, dans ces derniers temps, l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres, parmi lesquels nous nommerons seulement MM. Cauchy, Lejeune-Dirichlet, Liouville, Lamé, Catalan, Tortolini. Nous avons pensé qu'on nous saurait bon gré d'exposer avec quelques développements la marche qu'ils ont suivie et les résultats importants auxquels ils sont arrivés.

La première méthode de réduction consiste à substituer aux anciennes coordonnées des coordonnées nouvelles dont l'emploi rendra l'intégration plus facile.

La position d'un point dans l'espace est ordinairement déterminée par trois coordonnées rectilignes x, y, z, parallèles à trois axes fixes, ou par trois coordonnées polaires qui peuvent être, par exemple, le rayon vecteur r ou la distance du point à l'origine des coordonnées; l'angle θ que la projection du rayon vecteur sur le plan $\overline{zy}$ fait avec l'axe des y, et l'angle u du rayon vecteur avec l'axe des x. Dans le cas où les axes sont rectangulaires les coordonnées polaires sont liées aux coordonnés rectilignes

par les équations connues

$$x = r\cos u,\quad y = r\cos u\cos\theta,\quad z = r\sin u\sin\theta.$$

102. Dans ses intéressants Mémoires sur la théorie de la chaleur, M. Lamé a fait usage d'un nouveau genre de coordonnées qu'il a appelées elliptiques. Un point quelconque de l'espace est alors considéré comme l'intersection de trois surfaces dépendantes chacune d'un paramètre variable. Ainsi, par exemple, un point quelconque de l'espace peut être défini comme l'intersection des trois surfaces

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

En supposant

$$b<c,\quad \lambda>c>b,\quad \mu>b<c,\quad \nu<b<c,$$

ces trois surfaces seront, la première un ellipsoïde, la seconde un hyperboloïde à une nappe, la troisième un hyperboloïde à deux nappes. Les distances focales $2b$, $2c$, $2\sqrt{c^2-b^2}$ des sections principales sont un élément commun à toutes les surfaces que l'on peut obtenir en faisant varier les trois paramètres λ, μ, ν. Cette propriété a fait donner à ces surfaces le nom d'homofocales.

En employant une méthode d'élimination convenable (*),

(*) M. Jacques Binet a donné, pour faire cette élimination, un moyen d'autant plus ingénieux et plus simple, qu'il s'applique à un nombre quelconque d'équations; voici en quoi il consiste. Considérons n équa-

on arrivera aux trois équations

$$bcx = \lambda\mu\nu,$$
$$by\sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{\lambda^2-b^2}\ \sqrt{\mu^2-b^2}\ \sqrt{b^2-\nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2-b^2} = \sqrt{\lambda^2-c^2}\ \sqrt{c^2-\mu^2}\ \sqrt{c^2-\nu^2},$$

qui donnent x, y, z en fonction de λ, μ, ν; et les valeurs

---

tions de la forme

$$\frac{\xi}{\xi_1-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_1-6}+\frac{\zeta}{\xi_1-\gamma}+\text{etc.} = 1,$$
$$\frac{\xi}{\xi_2-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_2-6}+\frac{\zeta}{\xi_2-\gamma}+\text{etc.} = 1,$$
$$\frac{\xi}{\xi_3-\alpha}+\frac{\eta}{\xi_3-6}+\frac{\zeta}{\xi_3-\gamma}+\text{etc.} = 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

et cherchons les valeurs des n inconnues $\xi, \eta, \zeta,\ldots$ exprimées au moyen de $\xi_1, \xi_2, \xi_3,\ldots, \alpha, 6, \gamma,\ldots$ Pour cela, posons

$$F(x) = (x-\alpha)\ (x-6)\ (x-\gamma)\ldots,$$
$$f(x) = (x-\xi_1)\ (x-\xi_2)\ (x-\xi_3)\ldots.$$

La différence $F(x)-f(x)$ sera un polynôme du degré $n-1$, et puisque dans la fraction $\frac{F(x)-f(x)}{F(x)}$ le degré du numérateur sera inférieur au moins d'une unité au degré du dénominateur, on aura identiquement, en vertu des principes qui donnent la décomposition des fractions rationnelles,

$$\frac{F(x)-f(x)}{F(x)} = \frac{F(\alpha)-f(\alpha)}{F'(\alpha)}\ \frac{1}{x-\alpha}+\frac{F(6)-f(6)}{F'(6)}\ \frac{1}{x-6}$$
$$+\frac{F(\gamma)-f(\gamma)}{F'(\gamma)}\ \frac{1}{x-\gamma}+\text{etc.}$$

En faisant tour à tour, dans cette équation,

$$x=\xi_1,\quad x=\xi_2,\quad x=\xi_3,\ldots,$$

et ayant égard aux équations

$$F(\alpha)=0,\quad F(6)=0,\quad F(\gamma)=0,\ldots,$$
$$f(\xi_1)=0,\quad f(\xi_2)=0,\quad f(\xi_3)=0,\ldots,$$

on trouvera

de x^2, y^2, z^2 satisfont à une même équation du sixième degré. En effet, en ordonnant l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1$$

par rapport à λ, et posant

$$\begin{aligned}
A &= x^2+y^2+z^2+b^2+c^2,\\
B &= x^2(b^2+c^2)+y^2c^2+z^2b^2+b^2c^2,\\
C &= b^2c^2x^2,
\end{aligned}$$

on trouve

$$\lambda^6 - A\lambda^4 + B\lambda^2 - C = 0.$$

Si, au lieu de partir de l'équation de l'ellipsoïde, on était

---

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_1-\alpha}-\frac{f(6)}{F'(6)}\frac{1}{\xi_1-6}-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_1-\gamma}-\ldots=1,$$

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_2-\alpha}-\frac{f(6)}{F'(6)}\frac{1}{\xi_2-6}-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_2-\gamma}-\ldots=1,$$

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{\xi_3-\alpha}-\frac{f(6)}{F'(6)}\frac{1}{\xi_3-6}-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{\xi_3-\gamma}-\ldots=1.$$

Ces équations sont des équations identiques, vraies quels que soient $\alpha, 6, \gamma, \ldots, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$. Or elles se réduisent aux équations proposées quand on fait

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}=\xi=-\frac{(\alpha-\xi_1)(\alpha-\xi_2)(\alpha-\xi_3)}{(\alpha-6)(\alpha-\gamma)\ldots},$$

$$-\frac{f(6)}{F'(6)}=\eta=-\frac{(6-\xi_1)(6-\xi_2)(6-\xi_3)}{(6-\alpha)(6-\gamma)\ldots},$$

$$-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}=\zeta=-\frac{(\gamma-\xi_1)(\gamma-\xi_2)(\gamma-\xi_3)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-6)\ldots}.$$

....

Donc ces dernières valeurs rendront aussi identiques les équations proposées, et sont les valeurs cherchées des inconnues $\xi, \eta, \zeta, \ldots$.

Pour revenir au cas des trois équations que nous avons d'abord considérées, il suffit évidemment de poser, dans les formules qui précèdent,

$$\xi=x^2,\ \eta=y^2,\ \zeta=z^2;\ \xi_1=\lambda^2,\ \xi_2=\mu^2,\ \xi_3=\nu^2;\ \alpha=0,\ 6=b^2,\ \gamma=c^2.$$

parti des équations des hyperboloïdes, on serait arrivé à la même équation du sixième degré, et par conséquent λ^2, μ^2, ν^2 étant à la fois racines de cette équation, l'on aura

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = A, \quad \lambda^2\mu^2 + \lambda^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 = B, \quad \lambda^2\mu^2\nu^2 = C.$$

Or si entre ces trois équations jointes à l'équation du sixième degré on élimine tour à tour λ, ou μ, ou ν, on retombera sur les équations des surfaces homofocales.

103. Ces surfaces, qui ont entre elles huit points de commun, jouissent de propriétés relatives fort remarquables. Leurs plans tangents au point (x, y, z) ont pour équations

$$\frac{x\xi}{\lambda^2} + \frac{y\eta}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z\zeta}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

$$\frac{x\xi}{\mu^2} + \frac{y\eta}{\mu^2 - b^2} - \frac{z\zeta}{c^2 - \mu^2} = 1,$$

$$\frac{x\xi}{\nu^2} - \frac{y\eta}{b^2 - \nu^2} - \frac{z\zeta}{c^2 - \nu^2} = 1,$$

et sont perpendiculaires l'un à l'autre; car en appelant α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les angles que les perpendiculaires à ces trois plans font avec les axes, on a

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{x}{\lambda^2}} = \frac{\cos\beta}{\frac{y}{\lambda^2 - b^2}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{z}{\lambda^2 - c^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{\frac{x}{\mu^2}} = \frac{\cos\beta'}{\frac{y}{\mu^2 - b^2}} = -\frac{\cos\gamma'}{\frac{z}{c^2 - \mu^2}},$$

$$\frac{\cos\alpha''}{\frac{x}{\nu^2}} = -\frac{\cos\beta''}{\frac{y}{b^2 - \nu^2}} = -\frac{\cos\gamma''}{\frac{z}{c^2 - \nu^2}}.$$

Or les équations qui donnent x, y, z en fonction de λ, μ, ν, conduisent aux identités

$$\frac{x^2}{\lambda^2\mu^2}+\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)}-\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}=\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\text{etc.}=0,$$

$$\frac{x^2}{\lambda^2\nu^2}-\frac{y^2}{(\lambda^2-b^2)(b^2-\nu^2)}-\frac{z^2}{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)}=\cos\alpha\cos\alpha''+\cos\beta\cos\beta''+\text{etc}=0,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2}-\frac{y^2}{(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}+\frac{z^2}{(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}=\cos\alpha'\cos\alpha''+\cos\beta'\cos\beta''+\text{etc.}=0.$$

En vertu de ces identités, les cosinus des angles que font entre eux les plans tangents étant nuls, ces plans sont perpendiculaires entre eux. Il en résulte qu'une surface homofocale coupe normalement toutes les surfaces des deux autres systèmes.

Considérons en particulier un des ellipsoïdes représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1.$$

En un quelconque M de ses points passent deux hyperboloïdes, l'un à une nappe, l'autre à deux nappes, ayant les mêmes foyers que cet ellipsoïde, tels que leurs plans tangents étant toujours perpendiculaires au plan tangent de l'ellipsoïde, ils se coupent suivant une courbe à double courbure, dont le plan osculateur soit toujours normal à l'ellipsoïde proposé. Soit M′ un point de cette intersection voisin de M et situé sur un second ellipsoïde qui, infiniment voisin du premier, ait pour paramètre $\lambda+d\lambda$; appelons $d_\lambda s$ l'élément MM′, et $d_\lambda x$, $d_\lambda y$, $d_\lambda z$ ses trois projections sur les axes. Il est évident qu'en passant de M à M′, μ et ν restent constants, et que λ est la seule coordonnée elliptique qui varie. On aura donc, en

différentiant par rapport à λ les trois équations qui donnent x, y, z en fonction de λ, μ, ν,

$$bcd_\lambda x = \mu\nu d\lambda,$$

$$bd_\lambda y\sqrt{c^2-b^2} = \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}}d\lambda,$$

$$cd_\lambda z\sqrt{c^2-b^2} = \frac{\lambda\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-c^2}}d\lambda,$$

et par suite, toute réduction faite,

$$d_\lambda s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}}d\lambda.$$

Pareillement si l'on désignait par $d_\mu s$, $d_\nu s$ les éléments des courbes d'intersection de l'ellipsoïde avec l'hyperboloïde à deux nappes, ou de l'hyperboloïde à une nappe avec l'ellipsoïde, on trouverait

$$d_\mu s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{c^2-\mu^2}},$$

$$d_\nu s = \frac{\sqrt{\lambda^2-\nu^2}\sqrt{\mu^2-\nu^2}}{\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}.$$

Toutes les courbes dont $d_\mu s$, $d_\nu s$ sont les éléments, et suivant lesquelles un même ellipsoïde est coupé par tous les hyperboloïdes homofocaux, ne sont autres que les lignes de courbure de sa surface. En effet (*Calcul différentiel*, n° 198), l'équation des lignes de courbure de l'ellipsoïde dont les axes sont λ^2, λ^2-b^2, λ^2-c^2, est

$$x(c^2-b^2)dydz - c^2ydzdx + b^2zdxdy = 0,$$

ou, en divisant par $dxdydz$,

$$(c^2-b^2)\frac{x}{dx} - c^2\frac{y}{dy} + b^2\frac{z}{dz} = 0,$$

ou

$$b^2\left(\frac{z}{dz}-\frac{x}{dx}\right)=c^2\left(\frac{y}{dy}-\frac{x}{dx}\right).$$

Quand on chemine sur une des courbes dont $d_\mu s$ est l'élément, λ et ν sont constants, μ varie seul, et l'on a

$$\frac{x}{dx}=\frac{x}{d_\mu x}=\frac{\mu}{d\mu},\quad \frac{y}{dy}=\frac{y}{d_\mu y}=\frac{\mu^2-b^2}{\mu d\mu},$$
$$\frac{z}{dz}=\frac{z}{d_\mu z}=\frac{\mu^2-c^2}{\mu d\mu}.$$

Or ces valeurs substituées dans l'équation des lignes de courbure la rendent identique, donc les courbes dont $d_\mu s$ est l'élément, forment un système de lignes de courbure de l'ellipsoïde; il en est de même des courbes $d_\nu s$, pour lesquelles on a

$$\frac{x}{dx}=\frac{x}{d_\nu x}=\frac{\nu}{d\nu},\quad \frac{y}{dy}=\frac{y}{d_\nu y}=\frac{\nu^2-b^2}{\nu d\nu},$$
$$\frac{z}{dz}=\frac{z}{d_\nu z}=\frac{\nu^2-c^2}{\nu d\nu},$$

expressions qui rendent encore identique l'équation

$$(c^2-b^2)\frac{x}{dx}-c^2\frac{y}{dy}+b^2\frac{z}{dz}=0.$$

Il reste donc prouvé, en vertu de ce qui précède, que toutes les surfaces homofocales de deux quelconques des trois systèmes rencontrent normalement une surface courbe quelconque du troisième système et tracent sur elle toutes ses lignes de courbure.

104. Quelquefois, aux trois surfaces que nous avons considérées on substitue des variétés de ces surfaces, la sphère,

par exemple, à l'ellipsoïde; les deux cônes obliques à base elliptique aux deux hyperboloïdes. Dans ce cas, en appelant r le rayon de la sphère, ou son paramètre, b et $c>b$ deux constantes, $\mu \gtrless {b \atop c}$ et $\nu < b < c$ deux autres paramètres variables, on aura les trois équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \quad \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0,$$

dont les deux dernières représentent les cônes asymptotiques des hyperboloïdes à une ou à deux nappes. Les deux cônes et la sphère formant un ensemble de surfaces orthogonales, les coordonnées x, y, z sont liées aux coordonnées r, μ, ν par les équations

$$bcx = r\mu\nu,$$
$$by\sqrt{c^2 - b^2} = r\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2 - b^2} = r\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

Nous montrerons bientôt le parti que l'on peut tirer de la transformation des coordonnées pour la réduction de certaines intégrales multiples.

Mais auparavant rappelons en peu de mots les formules générales qui, dans le calcul intégral, servent au changement des variables indépendantes.

DIX-HUITIÈME LEÇON.

Continuation de la leçon précédente. — Formule générale pour la transformation des variables dans les intégrales multiples.

---

105. Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une intégrale double

$$\int\int \mathrm{U}dxdy = \int\int \mathrm{F}(x, y)dxdy,$$

et qu'aux variables indépendantes x, y on veuille substituer deux nouvelles variables t et u, dont x et y soient des fonctions déterminées. On commencera d'abord par voir ce que devient la fonction $\mathrm{U} = \mathrm{F}(x, y)$, puis on calculera le produit $dxdy$ de la manière suivante. x, y étant des fonctions déterminées de t et de u, en représentant par x'_t, x'_u, y'_t, y'_u les dérivées partielles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{du}$, on aura

$$dx = x'_t dt + x'_u du, \quad dy = y'_t dt + y'_u du.$$

On se tromperait évidemment si, pour obtenir le produit $dx\,dy$, on multipliait entre elles ces deux valeurs, car dans l'intégrale double donnée les deux variables x et y étant indépendantes, y doit rester constant quand on différentie par rapport à x; la différentielle dx suppose y constant, et pour l'obtenir il faut nécessairement faire

$dy = 0$; on a ainsi

$$dx = x'_t dt + x'_u du, \quad 0 = y'_t dt + y'_u du;$$

en éliminant du entre ces deux équations, on trouve

$$dx = \frac{x'_t y'_u - y'_t x'_u}{y'_u} dt.$$

Si l'on substituait cette valeur dans l'intégrale double et qu'on éliminât à la fois x et u, ce qui est toujours possible, elle deviendrait fonction seulement de y et de t. Dès lors ces deux variables devraient être indépendantes, l'existence de dy supposerait dt nul, et l'équation

$$dy = y'_t dt + y'_u du,$$

réduite momentanément à $dy = y'_u du$, donnerait la valeur de dy, et par suite de $dxdy$. Par cette transformation, l'intégrale double deviendrait

$$\int\int \varphi(t, u)(x'_t y'_u - y'_t x'_u)\, dt\, du.$$

Prenons pour exemple l'intégrale

$$\int\int dxdy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

le produit $dxdy$ est déjà calculé en vertu de ce qui précède; reste à déterminer $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ en fonction de t et de u. z fonction de x et de y est, par rapport à t et u, une fonction de fonction; on aura donc

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dt},$$

ou

$$z'_t = \frac{dz}{dx} x'_t + \frac{dz}{dy} y'_t;$$

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du},$$

ou

$$z'_u = \frac{dz}{dx} x'_u + \frac{dz}{dy} y'_u.$$

De ces deux équations on tire facilement les valeurs de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$, qui sont

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y'_u z'_t - y'_t z'_u}{x'_t y'_u - y'_t x'_u}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{x'_t z'_u - x'_u z'_t}{x'_t y'_u - y'_t x'_u}.$$

En substituant ces valeurs ainsi que celles de $dxdy$ dans l'intégrale double, on la ramène immédiatement à la forme

$$\int\int dtdu \sqrt{(x'_t y'_u - x'_u y'_t)^2 + (z'_t x'_u - z'_u x'_t)^2 + (y'_t z'_u - y'_u z'_t)^2}.$$

106. Passons à l'intégrale triple

$$\int\int\int \text{U}\, dx\, dy\, dz = \int\int\int \text{F}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Aux variables x, y, z on veut substituer trois nouvelles variables t, u, v, liées aux premières par des équations données. En désignant encore par x'_t, x'_u, x'_v, y'_t, y'_u, y'_v, z'_t, z'_u, z'_v les dérivées partielles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx}{du}$, ..., on aura

$$\begin{aligned} dx &= x'_t\, dt + x'_u\, du + x'_v\, dv, \\ dy &= y'_t\, dt + y'_u\, du + y'_v\, dv, \\ dz &= z'_t\, dt + z'_u\, du + z'_v\, dv. \end{aligned}$$

Pour obtenir la valeur du produit $dx\, dy\, dz$, dans lequel x, y, z sont considérés comme des variables indépendantes, on calcule d'abord la valeur de dx en supposant y et z constants, c'est-à-dire en faisant $dy = 0$, $dz = 0$, on détermine ainsi dx en fonction de dt au moyen des trois équations

$$\begin{aligned} dx &= x'_t\, dt + x'_u\, du + x'_v\, dv, \\ 0 &= y'_t\, dt + y'_u\, du + y'_v\, dv, \\ 0 &= z'_t\, dt + z'_u\, du + z'_v\, dv, \end{aligned}$$

entre lesquelles on élimine facilement du et dv. On trouve de cette manière

$$du = \frac{z'_t y'_v - y'_t z'_v}{y'_u z'_v - y'_v z'_u}\, dt, \quad dv = \frac{y'_t z'_u - z'_t y'_u}{y'_u z'_v - y'_v z'_u}\, dt,$$

$$dx = \frac{x'_t(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)}{y'_u z'_v - y'_v z'_u}\, dt.$$

Cette valeur ramenant le produit $dx\,dy\,dz$ aux variables t, y, z, on trouvera dy en faisant $dt = 0$, $dz = 0$, ce qui donne

$$dy = y'_u du + y'_v dv; \quad 0 = z'_u du + z'_v dv.$$

Mettant dans la valeur de dy celle de dv qui est $-\frac{z'_u du}{z'_v}$, il viendra

$$dy = \frac{y'_u z'_v - y'_v z'_u}{z'_v}\, du.$$

Enfin les variables actuelles étant t, u et z, pour obtenir dz, il faudra faire $dt = 0$, $du = 0$, et l'on aura

$$dz = z'_v\, dv.$$

Multipliant entre elles les valeurs de dx, dy, dz, on changera l'intégrale triple $\int\int\int \mathrm{V}\, dx\, dy\, dz$ en

$$\int\int\int \mathrm{V} dt du dv [x'_t(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)].$$

Si V était égal à 1, ou si l'intégrale triple donnée était simplement $\int\int\int dx\, dy\, dz$, elle deviendrait

$$\int\int\int dt du dv [x'_t(y'_u z'_v - y'_v z'_u) + y'_t(z'_u x'_v - z'_v x'_u) + z'_t(x'_u y'_v - x'_v y'_u)].$$

107. Ces formules de transformation ont été employées d'abord par Euler, en 1769, puis par Lagrange en 1773. La démonstration que nous venons d'en donner d'après

M. Lacroix laisse beaucoup à désirer. On n'avait d'ailleurs étudié jusqu'ici ce changement de variables que dans le cas d'une intégrale double ou triple, il restait encore à donner et à démontrer rigoureusement la formule générale de transformation. Cette lacune a été remplie tout récemment par M. Jacobi d'abord, puis par M. Catalan. M. Cauchy, à ma prière, s'est aussi occupé du même sujet; et, comme toujours, la méthode qu'il a suivie est remarquable par sa précision et son élégance. Pour bien comprendre ce qui va suivre, rappelons-nous que la valeur de l'une quelconque des n inconnues déterminées par les n équations du premier degré

$$\begin{array}{l} a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 t = k_0, \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 t = k_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} t = k_{n-1}, \end{array}$$

celle de l'inconnue x, par exemple, est donnée par la formule symbolique

$$x = \frac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)(c-b)\ldots(h-b)\ldots\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)(c-b)\ldots(h-b)\ldots\ldots(h-g)},$$

dans laquelle, après le développement, on doit remplacer les exposants $0, 1, 2, \ldots, n$ par des indices. La seule inspection de cette formule prouve, 1° que le dénominateur commun des valeurs des inconnues est indépendant des termes constants $k_0, k_1, \ldots, k_n$; 2° que le numérateur de chaque inconnue se déduit du dénominateur commun en remplaçant les coefficients de cette inconnue par les quantités constantes $k_0, k_1, k_2, \ldots$

Si l'on représente par la notation

$$\Sigma(a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})$$

la somme qu'on obtient quand au produit $a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}$ pris avec le signe $+$, on ajoute tous ceux qu'on en peut déduire à l'aide des échanges opérés entre les indices $0, 1, 2, 3, \ldots, n-2, n-1$, chacun des nouveaux produits étant pris avec le signe $+$ ou le signe $-$, suivant qu'on le déduit du premier à l'aide d'un nombre pair ou d'un nombre impair d'échanges successifs, le dénominateur commun D sera égal à la somme

$$\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1},$$

et l'on aura

$$x = \frac{\Sigma(\pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}.$$

Si les constantes $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ étaient nulles, on aurait évidemment

$$x = \frac{k_0 \Sigma(\pm b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}{\Sigma(\pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1})}.$$

108. Cela posé, considérons l'intégrale d'ordre n

$$S = \int\int\int \ldots F(x, y, z, \ldots, t) dx dy dz \ldots dt = \int\int\int \ldots U dx dy dz \ldots dt,$$

et supposons qu'il s'agisse de substituer aux variables $x, y, z, \ldots, t$ d'autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ liées aux premières par les n équations

$$x = f_0(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau), \quad y = f_1(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau),$$
$$z = f_2(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau), \ldots, t = f_{n-1}(\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau).$$

Admettons que dans S on intègre en premier lieu par rapport à x, on devra alors regarder $y, z, \ldots, t$ comme constants dans les équations données qui renfermeront ainsi $n+1$ variables $\xi, \eta, \ldots, \tau, x$; et en les différentiant

on trouvera

$$\begin{aligned} dx &= D_\xi x d\xi + D_\eta x d\eta + \ldots + D_\tau x d\tau, \\ 0 &= D_\xi y d\xi + D_\eta y d\eta + \ldots + D_\tau y d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= D_\xi t d\xi + D_\eta t d\eta + \ldots + D_\tau t d\tau. \end{aligned}$$

et par conséquent, si l'on fait

$$\begin{aligned} L &= \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\tau t), \\ M &= \Sigma(\pm D_\eta y D_\zeta z \ldots\ldots D_\tau t), \end{aligned}$$

on aura

$$d\xi = \frac{M}{L} dx, \quad dx = L \frac{d\xi}{M}.$$

Par suite

$$S = \int\int\int \ldots U L d\xi \frac{dy\, dz \ldots dt}{M}.$$

En considérant maintenant y comme seul variable, $z, \ldots, t$ comme constants, on trouvera

$$\begin{aligned} dy &= D_\eta y d\eta + D_\zeta y d\zeta + \ldots + D_\tau y d\tau, \\ 0 &= D_\eta z d\eta + D_\zeta z d\zeta + \ldots + D_\tau z d\tau, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= D_\eta t d\eta + \ldots\ldots\ldots + D_\tau t d\tau, \end{aligned}$$

et en posant

$$N = \Sigma \pm D_\zeta z \ldots D_\tau t,$$

$$d\eta = \frac{N}{M} dy, \quad \frac{dy}{M} = \frac{d\eta}{N},$$

$$S = \int\int\int \ldots\ldots U L d\xi d\eta \frac{dz \ldots\ldots dt}{N},$$

on aura donc

$$S=\int\int\int\ldots UL d\xi \frac{dy dz\ldots dt}{M}=\int\int\int\ldots UL d\xi d\eta \frac{dz\ldots dt}{N}=\ldots\ldots$$

D'ailleurs la dernière des sommes L, M, N doit évidemment être remplacée par l'unité; car si, par exemple, on considère seulement trois variables x, y, z, après les deux systèmes d'équations qui ont donné $d\xi$, $d\eta$, on obtiendra l'équation suivante

$$dz = D_\zeta z\, dz, \quad dz = N d\zeta,$$

de laquelle on tire

$$\frac{dz}{N}=\frac{d\zeta}{1}.$$

Donc, après avoir éliminé toutes les variables $x, y, z, \ldots$, on aura définitivement

$$\begin{aligned} S &= \int\int\int\ldots UL d\xi d\eta d\zeta\ldots d\tau \\ &= \int\int\int\ldots U d\xi d\eta d\zeta\ldots d\tau\, \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z\ldots D_\tau t \\ &= \int\int\int\ldots U d\xi d\eta d\zeta\ldots d\tau\, \Sigma(\pm D_\xi f_0 D_\eta f_1\ldots D_\tau f_{n-1}). \end{aligned}$$

Pour obtenir la somme du second membre, il faut permuter de toutes les manières possibles les variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$.

109. *Scolie.* $x, y, z, \ldots, s$ étant $n-1$ variables fonctions de $n-1$ autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma$, on aura, en vertu de ce qui précède,

$$dx dy dz\ldots ds = \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z\ldots D_\sigma s) d\xi d\eta d\zeta\ldots d\sigma.$$

Supposons maintenant que ces mêmes variables $x, y, \ldots, s$ soient fonctions de n autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, τ étant lui-même une fonction dépendante de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma$ déterminée par l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t) = 0,$$

t désignant une nouvelle fonction de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$.

Dans l'expression

$$\Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\sigma s)$$

il faudra remplacer l'un quelconque des facteurs $D_\lambda p = \frac{dp}{d\lambda}$ par la somme $\frac{dp}{d\lambda} + \frac{dp}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda}$. En différentiant, par rapport à λ, l'équation $f = 0$, on a

$$\frac{df}{d\lambda} + \frac{df}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = 0, \quad D_\lambda \tau = \frac{d\tau}{d\lambda} = -\frac{D_\lambda f}{D_\tau f},$$

et par suite

$$\frac{dp}{d\lambda} + \frac{dp}{d\tau}\frac{d\tau}{d\lambda} = D_\lambda p + D_\tau p D_\lambda \tau = D_\lambda p - D_\tau p \frac{D_\lambda f}{D_\tau f}.$$

Mais puisque λ est fonction de $x, y, z, \ldots, t$, on aura aussi

$$D_\lambda f = D_x f D_\lambda x + D_y f D_\lambda y + D_z f D_\lambda z + \ldots + D_t f D_\lambda t;$$

en substituant, on trouvera que l'expression $dx dy dz \ldots ds$ doit être remplacée par l'expression

$$\frac{D_t f}{D_\tau f} \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots \ldots D_\tau t).$$

On arrive ainsi au théorème suivant : si les n variables $x, y, z, \ldots, t$, fonction de n autres variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$, sont liées entre elles par l'équation

$$f(x, y, z, \ldots, t) = 0,$$

on aura nécessairement

$$\frac{dx\, dy\, dz \ldots dt}{D_t f} = \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y D_\zeta z \ldots D_\tau t) \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots d\tau}{D_\tau f}.$$

Exemple : Si les variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots, \tau$ étaient liées aux variables $x, y, z, \ldots\ldots, t$ par n équations linéaires

$$\xi = a_0 x + b_0 y + c_0 z + \ldots + h_0 t,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\tau = a_{n-1} x + b_{n-1} y + c_{n-1} z + \ldots + h_{n-1} t,$$

on aurait

$$\frac{dx\,dy\,dz\ldots dt}{D_t f} = \Sigma \pm (a_0 b_1 c_2 \ldots h_{n-1}) \frac{d\xi d\eta d\zeta \ldots d\tau}{D_\tau f} = \frac{d\xi d\eta \ldots d\tau}{D_\tau f}.$$

Si de plus

$$f(x, y, z, \ldots, t) = x^2 + y^2 \ldots + t^2 - 1 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \ldots + \tau^2 - 1,$$

il viendra

$$D_t f = 2t, \quad D_\tau f = 2\tau,$$
$$\frac{dx\,dy\,dz\ldots dt}{t} = \frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta\ldots d\tau}{\tau}.$$

110. Voici en peu de mots comment procède M. Catalan. Admettons que les variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$ sont liées aux variables $x, y, z, \ldots, t$ par les n équations

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \ldots, \quad f_{n-1} = 0,$$

et supposons que dans S on intègre en premier lieu par rapport à x; on devra alors regarder $y, z, \ldots, t$ comme constants dans les équations données, lesquelles renfermeront $n + 1$ variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots\ldots, \tau, x$, et si l'on prend ξ pour variable indépendante, on aura, pour déterminer dx en fonction de $d\xi$, les n équations

$$D_x f_0\, dx + D_\xi f_0\, d\xi + \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_x f_{n-1} dx + D_\xi f_{n-1} d\xi + \ldots + D_\tau f_{n-1}\, d\tau = 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(1)\left\{\begin{array}{l} D_x f_0\,dx + D_\eta f_0\,d\eta + \ldots + D_\tau f_0\,d\tau = -D_\xi f_0 d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x f_{n-1}dx + D_\eta f_{n-1}d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1}d\tau = -D_\xi f_{n-1}d\xi, \end{array}\right.$$

et qui donneront pour dx une valeur de la forme

$$dx = -\frac{N_0}{D_0}d\xi.$$

En substituant cette valeur dans S et employant les équations données à éliminer x, η, $\zeta, \ldots, \tau$, S sera exprimé au moyen de n variables y, $z, \ldots, t$ et ξ. Si l'on veut maintenant intégrer par rapport à y, on devra considérer toutes les autres quantités comme constantes, c'est-à-dire, en répétant le raisonnement ci-dessus, que dy sera donnée en fonction des nouvelles variables et de $d\eta$ au moyen des n équations

$$(*)\quad \begin{array}{l} D_x f_0\,dx + D_y f_0\,dy + D_\eta f_0\,d\eta + \ldots + D_\tau f_0\,d\tau = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x f_{n-1}dx + D_y f_{n-1}dy + D_\eta f_{n-1}d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1}d\tau = 0, \end{array}$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$\begin{array}{l} D_x f_0\,dx + D_y f_0\,dy + \ldots + D_\tau f_0\,d\tau = -D_\eta f_0 d\eta, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x f_{n-1}dx + D_y f_{n-1}dy + \ldots + D_\tau f_{n-1}d\tau = -D_\eta f_{n-1}d\eta. \end{array}$$

On déduira de ces équations

$$dy = -\frac{N_1}{D_1}d\eta;$$

continuant de la même manière, on verra que l'on sera

(*) Quoique dx s'évanouisse avec $d\xi$, quand on suppose ξ constant, on différentie par rapport à x, à cause des variables η, $\zeta, \ldots, \tau$ que x renferme implicitement.

enfin conduit à résoudre le système suivant

$$D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + \ldots + D_t f_0\, dt + D_\tau f_0\, d\tau = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + \ldots + D_t f_{n-1} dt + D_\tau f_{n-1} d\tau = 0,$$

que l'on pourra écrire comme il suit

$$D_x f_0\, dx + D_y f_0\, dy + \ldots + D_t f_0\, dt = -D_\tau f_0\, d\tau,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1}\, dx + D_y f_{n-1}\, dy + \ldots + D_t f_{n-1}\, dt = -D_\tau f_{n-1}\, d\tau,$$

et qui donnera

$$dt = -\frac{N_{n-1}}{D_{n-1}} d\tau;$$

donc

$$dx\, dy dz \ldots dt = (-1)^n \frac{D_0}{N_0} \frac{N_1}{D_1} \frac{N_2}{D_2} \cdots \frac{N_{n-1}}{D_{n-1}}.$$

Mais cette expression peut être considérablement simplifiée. En effet, pour obtenir le numérateur N_1, il suffit de remplacer dans la valeur de D_1 le coefficient de dy, $D_y f_0$, par le coefficient de $d\eta$, $D_\eta f_0$, entrant dans la même équation ; il résulte de cette observation et de ce que le dénominateur commun ne change pas quand les seconds membres des équations linéaires varient, que le numérateur N_1 est égal au dénominateur relatif aux équations

$$D_x f_0 \alpha_0 + D_\eta f_0 \alpha_1 + \ldots + D_\tau f_0 \alpha_{n-1} = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_x f_{n-1} \alpha_0 + D_\eta f_{n-1} \alpha_1 + \ldots + D_\tau f_{n-1} \alpha_{n-1} = 1.$$

Or ce dénominateur est le même que celui du groupe (1), donc

$$N_1 = D_0.$$

On trouverait de même que

$$N_2 = D_1, \quad N_3 = D_2, \ldots, \quad N_{n-1} = D_{n-2},$$

donc

$$dx = -\frac{N_0}{D_0}d\xi, \quad dy = -\frac{D_0}{D_1}d\eta, \ldots, \quad dt = -\frac{D_{n-2}}{D_{n-1}}d\tau,$$

et par suite

$$dx\,dy\,dz \ldots dt = (-1)^n \frac{N_0}{D_{n-1}} d\xi\,d\eta\,d\zeta \ldots d\tau.$$

111. On peut, à l'aide d'une règle empirique très-simple, retrouver cette formule de transformation. Observons pour cela que l'on déduit N_0 de D_0 en remplaçant le coefficient de dx par le coefficient de $d\xi$; donc puisque le dénominateur commun ne dépend que des coefficients du premier membre, et nullement du second membre, non plus que de la dénomination des inconnues, on peut dire que N_0 est le dénominateur commun relatif aux équations

$$\begin{array}{l} D_\xi f_0\, d\xi \;+ D_\eta f_0\, d\eta \;+ \ldots + D_\tau f_0\, d\tau = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_\xi f_{n-1}\, d\xi + D_\eta f_{n-1} d\eta + \ldots + D_\tau f_{n-1}\, d\tau = 1, \end{array}$$

tandis que D_{n-1} sera celui qui correspond aux systèmes d'équations

$$\begin{array}{l} D_x f_0\, dx \;+ D_y f_0\, dy \;+ \ldots + D_t f_0\, dt = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x f_{n-1} dx + D_y f_{n-1} dy + \ldots + D_t f_{n-1}\, dt = 1. \end{array}$$

Différentiez donc chacune des équations

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 0, \ldots, \quad f_{n-1} = 0,$$

en regardant comme indépendantes toutes les variables,

égalez à zéro ou à une constante, la partie qui dépend des anciennes différentielles; et à zéro ou à une constante la partie relative aux nouvelles différentielles; vous aurez de la sorte deux groupes de n équations chacun. Dans le premier groupe entreront comme inconnues les différentielles des variables primitives, et dans le second les différentielles des nouvelles variables; si vous désignez par D le dénominateur pour le premier groupe et par Δ le dénominateur pour le second, vous aurez, pour la formule de transformation cherchée,

$$D dx\, dy\, dz \ldots dt = \pm \Delta d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots d\tau.$$

On emploie le double signe au lieu de $(-1)^n$ parce que les dénominateurs D, Δ pouvant changer de signe suivant l'ordre dans lequel les équations qui servent à les former auront été écrites, il est impossible de décider le signe d'avance. Dans chaque cas particulier l'indétermination cessera. On a d'ailleurs

$$D = \Sigma(\pm D_x f_0 D_y f_1 \ldots D_t f_{n-1}),$$
$$\Delta = \Sigma(\pm D_\xi f_0 D_\eta f_1 \ldots D_\tau f_{n-1}).$$

Si les anciennes variables sont données en fonction des nouvelles explicitement par des équations

$$x = \mathrm{f}_0, \quad y = \mathrm{f}_1, \ldots, \quad t = \mathrm{f}_{n-1},$$

on trouvera

$$D = 1,$$

et

$$dx\, dy\, dz \ldots dt = \Sigma(\pm D_\xi x D_\eta y \ldots D_\tau t) d\xi\, d\eta \ldots d\tau,$$

comme par la méthode de M. Cauchy.

DIX-NEUVIÈME LEÇON.

Continuation de la leçon précédente. — Réduction des intégrales multiples à l'aide d'un changement de coordonnées.

112. 1er *Exemple* : Considérons l'intégrale double

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x + \alpha' y,\ 6x + 6' y)\,dx\,dy.$$

Si après avoir posé

$$\alpha x + \alpha' y = \xi,\quad 6x + 6' y = \eta,$$

et résolu ces équations par rapport à x et à y, on substitue à $dxdy$ sa valeur calculée d'après les règles que nous avons données pour le changement de variable indépendante, on trouvera, en désignant par k la valeur absolue $\sqrt{(\alpha 6' - \alpha' 6)^2}$ de la différence $\alpha 6' - \alpha' 6$,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x + \alpha' y,\ 6x + 6' y) = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

ou plus simplement

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha x + \alpha' y,\ 6x + 6' y) = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx\,dy.$$

Supposons maintenant que l'on remplace les variables x, y considérées comme représentant des coordonnées

rectangulaires par les coordonnées polaires r et u à l'aide des formules connues

$$x = r\cos u = rv, \quad y = r\sin u = rv,$$

il viendra

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F[(\alpha\cos u + \alpha'\sin u)r,\ (6\cos u + 6'\sin u)r]\,r\,dr\,du$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(r\cos u,\ r\sin u)\,r\,dr\,du,$$

et en faisant

$$F(x, y) = e^{-r} f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right),$$

$$w = [(\alpha\cos u + \alpha'\sin u)^2 + (6\cos u + 6'\sin u)^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\left(\frac{\alpha\cos u + \alpha'\sin u}{w},\ \frac{6\cos u + 6'\sin u}{w}\right)\frac{re^{-r}dr\,du}{w^2}$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\cos u,\ \sin u)e^{-r}r\,dr\,du.$$

Mais

$$\int_0^{\infty} re^{-r}dr = 1;$$

donc

$$(a)\quad \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha\cos u + \alpha'\sin u}{w},\ \frac{6\cos u + 6'\sin u}{w}\right)\frac{du}{w^2}$$
$$= \frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f(\cos u,\ \sin u)\,du.$$

Si l'on supposait les coefficients α, α', 6, $6'$ assujettis à vérifier les conditions

$$\alpha^2 + 6^2 = 1, \quad \alpha'^2 + 6'^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + 66' = 0,$$

on aurait, par suite,

$$k = 1, \quad w = (\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} = 1,$$

$$(b)\quad \int_0^{2\pi} f(\alpha\cos u + \alpha'\sin u,\ \beta\cos u + \beta'\sin u)\,du = \int_0^{2\pi} f(\cos u,\ \sin u)\,du,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha \mathrm{u} + \alpha'\mathrm{v},\ \beta\mathrm{u} + \beta'\mathrm{v})\,du = \int_0^{2\pi} f(\mathrm{u},\ \mathrm{v})\,du.$$

113. 2me *Exemple :* Considérons en second lieu l'intégrale triple

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\quad \beta x + \beta' y + \beta'' z,\quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\,dx\,dy\,dz.$$

Si après avoir posé

$$\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z = \xi,\quad \beta x + \beta' y + \beta'' z = \eta,\quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z = \zeta,$$

$$k = \sqrt{(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\beta''\gamma' + \alpha'\beta''\gamma - \alpha'\beta\gamma'' + \alpha''\beta\gamma' - \alpha''\beta'\gamma)^2},$$

on calcule $dxdydz$, on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\quad \beta x + \beta' y + \beta'' z,\quad \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\,dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta = \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

Supposons maintenant que dans cette dernière formule on remplace les variables x, y, z considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires par des coordonnées polaires r, u, θ, à l'aide des formules connues

$$x = r\cos u,\quad y = r\sin u\cos\theta,\quad z = r\sin u\sin\theta,$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$x = \mathrm{u}r,\quad y = \mathrm{v}r,\quad z = \mathrm{w}r,$$

en posant, pour abréger,

$$\mathrm{u} = \cos u,\quad \mathrm{v} = \sin u\cos\theta,\quad \mathrm{w} = \sin u\sin\theta,$$

on trouvera

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F[(\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w)r,\ (6u+6'v+6''w)r,\ (\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w)r]r^2 \sin u\, dr\, du\, d\theta$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(ur,\ vr,\ wr)\, r^2 \sin u\, dr\, du\, d\theta.$$

Si d'ailleurs dans cette formule on prend

$$F(x, y, z) = \tfrac{1}{2}\, e^{-r} f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right);$$

alors, en ayant égard à l'équation

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} r^2 e^{-r} dr = 1,$$

et posant, pour abréger,

$$\omega = [(\alpha u + \alpha' v + \alpha'' w)^2 + (6u + 6'v + 6''w)^2 + (\gamma u + \gamma' v + \gamma'' w)^2]^{\frac{1}{2}},$$

on aura

$$(A)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[\frac{\alpha u+\alpha' v+\alpha'' w}{\omega}, \frac{6u+6'v+6''w}{\omega}, \frac{\gamma u+\gamma' v+\gamma'' w}{\omega}\right]\frac{\sin u\, du\, d\theta}{\omega^3}$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u, v, w) \sin u\, du\, d\theta.$$

Si l'on supposait les coefficients α, α', α'', 6, $6''$, $6''$, γ, γ', γ'' assujettis à vérifier les conditions

$$\alpha^2 + 6^2 + \gamma^2 = 1,\quad \alpha'^2 + 6'^2 + \gamma'^2 = 1,\quad \alpha''^2 + 6''^2 + \gamma''^2 = 1,$$
$$\alpha'\alpha'' + 6'6'' + \gamma'\gamma'' = 0,\quad \alpha''\alpha + 6''6 + \gamma''\gamma = 0,$$
$$\alpha\alpha' + 66' + \gamma\gamma' = 0,$$

on aurait, par suite,

$$k = 1,\quad \omega = 1,$$

$$(B)\quad \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha u + \alpha' v + \alpha'' w,\ 6u + 6'v + 6''w,\ \gamma u + \gamma' v + \gamma'' w) \sin u\, du\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(u, v, w) \sin u\, du\, d\theta.$$

Si les coefficients α, α', α'', etc., satisfaisaient seulement aux trois dernières conditions, alors, en posant

$$\rho=(\alpha^2+6^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}},\ \rho'=(\alpha'^2+6'^2+\gamma'^2)^{\frac{1}{2}},\ \rho''=(\alpha''^2+6''^2+\gamma''^2)^{\frac{1}{2}},$$

on trouverait

$$k=\rho\rho'\rho'',\quad \omega=(\rho^2u^2+\rho'^2v^2+\rho''^2w^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Si la fonction $f(x, y, z)$ se réduisait à une fonction $f(x)$ de la seule variable x, on aurait simplement

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\alpha\cos u+\alpha'\sin u\cos\theta+\alpha''\sin u\sin\theta)\sin u\,du\,d\theta$$
$$=2\pi\int_0^{\infty} f[(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)^{\frac{1}{2}}\cos u]\sin u\,du.$$

Cette formule a été donnée d'abord par M. Poisson en 1819.

Si dans l'équation (A) on pose

$$f(x, y, z)=\frac{r}{P}f\left(\frac{P}{Q}\right),$$

les valeurs de r, P, Q étant

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$P=hx+ky+lz,\quad Q=(ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy)^{\frac{1}{2}},$$

pour satisfaire aux conditions

$$\alpha'\alpha''+6'6''+\gamma'\gamma''=0,\quad \alpha''\alpha+6''6+\gamma''\gamma=0,$$
$$\alpha\alpha'+66'+\gamma\gamma'=0,$$

qui expriment en réalité que les trois nouveaux axes des coordonnées sont perpendiculaires entre eux, il suffira de prendre, pour α, 6, γ, s; α', $6'$, γ', s'; α'', $6''$, γ'', s'', trois systèmes de valeurs α, 6, γ, s, choisis de manière à

vérifier les équations

$$\frac{a\alpha + f\mathfrak{C} + e\gamma}{\alpha} = \frac{f\alpha + b\mathfrak{C} + d\gamma}{\mathfrak{C}} = \frac{e\alpha + d\mathfrak{C} + c\gamma}{\gamma} = s,$$

et correspondants aux trois racines de l'équation en s,

$$(a - s)(b - s)(c - s) - d^2(a - s) - e^2(b - s) - f^2(c - s) + 2def = 0.$$

Alors, en effet, les trois nouveaux plans coordonnés seront parallèles aux trois plans diamétraux principaux de la surface du second degré

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = k,$$

et par conséquent rectangulaires.

Supposons d'ailleurs que les équations

$$ax + fy + ez = \mathrm{x},\ fx + by + dz = \mathrm{y},\ ex + dy + cz = \mathrm{z},$$

étant résolues par rapport à x, y, z, donnent

$$x = \mathrm{ax} + \mathrm{fy} + \mathrm{ez},\quad y = \mathrm{fx} + \mathrm{by} + \mathrm{dz},\quad z = \mathrm{ex} + \mathrm{dy} + \mathrm{cz}.$$

Enfin nommons P, Q ce que deviennent P, Q quand on y remplace x, y, z par u, v, w, et posons

$$\mathrm{D} = (abc - ad^2 - be^2 - cf^2 + 2def)^{\frac{1}{2}},$$
$$\mathrm{K} = (\mathrm{a}h^2 + \mathrm{b}k^2 + \mathrm{c}l^2 + 2\mathrm{d}kl + 2\mathrm{e}lh + 2\mathrm{f}hk)^{\frac{1}{2}},$$

on tirera de la formule (A)

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{P}{Q}\right)\frac{\sin u\,du\,d\theta}{\mathrm{P}^3} = \frac{2\pi}{\mathrm{K}^3\mathrm{D}}\int_0^{\pi} f(\mathrm{K}\cos u)\,\frac{\sin u\,d\theta}{\cos^2 u\sqrt{\cos^2 u}}.$$

Considérons le cas particulier où l'on aurait

$$k = 0,\quad l = 0,\quad b = c,\quad d = e = f = 0,$$

on aura

$$\mathrm{P} = hx,\quad \mathrm{Q} = [ax^2 + b(y^2 + z^2)]^{\frac{1}{2}},\quad P = hr\mathrm{v} = hr\cos u,$$

$$Q = (a\cos^2 u + b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}},\quad \mathrm{D} = b\sqrt{a},\quad \mathrm{K} = h\sqrt{\mathrm{a}} = \frac{h}{\sqrt{a}},$$

et par suite

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du\,d\theta}{h^3\cos^3 u}=\frac{2\pi a^2}{h^3 b}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\frac{\sin u\,du\,d\theta}{\cos^2 u\,du\sqrt{\cos^2 u}}$$

et en effectuant l'intégration par rapport à θ,

$$\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du}{\cos^3 u}=\frac{\pi a^2}{b}\int_0^{\pi} f\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\frac{\sin u\,du}{\cos^3 u};$$

de cette dernière équation on tire facilement

$$\int_0^{\pi} f\left[\frac{h\cos u}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}\right]\frac{\sin u\,du}{(a\cos^2 u+b\sin^2 u)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{b\sqrt{a}}\int_0^{\pi} f\left(\frac{h\cos u}{\sqrt{a}}\right)\sin u\,du$$

et l'on en conclurait, en posant $\cos u = x$,

$$\int_{-1}^{+1} f\left\{\frac{hx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac{1}{2}}}\right\}\frac{dx}{[(a-b)x^2+b]^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{b\sqrt{a}}\int_{-1}^{+1} f\left(\frac{hx}{\sqrt{a}}\right)dx.$$

On déduirait, de cette dernière équation, des théorèmes fort remarquables sur la transformation des fonctions elliptiques.

114. 3me *Exemple* : Considérons l'intégrale

$$S=\int\int dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

qui donne l'aire d'une certaine surface courbe

$$f(x,\ y,\ z)=0.$$

Si aux coordonnées rectangulaires x, y, z on substitue les coordonnées polaires r, u et θ, à l'aide des équations

$$x=r\cos u,\quad y=r\sin u\cos\theta,\quad z=r\sin u\sin\theta,$$

l'équation de la surface deviendra

$$F(r,\ p,\ q)=0,$$

et l'aire curviligne sera déterminée, comme nous l'avons vu, par l'équation

$$S = \int\int du\, d\theta \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

dans laquelle

$$X = y'_\theta z'_u - y'_u z'_\theta, \quad Y = z'_\theta x'_u - z'_u x'_\theta, \quad Z = x'_\theta y'_u - x'_u y'_\theta.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}
x'_u &= r'_u \cos u - r \sin u,\\
x'_\theta &= r'_\theta \cos u,\\
y'_u &= r'_u \sin u \cos\theta + r\cos u \cos\theta,\\
y'_\theta &= r'_\theta \sin u \cos\theta - r \sin u \sin\theta,\\
z'_u &= r'_u \sin u \sin\theta + r\cos u \sin\theta,\\
z'_\theta &= r'_\theta \sin u \sin\theta + r \sin u \cos\theta,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
X &= r^2 \sin u \cos\theta + rr'_u \sin^2 u,\\
Y &= rr'_\theta \sin\theta - (r'_u \cos u - r \sin u) r \sin u \cos\theta,\\
Z &= rr'_\theta \cos\theta + (r'_u \cos u - r\sin u)\, r \sin u \sin\theta,\\
X^2 + Y^2 + Z^2 &= r^2 \left[r'^2_\theta + (r^2 + r'^2_u) \sin^2 u\right].
\end{aligned}$$

Donc, en faisant

$$R = \sqrt{r'^2_\theta + (r^2 + r'^2_u)\sin^2 u},$$

on trouvera

$$S = \int\int R r\, du\, d\theta.$$

Faisons l'application de cette formule très-simple à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{ou} \quad r = \frac{abc}{\sqrt{A\text{u}^2 + B\text{v}^2 + C\text{w}^2}},$$

en posant

$$\begin{aligned}
A &= b^2c^2, & B &= a^2c^2, & C &= a^2b^2,\\
\text{u} &= \cos u, & \text{v} &= \sin u \cos\theta, & \text{w} &= \sin u \sin\theta.
\end{aligned}$$

On a, dans ce cas,

$$r'_u = \frac{-abc(\mathrm{B}\cos^2 u + \mathrm{C}\sin^2 u - \mathrm{A})\sin u\cos\theta}{(\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$r'_\theta = \frac{-abc(\mathrm{C} - \mathrm{B})\sin^2 u\sin\theta\cos\theta}{(\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et par suite

$$r^2 + r'^2_u = \frac{a^2b^2c^2[\mathrm{A}^2\cos^2 u + (\mathrm{B}\cos^2\theta + \mathrm{C}\sin^2\theta)\sin^2 u]}{(\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2)^3},$$

$$\mathrm{R} = abc\sin u\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}^2\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}^2\mathrm{w}^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on veut obtenir la surface entière S de l'ellipsoïde, il faudra intégrer, par rapport à u, entre les limites o et π; par rapport à θ entre les limites π et $-\pi$; on aura donc définitivement

$$\mathrm{S} = a^2b^2c^2\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^{\pi}\sin u\,du\,d\theta\frac{(\mathrm{A}^2\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}^2\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}^2\mathrm{w}^2)^{\frac{1}{2}}}{(\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En appelant N la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent, on a

$$\mathrm{N} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = \frac{a^2b^2c^2}{r(\mathrm{A}^2\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}^2\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}^2\mathrm{w}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$(\mathrm{A}^2\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}^2\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}^2\mathrm{w}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a^2b^2c^2}{r\mathrm{N}};$$

d'ailleurs

$$\sqrt{\mathrm{A}\mathrm{u}^2 + \mathrm{B}\mathrm{v}^2 + \mathrm{C}\mathrm{w}^2} = \frac{abc}{r};$$

donc, en substituant,

$$\mathrm{S} = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{r^3\sin u\,du\,d\theta}{\mathrm{N}}.$$

Il est facile, comme nous le verrons, de réduire l'intégrale double du second membre à une intégrale simple; mais, pour mieux mettre en évidence certaines propriétés remarquables de l'ellipsoïde, nous lui ferons subir une nouvelle transformation. Appelons α, β deux nouveaux angles ou deux nouvelles coordonnées polaires liées aux anciennes x, y, z par les trois formules

$$x = a\cos\alpha,\quad y = b\sin\alpha\cos\beta,\quad z = c\sin\alpha\sin\beta.$$

Le point déterminé par ces équations appartiendra évidemment à l'ellipsoïde, car on a

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{b^2\sin^2\alpha\cos^2\beta}{b^2} + \frac{c^2\sin^2\alpha\sin^2\beta}{c^2} = 1;$$

on aura d'ailleurs

$$\begin{aligned} x'_\alpha &= -a\sin\alpha, & x'_\beta &= 0,\\ y'_\alpha &= b\cos\alpha\cos\beta, & y'_\beta &= -b\sin\alpha\sin\beta,\\ z'_\alpha &= c\cos\alpha\sin\beta, & z'_\beta &= c\sin\alpha\cos\beta, \end{aligned}$$

et par conséquent, en posant, pour abréger,

$$\xi = \cos\alpha,\quad \eta = \sin\alpha\cos\beta,\quad \zeta = \sin\alpha\sin\beta,$$

$$X = bc\xi\sin\alpha,\quad Y = ac\eta\sin\alpha,\quad Z = -ab\zeta\sin\alpha,$$

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2} = \sin\alpha\sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2},$$

$$S = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta\sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2},$$

les limites des variables α, β sont évidemment les mêmes que celles des anciennes coordonnées u et θ.

En désignant toujours par N la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent, on aura

$$N = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}}} = \frac{abc}{\sqrt{A\xi^2+B\eta^2+C\zeta^2}},$$

et par suite

$$S = abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d6}{N}.$$

La comparaison de cette valeur de S, avec celle que nous avons obtenue plus haut

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{r^3 \sin u\, du\, d\theta}{N},$$

conduit à quelques résultats intéressants. Pour les mettre en évidence, cherchons d'abord les relations qui lient les coordonnées α, 6, aux précédentes r, u, θ; ou les coordonnées ξ, η, ζ aux coordonnées u, v, w. On a à la fois, comme nous l'avons vu,

$$x = r\text{u}, \quad y = r\text{v}, \quad z = r\text{w},$$
$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta,$$

et par conséquent, en faisant toujours

$$A = b^2c^2, \quad B = a^2c^2, \quad C = a^2b^2,$$

$$\xi = \frac{\text{u}\sqrt{A}}{\sqrt{A\text{u}^2 + B\text{v}^2 + C\text{w}^2}}, \quad \eta = \frac{\text{v}\sqrt{B}}{\sqrt{A\text{u}^2 + B\text{v}^2 + C\text{w}^2}}, \quad \zeta = \frac{\text{w}\sqrt{C}}{\sqrt{A\text{u}^2 + B\text{v}^2 + C\text{w}^2}}$$
$$\text{u} = \frac{a\xi}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}, \quad \text{v} = \frac{b\eta}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}, \quad \text{w} = \frac{c\zeta}{\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2}}$$

Si l'on pose

$$\alpha'^2 = b^2 \cos^2 6 + c^2 \sin^2 6,$$

et si, après avoir pris le quotient $\frac{\text{w}}{\text{v}}$, on remplace u, v, w par leurs valeurs, on trouvera

$$\cos u = \frac{a \cos\alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2\alpha + \alpha'^2 \sin^2\alpha}}, \quad \tang\theta = \frac{c}{b} \tang 6.$$

Puisque les variables u et θ sont indépendantes, en diffé-

rentiant $\cos u$, on devra regarder β, et par suite α', comme constant. On aura dès lors

$$\sin u\, du = \frac{a\alpha'^2 \sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{(a^2\cos^2\alpha + \alpha'^2\sin^2\alpha)^3}};$$

en différentiant l'équation qui donne $\operatorname{tang}\theta$, on trouvera de même

$$d\theta(1 + \operatorname{tang}^2\theta) = \frac{c}{b}(1 + \operatorname{tang}^2\beta)d\beta,$$

et plus simplement

$$d\theta = \frac{bc\, d\beta}{\alpha'^2}.$$

On tire des équations qui précèdent

$$\sin u\, du\, d\theta = \frac{abc \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta}{(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\mathrm{Au}^2 + \mathrm{Bv}^2 + \mathrm{Cw}^2 = \frac{\mathrm{A}a^2\xi^2 + \mathrm{B}b^2\eta^2 + \mathrm{C}c^2\zeta^2}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2} = \frac{a^2b^2c^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c\zeta^2} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2},$$

$$r = \frac{abc}{(\mathrm{Au}^2 + \mathrm{Bv}^2 + \mathrm{Cw}^2)^{\frac{1}{2}}} = (a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$r^3 \sin u\, du\, d\theta = abc \sin\alpha\, d\alpha\, d\beta.$$

En intégrant les deux membres de cette équation remarquable entre les limites correspondantes, qui sont o et π pour u et α, $-\pi$, $+\pi$ pour θ et β, on aura

$$\int_0^\pi\int_{-\pi}^{+\pi} r^3 \sin u\, du\, d\theta = \int_0^\pi\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{a^3b^3c^3 \sin u\, du\, d\theta}{(\mathrm{Au}^2 + \mathrm{Bv}^2 + \mathrm{Cw}^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi abc,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u\, du\, d\theta}{(\mathrm{Au}^2 + \mathrm{Cv}^2 + \mathrm{Cw}^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{a^2b^2c^2} = \frac{4\pi}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette intégrale définie, donnée d'abord par Poisson, se déduit facilement de la formule générale du n° 113.

Comme les limites des variables α, β sont celles des va-

riables u et θ, on a

$$abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\mathcal{C}}{\mathrm{N}} = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin u\, du\, d\theta}{\mathrm{N}},$$

et par conséquent

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{r^3 \sin u\, du\, d\theta}{\mathrm{N}} = abc\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\alpha\, d\alpha\, d\mathcal{C}}{\mathrm{N}}.$$

On tire de cette équation une conséquence fort remarquable. Appelons a', b' les deux grands axes de l'ellipse que l'on obtient en coupant l'ellipsoïde par un plan parallèle au plan tangent dont N exprime la distance au centre; d'après les propriétés bien connues de l'ellipsoïde, on a

$$abc = a'b'\mathrm{N},\quad \mathrm{N} = \frac{abc}{a'b'},$$

et par suite

$$\mathrm{S} = \int\int a'b' \sin\alpha\, d\alpha\, d\mathcal{C},$$

$$\frac{d^2\mathrm{S}}{a'b'} = \sin\alpha\, d\alpha\, d\mathcal{C},$$

et, en intégrant entre les limites $-\pi$, $+\pi$; o, π,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{d^2\mathrm{S}}{\pi a'b'} = 4.$$

Cette équation exprime que la somme des éléments superficiels d'un ellipsoïde, divisés respectivement par les aires des sections diamétrales parallèles aux plans tangents de ces éléments, est égale à 4. M. Chasles a donné une démonstration purement géométrique de ce théorème.

115. Si pour transformer l'intégrale triple

$$\mathrm{V} = \int\int\int dx\, dy\, dz,$$

on avait recours au système de coordonnées polaires déterminé par les équations

$$x = r\cos u,\quad y = r\sin u\cos\theta,\quad z = r\sin u\sin\theta,$$

on trouverait, comme nous l'avons déjà vu,

$$V = \int\int\int r^2 \sin u \, du \, d\theta dr,$$

et, en intégrant entre les limites o et r,

$$V = \frac{1}{3}\int\int r^3 \sin u \, du \, d\theta;$$

dans le cas de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on a

$$r = \frac{abc}{(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et par conséquent, en intégrant entre les limites $-\pi$, $+\pi$, o et π, on aura, pour le volume entier de l'ellipsoïde,

$$V = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{a^3b^3c^3 \sin u \, du \, d\theta}{3(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ce volume est d'ailleurs, comme nous l'avons vu, égal à $\frac{4}{3}\pi abc$; donc

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{\sin u \, du \, d\theta}{(\mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}v^2 + \mathrm{C}w^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{a^2b^2c^2} = \frac{4\pi}{\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}\mathrm{B}^{\frac{1}{2}}\mathrm{C}^{\frac{1}{2}}}.$$

On retrouverait de cette manière la valeur de l'intégrale définie du premier membre. On pourrait, au contraire, partir de la valeur déjà connue de cette intégrale pour calculer le volume $V = \frac{4}{3}\pi abc$. Ce volume s'obtient encore immédiatement à l'aide des nouvelles coordonnées polaires

$$x = a \cos \alpha, \quad y = b \sin \alpha \cos 6, \quad z = c \sin \alpha \sin 6;$$

on trouve en effet

$$V = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} r^3 \sin u\, du\, d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} abc \sin \alpha\, d\alpha\, d\varpi = \frac{4}{3}\pi abc.$$

116. Considérons, pour quatrième exemple, les mêmes intégrales

$$S = \iint dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$V = \iiint dx dy dz,$$

qui donnent l'aire et le volume d'une surface courbe; mais substituons cette fois les coordonnées elliptiques r, μ, ν aux coordonnées rectangulaires x, y, z. Désignons par $r'_\mu, x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu$; r'_ν, x'_ν, y'_ν, z'_ν les dérivées partielles de r, x, y, z, prises par rapport à μ et à ν, et posons

$$X = y'_\nu z'_\mu - z'_\nu y'_\mu, \quad Y = z'_\nu x'_\mu - x'_\nu z'_\mu, \quad Z = x'_\nu y'_\mu - y'_\nu x'_\mu,$$

on trouvera

$$S = \iint d\mu d\nu \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

En différentiant les équations

$$x = \frac{r\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{r\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \frac{r\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

et posant, pour abréger,

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = m, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2} = n,$$

$$\sqrt{c^2 - \mu^2} = p, \quad \sqrt{c^2 - \nu^2} = q,$$

on aura

$$x'_\mu = \frac{r\nu + \mu\nu r'_\mu}{bc}, \quad x'_\nu = \frac{r\mu + \mu\nu r'_\nu}{bc},$$

$$y'_\mu = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}}\left(\frac{n}{m} r\mu + mnr'_\mu\right), \quad y'_\nu = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}}\left(mnr'_\nu - \frac{m}{n} r\nu\right),$$

$$z' = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(pqr'_\mu - \frac{q}{p} r\mu\right), \quad z'_\nu = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}}\left(pqr'_\nu - \frac{p}{q} r\nu\right),$$

$$\mathrm{Z} = \frac{1}{mnc\sqrt{c^2 - b^2}}[\mu r'_\mu m^2 + \nu r'_\nu n^2 + r(\mu^2 - \nu^2)],$$

$$\mathrm{Y} = \frac{r}{pqc\sqrt{c^2 - b^2}}[\mu r'_\mu p^2 - \nu r'_\nu q^2 - r(\mu^2 - \nu^2)],$$

$$\mathrm{X} = \frac{r}{mnpqbc}[r\mu\nu(\mu^2 - \nu^2) - \mu r'_\nu n^2 q^2 - \nu r'_\mu m^2 p^2)].$$

Et si, après avoir réduit ces trois expressions au même dénominateur, on fait la somme des carrés X^2, Y^2, Z^2, il viendra

$$\mathrm{S} = \iint r d\mu d\nu \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2)[m^2 p^2 r'^2_\mu + n^2 q^2 r'^2_\nu + (\mu^2 - \nu^2) r^2]}{mnpq}}.$$

μ étant toujours compris entre b et c, et ν étant toujours plus petit que b, on obtiendra la huitième partie de l'ellipsoïde à l'aide de l'intégrale définie (*)

$$\mathrm{S} = \int_0^b \int_b^c r d\mu d\nu \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2)[m^2 p^2 r'^2_\mu + n^2 q^2 r'^2_\nu + (\mu^2 - \nu^2) r^2]}{mnpq}}.$$

(*) Nous donnerons plus bas et avec plus de généralité, dans la 19me leçon, le moyen de déterminer les limites correspondantes des variables x, y, z, r, μ et ν. Nous montrerons que les limites o et b pour μ, b et c pour ν répondent réellement au cas où l'on veut avoir la huitième partie de l'ellipsoïde.

Le cas le plus simple est celui où la surface donnée est une sphère ; le rayon r étant alors constant, on a

$$r'_\mu = 0, \quad r'_\nu = 0;$$

et en désignant par S' la surface entière de la sphère, elle sera représentée d'abord par $4\pi r^2$, et ensuite par huit fois l'intégrale qui précède, intégrale qui, dans ce cas, se réduit à

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}.$$

En égalant ces deux valeurs d'une même surface, on trouvera

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

De sorte que l'intégrale définie du premier membre est la huitième partie d'une sphère d'un rayon égal à l'unité. Cette intégrale, donnée d'abord par M. Lamé, a été vérifiée par M. Poisson, et démontrée géométriquement par MM. Chasles et Terquem.

117. Passons à l'intégrale triple

$$V = \int\int\int dx\, dy\, dz.$$

On sait par la transformation des intégrales que, si r, μ, ν sont trois nouvelles coordonnées, liées aux anciennes x, y, z, par les équations

$$\begin{aligned} dx &= \alpha\, dr + \beta\, d\mu + \gamma\, d\nu, \\ dy &= \alpha'\, dr + \beta'\, d\mu + \gamma'\, d\nu, \\ dz &= \alpha''dr + \beta''d\mu + \gamma''d\nu, \end{aligned}$$

l'intégrale triple devient

$$V = \int\int\int [\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') + \beta''(\gamma'\alpha - \gamma\alpha') + \gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta')]\, dr\, d\mu\, d\nu.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, en vertu des

équations qui lient x, y, z à r, μ, ν, on aura

$$dx = \frac{\mu\nu dr + r\nu d\mu + r\mu d\nu}{bc},$$

$$dy = \frac{1}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(mndr + \frac{n}{m}\,r\mu d\mu - \frac{m}{n}\,r\nu\,d\nu\right),$$

$$dz = \frac{1}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(pqdr - \frac{q}{p}\,r\mu\,d\mu - \frac{p}{q}\,r\nu\,d\nu\right),$$

et en comparant ces valeurs à celles qui précèdent,

$$\alpha = \frac{\mu\nu}{bc},\quad \beta = \frac{r\nu}{bc},\quad \gamma = \frac{r\mu}{bc},$$

$$\alpha' = \frac{mn}{b\sqrt{c^2-b^2}},\quad \beta' = \frac{n}{m}\frac{r\mu}{b\sqrt{c^2-b^2}},\quad \gamma' = -\frac{m}{n}\frac{r\nu}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$\alpha'' = \frac{pq}{c\sqrt{c^2-b^2}},\quad \beta'' = -\frac{q}{p}\frac{r\mu}{c\sqrt{c^2-b^2}},\quad \gamma'' = -\frac{p}{q}\frac{r\nu}{c\sqrt{c^2-b^2}};$$

on aura, par suite,

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') = \frac{pq}{mn}\frac{r^2(\mu^2 - \nu^2)}{c^2(c^2 - b^2)},$$

$$\beta''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = \frac{mq}{np}\frac{r^2\mu^2}{c^2(c^2 - b^2)},$$

$$\gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta') = \frac{np}{mq}\frac{r^2\nu^2}{c^2(c^2 - b^2)}.$$

En faisant la somme de ces trois expressions et réduisant, on trouvera définitivement

$$\mathrm{V} = \iiint \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, r^2 dr d\mu\, d\nu}{mnpq}.$$

Une première intégration, faite par rapport à r entre les limites o et r, donne

$$\mathrm{V} = \tfrac{1}{3}\iint \frac{(\mu^2 - \nu^2) r^3 d\mu\, d\nu}{mnpq}.$$

Dans le cas d'une sphère, r est constant, et, pour obtenir son volume entier, il faut effectuer les intégrations entre les limites b et c pour μ; o et b pour ν, et multiplier par 8; on trouve, de cette manière,

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{8}{3}r^3 \int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)d\mu\,d\nu}{mnpq}.$$

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Ce mode de transformation s'étend avec facilité au cas où l'on conserverait les trois coordonnées elliptiques λ, μ, ν, liées à x, y, z par les équations

$$x = \frac{\lambda\mu\nu}{bc}, \quad y = \frac{\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\mu^2-b^2}\sqrt{b^2-\nu^2}}{b\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$z = \frac{\sqrt{\lambda^2-c^2}\sqrt{c^2-\mu^2}\sqrt{c^2-\nu^2}}{c\sqrt{c^2-b^2}}.$$

En posant, dans ce cas,

$$\sqrt{\lambda^2-b^2} = g, \quad \sqrt{\lambda^2-c^2} = h,$$

$$\sqrt{\mu^2-b^2} = i, \quad \sqrt{c^2-\mu^2} = k,$$

$$\sqrt{b^2-\nu^2} = l, \quad \sqrt{c^2-\nu^2} = m,$$

on aura

$$dx = \frac{\mu\nu d\lambda + \lambda\nu d\mu + \lambda\mu d\nu}{bc},$$

$$dy = \frac{1}{b\sqrt{c^2-b^2}}\left(\frac{il\lambda d\lambda}{g} + \frac{gl\mu\,d\mu}{i} - \frac{gi\nu d\nu}{l}\right),$$

$$dz = \frac{1}{c\sqrt{c^2-b^2}}\left(\frac{km\lambda d\lambda}{h} - \frac{hm\mu d\mu}{k} - \frac{hk\nu\,d\nu}{m}\right),$$

et par suite

$$\alpha = \frac{\mu\nu}{bc}, \qquad \mathcal{C} = \frac{\lambda\nu}{bc}, \qquad \gamma = \frac{\lambda\mu}{bc},$$

$$\alpha' = \frac{il\lambda}{bg\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \mathcal{C}' = \frac{gl\mu}{bi\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \gamma' = -\frac{hk\nu}{bl\sqrt{c^2-b^2}},$$

$$\alpha'' = \frac{km\lambda}{ch\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \mathcal{C}'' = -\frac{hm\mu}{ck\sqrt{c^2-b^2}}, \quad \gamma'' = -\frac{hk\nu}{cm\sqrt{c^2-b^2}};$$

$$\alpha''(\gamma\mathcal{C}' - \mathcal{C}\gamma') = \frac{\lambda^2(\mu^2-\nu^2)kmg}{c^2(c^2-b^2)hil},$$

$$\mathcal{C}''(\gamma'\alpha - \alpha'\gamma) = \frac{\mu^2(\lambda^2-\nu^2)kmi}{c^2(c^2-b^2)gkl},$$

$$\gamma''(\alpha'\mathcal{C} - \alpha\mathcal{C}') = \frac{\nu^2(\lambda^2-\mu^2)hkl}{c^2(c^2-b^2)gim};$$

la somme de ces trois expressions, ordonnée par rapport à λ^4, μ^4, ν^4, sera

$$\frac{\lambda^4(\mu^2-\nu^2)+\mu^4(\nu^2-\lambda^2)+\nu^4(\lambda^2-\mu^2)}{ghiklm},$$

et en remarquant que

$$\lambda^4(\mu^2-\nu^2)+\mu^4(\nu^2-\lambda^2)+\nu^4(\lambda^2-\mu^2) = (\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2),$$

on trouvera définitivement, pour le volume V,

$$V = \iiint \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

On obtiendra le volume entier de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

en intégrant entre les limites o, b pour ν; b, c pour μ; c, λ pour γ, et multipliant par 8; ce qui donne

$$V = 8\int_0^b \int_b^c \int_c^\lambda \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

Ce volume d'ailleurs est égal à $\frac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}$; on aura donc

$$\int_0^b\int_b^c\int_c^\lambda\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}d\lambda\,d\mu\,d\nu=\frac{\pi}{6}\lambda\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}.$$

Telle est la valeur que M. Lamé assigna le premier à l'intégrale triple du premier membre. M. Poisson a vérifié depuis l'équation qui précède.

118. Nous avons pensé que l'on verrait avec plaisir la démonstration géométrique que MM. Chasles et Terquem ont donnée de l'équation

$$\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}}=\frac{1}{2}\pi.$$

Si, comme nous l'avons vu (n° 103), après avoir fait croître λ de $d\lambda$, de manière à donner naissance à un second ellipsoïde infiniment peu différent du premier, on prend à chaque point M de la surface du premier ellipsoïde, l'épaisseur $d_\lambda s$ de la couche comprise entre cette surface et celle du second ellipsoïde, puis qu'on multiplie le rapport $\frac{d\lambda}{d_\lambda s}$ par l'élément superficiel $d\omega = d_\mu s\, d_\nu s$ du premier ellipsoïde, la somme $\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}d\omega$ de tous ces produits, étendue à la huitième partie de la surface de l'ellipsoïde, sera donnée (n° 103) par l'équation

$$\int\frac{d\lambda}{d_\lambda s}d\omega = b\sqrt{\lambda^2-b^2}\sqrt{\lambda^2-c^2}\int_0^b\int_b^c\frac{(\mu^2-\nu^2)\,d\mu\,d\nu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)(b^2-\nu^2)}}.$$

Or, en exprimant $\frac{d\lambda}{d_\lambda s}$ en coordonnées rectangulaires, à l'aide de cette observation bien simple que $d_\lambda s$ est l'élément infiniment petit de la normale à l'ellipsoïde, et que quand λ varie seul $\frac{dx}{x}=\frac{d\lambda}{\lambda}$, on trouve

$$\frac{d\lambda}{d_\lambda s} = \frac{1}{\lambda\sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2}}} = \frac{N}{\lambda},$$

N étant la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à l'ellipsoïde; donc

$$\int \frac{d\lambda}{d_\lambda s}\, d\omega = \frac{1}{\lambda}\int N d\omega.$$

Mais $\int N d\omega$ est évidemment le triple du volume de l'ellipsoïde et ce volume est égal à

$$\tfrac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

donc

$$\int \frac{d\lambda}{d_\lambda s}\, d\omega = \frac{1}{\lambda}\int N\, d\omega = 4\pi\sqrt{(\lambda^2 - b^2)}\sqrt{(\lambda^2 - c^2)}$$

$$= 8\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}$$

et par conséquent

$$\int_0^b\int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = \tfrac{1}{2}\pi.$$

119. Il est un système de coordonnées qui renferme, comme cas particulier, le système ordinaire de coordonnées polaires, ainsi que les coordonnées elliptiques de M. Lamé, et dont l'emploi conduit à quelques transformations remarquables. Désignons par r le rayon vecteur mené de l'origine au point (x, y, z), par u et θ deux angles variables, par m et n deux constantes positives assujetties à vérifier l'équation

$$m^2 + n^2 = 1;$$

on pourra poser

$$x = r\sin u\sqrt{1 - m^2\sin^2\theta}, \quad y = r\cos u\cos\theta, \quad z = r\sin\theta\sqrt{1 - n^2\sin^2 u}.$$

on aura

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

et les trois coordonnées x, y, z détermineront complétement la position du point dans l'espace. En substituant dans l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ pour x, y, z leurs valeurs, et ayant égard à la relation $m^2 + n^2 = 1$, on trouvera

$$\sin^2 u\,(1 - m^2 \sin^2\theta) + \cos^2 u \cos^2\theta + \sin^2\theta(1 - n^2 \sin^2 u) = 1.$$

Pour calculer à l'aide de ces coordonnées une étendue symétrique par rapport aux plans coordonnés, et circonscrite par une surface que les plans coordonnés divisent en huit parties égales, on donnerait o et $\frac{\pi}{2}$ pour limites aux angles u et θ. L'hypothèse de r constant ramènerait au cas où la surface donnée est une sphère. Si cette surface devait être un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

et si le point (x, y, z) devait se trouver sur cette surface, on devrait poser

$$\begin{aligned} x &= a \sin u \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}, \\ y &= b \cos u \cos\theta, \\ z &= c \sin\theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}. \end{aligned}$$

Si l'une des quantités n, m s'annulle, l'autre devra être égale à l'unité ; si par exemple on fait $m = 0$, on aura $n = 1$, et par suite

$$x = r \sin u, \quad y = r \cos u \cos\theta, \quad z = r \sin u \sin\theta;$$

c'est le cas des coordonnées polaires plus communément employées.

Cette même hypothèse de $m=o$, $n=o$, donnerait, dans le cas d'un ellipsoïde,

$$x = a \sin u, \quad y = b \cos u \cos\theta, \quad z = c \sin\theta \cos u.$$

Nous avons dit que ce système de coordonnées, dans lequel x, y, z sont exprimées au moyen de r, u, θ, m et n, peut se ramener au système de coordonnées elliptiques. En effet, désignons par μ une quantité comprise entre b et c, par ν une quantité plus petite que $b < c$, et posons

$$\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} = \cot^2\theta, \quad \nu = b \sin u, \quad b = nc, \quad c^2 - b^2 = c^2 m^2;$$

comme on aura

$$m^2 + n^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

m et n vérifieront la condition voulue. En substituant les valeurs de μ^2 et de ν^2 dans les équations

$$\begin{aligned} bcx &= r\mu\nu, \\ by\sqrt{c^2 - b^2} &= r\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ cz\sqrt{c^2 - b^2} &= r\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}, \end{aligned}$$

on retrouvera, après des réductions faciles, les équations

$$\begin{aligned} x &= r \sin u \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}, \\ y &= r \cos u \cos\theta, \\ z &= r \sin\theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}. \end{aligned}$$

S'il s'agit encore d'un ellipsoïde dont les trois axes λ, $f(\lambda)$, $\mathrm{f}(\lambda)$ soient tels que l'on ait

$$\lambda > f(\lambda) > \mathrm{f}(\lambda),$$

il sera représenté, dans le système de coordonnées r, u, θ, m et n, par les équations

$$x = \lambda \sin u \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}, \quad y = f(\lambda) \cos u \cos\theta,$$
$$z = \mathrm{f}(\lambda) \sin\theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u};$$

en posant dans ces équations

$$f(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - b^2}, \quad \mathrm{f}(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - c^2},$$

et remplaçant, comme nous venons de le faire, u et θ par μ et ν, on retrouverait les équations

$$bcx = \lambda\mu\nu, \quad by\sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2},$$
$$cz\sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{\lambda^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

120. Cela posé, employons le système de coordonnées déterminées par les formules

$$x = r\sin u\sqrt{1 - m^2\sin^2\theta},$$
$$y = r\cos u\,\cos\theta,$$
$$z = r\sin\theta\,\sqrt{1 - n^2\sin^2 u},$$

à la transformation de l'intégrale

$$\mathrm{S} = \iint dx\,dy\,\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Si l'on désigne par x'_u, y'_u, z'_u, x'_θ, y'_θ, z'_θ les dérivées partielles des variables x, y, z prises par rapport à u et θ, et qu'on pose

$$\mathrm{X} = y'_\theta z'_u - z'_\theta y'_u, \quad \mathrm{Y} = x'_\theta z'_u - x'_u z'_\theta, \quad \mathrm{Z} = x'_\theta y'_u - x'_u y'_\theta,$$

l'intégrale transformée, si l'on suppose r constant, deviendra

$$= \iint du\,d\theta\sqrt{\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2};$$

on a d'ailleurs

$$x'_u = r\cos u\sqrt{1 - m^2\sin^2 u}, \quad x'_\theta = -\frac{rm^2\sin u\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\theta}},$$
$$y'_u = -r\sin u\cos\theta, \quad y'_\theta = -r\cos u\sin\theta,$$
$$z'_u = -\frac{rn^2\sin u\cos u\sin\theta}{\sqrt{1 - n^2\sin^2 u}}, \quad z'_\theta = r\cos\theta\sqrt{1 - n^2\sin^2 u},$$

et par conséquent, en ayant égard à l'équation identique

$$1 - m^2 \sin^2\theta - n^2 \sin^2 u = m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u,$$

et réduisant,

$$X = \frac{r^2 \sin u (m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u) \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}},$$

$$Y = -\frac{r^2 (m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u) \cos u \cos\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}},$$

$$Z = \frac{r^2 \sin\theta (m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u) \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}},$$

$$S = r^2 \iint \frac{m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}}\, du\, d\theta.$$

Comme nous avons supposé r constant, S représente nécessairement une portion de la surface de la sphère; on obtiendra la huitième partie de cette surface $\frac{\pi r^2}{2}$ en prenant l'intégrale entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$; on aura donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}}\, du\, d\theta = \frac{\pi}{2};$$

cette équation peut encore se mettre sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - m^2 \sin^2\theta - n^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta} \sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}}\, du\, d\theta = \frac{\pi}{2},$$

et renferme le célèbre théorème de Legendre sur les fonctions elliptiques.

En posant en effet, suivant les notations de l'illustre

géomètre,

$$F(m, \theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}}, \quad E(m, \theta) = \int d\theta \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta},$$

$$F(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}}, \quad E(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta},$$

on aura

$$\int \frac{\sin^2 u du}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{n^2}[F(n, u) - E(n, u)],$$

$$\int \frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}} = \frac{1}{m^2}[F(m, \theta) - E(m, \theta)].$$

Cela posé, l'intégrale dont il s'agit se décomposera dans les suivantes

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du\, d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = F(m) E(n),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \sin^2\theta d\theta du}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = F(n)[F(m) - E(n)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{n^2 \sin^2 u du d\theta}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = F(m)[F(n) - Em)],$$

et en substituant, on aura définitivement

$$F(m) E(n) + F(n) E(m) - F(m) F(n) = \frac{\pi}{2}.$$

Telle est précisément la formule donnée par Legendre. On aurait pu ne pas recourir à l'expression connue de la surface de la sphère; car la surface S devant être indépendante de m et de n, on pourra faire $m = 0$, ce qui

donne $n = 1$,

$$S = r^2 \iint \frac{m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} du\, d\theta = r^2 \iint \cos u\, du\, d\theta,$$

et en intégrant entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$,

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\, du\, d\theta = r^2 \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{m^2 \cos^2\theta + n^2 \cos^2 u}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2\theta}\sqrt{1 - n^2 \sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}.$$



VINGTIÈME LEÇON.

Diverses autres méthodes pour la réduction ou la transformation des intégrales multiples.

---

121. Parmi les méthodes qui peuvent être employées à la détermination des intégrales multiples, une des plus fécondes a été indiquée par M. Cauchy, et consiste à remplacer, dans l'intégrale donnée, un facteur de la fonction sous le signe $\int$ par une intégrale définie tellement choisie, qu'après ce remplacement les intégrations successives puissent être facilement effectuées; entrons à ce sujet dans quelques détails. Considérons une intégrale multiple S de la forme

$$S = \int\int\int \ldots \frac{P}{Q^\mu} dx\,dy\,dz \ldots,$$

P, Q étant des fonctions réelles ou imaginaires des variables x, y, z,..., et μ une constante positive, ou même une constante imaginaire dont la partie réelle soit positive. Désignons d'ailleurs, comme nous l'avons déjà fait, par $\Gamma(\mu)$ l'intégrale eulérienne de première espèce, on aura (n° 56)

$$\frac{1}{Q^\mu} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} e^{-Qt} dt,$$

et par suite

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \iiint \ldots t^{\mu-1} P e^{-Qt} dx\, dy\, dz \ldots dt.$$

Concevons maintenant que P_x, Q_x étant des fonctions de la seule variable x; P_y, Q_y des fonctions de la seule variable y; P_z, Q_z des fonctions de la seule variable $z, \ldots$, on ait

$$P = P_x P_y P_z \ldots, \quad Q = Q_x + Q_y + Q_z + \ldots,$$

alors en posant, pour abréger,

$$u = \int P_x e^{-Q_x t} dx, \quad v = \int P_y e^{-Q_y t} dy, \quad w = \int P_z e^{-Q_z t} dz,$$

on aura

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} u v w \ldots dt.$$

Donc alors si l'on peut obtenir en termes finis les valeurs de u, v, w,..., considérées comme fonctions de t, la détermination de l'intégrale multiple S se trouvera réduite à la détermination de l'intégrale simple

$$\int_0^\infty t^{\mu-1} u v w \ldots dt.$$

Si, au lieu d'avoir $Q = Q_x + Q_y + Q_z, \ldots$, on avait $Q = 1 + Q_x + Q_y + Q_z, \ldots$, on trouverait

$$S = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^\infty t^{\mu-1} u v w \ldots e^{-t} dt.$$

1re *Application*. Supposons

$$P = x^l y^m z^n \ldots e^{ax} e^{by} e^{cz} \ldots,$$
$$Q = 1 + \alpha x + 6y + \gamma z + \ldots.$$

Supposons d'ailleurs, pour fixer les idées, les intégrations relatives aux variables x, y, $z, \ldots$, effectuées respectivement à partir de certaines origines ou limites fixes $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta, \ldots$. Concevons enfin que la fonction

$$1 + \alpha x + 6y + \gamma z \ldots$$

offre toujours une partie réelle positive, ce qui arrivera, par exemple, si les deux limites de chaque intégration étant des quantités positives, chacune des constantes α, $\mathfrak{E}$, γ,... a ou une valeur positive, ou une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive, on trouvera

$$\text{u} = \int_{\xi}^{x} x^l e^{(a-\alpha t)x} dx = \text{D}_a^l \int_{\xi}^{x} e^{(a-\alpha t)x} dx = \text{D}_a^l \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a - \alpha t}, \quad \text{v} = \ldots, \quad \text{w} = \ldots$$

$$\text{S} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \text{D}_a^l \text{D}_b^m \text{D}_c^n \ldots \int_0^{\infty} \frac{e^{(a-\alpha t)x} - e^{(a-\alpha t)\xi}}{a - \alpha t} \cdot \frac{e^{(b-6t)y} - e^{(b-6t)\eta}}{b - 6t} \cdots t^{\mu-1} e^{-t} dt.$$

On se trouve ainsi amené à cette conclusion remarquable que la fonction S de x, y, z,..., représentée par l'intégrale multiple proposée, peut être réduite à une intégrale définie simple relative à une nouvelle variable t, quelles que soient d'ailleurs les valeurs attribuées aux premières variables x, y, z,..., ou à leurs origines.

Si, en attribuant aux constantes a, b, c,... des valeurs dont la partie réelle fût négative, on supposait chaque intégration effectuée entre les limites o et ∞, on trouverait

$$\text{u} = \text{D}_a^l \int_0^{\infty} e^{(a-\alpha t)x} dx = \text{D}_a^l \frac{1}{\alpha t - a} = \frac{1.2.3\ldots l}{(\alpha t - a)^{l+1}} = \frac{\Gamma(l+1)}{(\alpha t - a)^{l+1}}, \quad \text{v} = \ldots \textit{etc.},$$

et, par suite,

$$\text{S} = \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)\ldots}{\Gamma(\mu)} \int_0^{\infty} \frac{t^{\mu-1} e^{-t} dt}{(\alpha t - a)^{l+1} (6t - b)^{m+1} (\gamma t - c)^{n+1} \ldots}.$$

Si dans cette dernière équation on remplace l, m, n,... par $l-1$, $m-1$, $n-1$,..., et a, b, c,... par $-a$, $-b$, $-c$,..., elle donnera

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} e^{-ax} e^{-by} e^{-cz}}{(1+\alpha x+6y+\gamma z+\ldots)^\mu} dx\, dy\, dz \ldots$$
$$= \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(\mu)} \cdots \int_0^\infty \frac{t^{\mu-1} e^{-t} dt}{(a+\alpha t)^l (b+6t)^m (c+\gamma t)^n}.$$

Cette dernière formule subsistera toujours, d'après ce qu'on vient de dire, quand l, m, n étant des nombres entiers, a, b, c,...., α, 6, γ,.... désigneront des constantes positives, ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles seront positives.

2me *Application*. Supposons

$$P = x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots e^{-ax} e^{-by} e^{-cz},$$

et

$$Q = 1+\alpha x+6y+\gamma z+\ldots,$$

l, m, n,... désignant des constantes positives, ou même des constantes imaginaires dont les parties réelles sont positives; et prenons d'ailleurs pour limites des intégrations relatives à chacune des variables x, y, z,... les deux quantités o et ∞, on trouvera

$$\text{v} = \int_0^\infty x^{l-1} e^{-(a+\alpha t)x} dx = \frac{\Gamma(l)}{(a+\alpha t)^l},$$
$$S = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)} \int_0^t \frac{t^{\mu-1} e^{-t} dt}{(a+\alpha t)^l (b+6t)^m (c+\gamma t)^n \ldots}.$$

C'est la même formule que précédemment, mais étendue à des valeurs réelles ou imaginaires des constantes

$$l,\ m,\ n,\ldots,\quad a,\ b,\ c,\ldots,\quad \alpha,\ 6,\ \gamma,\ldots,$$

pourvu toutefois que ces constantes ou leurs parties réelles soient positives.

Si, dans l'équation qui précède, on réduit les variables x, y, z,... à une seule, et si l'on pose de plus $a = 1$,

on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{x^{l-1}e^{-x}}{(1+ax)^{\mu}}dx = \frac{\Gamma(l)}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{t^{\mu-1}e^{-t}}{(1+at)^{l}}dt.$$

Donc, en écrivant r au lieu de l, et x au lieu de t, on aura

$$\frac{1}{\Gamma(r)}\int_0^\infty \frac{x^{r-1}e^{-x}}{(1+ax)^{\mu}}dx = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}e^{-x}}{(1+ax)^{r}}dx.$$

Cette dernière formule devient identique dans le cas où l'on prend $\mu = r$. On pourrait en déduire plusieurs autres dignes de remarque en différentiant les deux membres une ou plusieurs fois de suite par rapport à r.

Si l'on réduisait à o les constantes a, b, c, on aurait

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}}{(1+\alpha x+6y+\gamma z\ldots)}dxdydz\ldots = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 \frac{t^{\mu-l-m-n\ldots-1}e^{-t}dt}{\alpha^l 6^m \gamma^n}$$

$$= \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma\ldots(\mu-l-m-n-\ldots)}{\Gamma(\mu)}\,\frac{1}{\alpha^l 6^m\gamma^n\ldots}.$$

Cette dernière équation subsistera certainement lorsque μ, l, m, n, . . ., α, 6, γ, . . ., étant des constantes positives ou des constantes imaginaires dont la partie réelle sera positive, la partie positive de la constante μ surpassera la partie positive de chacune des constantes l, m, n, . . . Si, pour fixer les idées, on prend

$$\alpha = 6 = \gamma\ldots = 1,$$

on trouvera

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \cdots \frac{x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots}{(1+x+y+z\ldots)^{\mu}}dxdydz\ldots = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\Gamma(\mu-l-m-n\ldots)}{\Gamma(\mu)}.$$

On déduirait aisément de cette équation la valeur de l'in-

tégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{(1+x^a+y^b+z^c+\ldots)^k}.$$

Si, dans l'équation qui précède, on réduisait les variables x, y, z à une seule, et si l'on remplaçait l par a, μ par b, on retrouverait la formule connue

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)};$$

en faisant $b = 1$ et remarquant que l'on a (n° 56)

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

on aurait

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

ou

$$\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi a}{\sin a\pi},$$

et cette équation, en vertu de ce qui précède, s'étend au cas même où a est imaginaire, pourvu que sa partie réelle soit positive.

Si l'on y fait en particulier $a = b\sqrt{-1}$, a désignant une quantité réelle, elle donnera

$$\left[\int_0^\infty e^{-x}\cos(a\,lx)\,dx\right]^2 + \left[\int_0^\infty e^{-x}\sin(a\,lx)\,dx\right]^2 = \frac{2a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}.$$

122. Par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer, on arrive facilement à la détermination de l'intégrale

$$S = \int\int\int\ldots x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots,$$

dans laquelle les variables $x, y, z, \ldots$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p+\left(\frac{y}{b}\right)^q+\left(\frac{z}{c}\right)^r+\ldots<1;$$

$a, b, c, \ldots; l, m, n, \ldots; p, q, r, \ldots$, étant des constantes positives.

En effet, remplaçons d'abord $\left(\frac{x}{a}\right)^p$ par x, $\left(\frac{y}{b}\right)^q$ par y, $\left(\frac{z}{c}\right)^r$ par $z, \ldots$, et par conséquent $dx, dy, dz, \ldots$ par

$$\frac{a}{p}x^{\frac{1}{p}-1}dx,\quad \frac{b}{q}y^{\frac{1}{q}-1}dy,\quad \frac{c}{r}z^{\frac{1}{r}-1}dz,\ldots,$$

on aura

$$S=\frac{a^l b^m c^n\ldots}{pqr\ldots}\iiint\ldots x^{\frac{l}{p}-1}y^{\frac{m}{q}-1}z^{\frac{n}{r}-1}\ldots dxdydz=\frac{a^l b^m c^n}{pqr\ldots}S_1.$$

Il reste à déterminer S_1, qui est une intégrale de même forme que la proposée, mais dans laquelle $x, y, z, \ldots$ doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x+y+z+\ldots<1;$$

en posant

$$\frac{l}{p}-1=\mathrm{a},\quad \frac{m}{q}-1=\mathrm{b},\quad \frac{n}{r}-1=\mathrm{c},\ldots,$$

il viendra

$$S_1=\int\int\int\ldots x^{\mathrm{a}-1}y^{\mathrm{b}-1}z^{\mathrm{c}-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots$$

Quand le nombre des variables $x, y, z, \ldots$ se réduit à l'u-

nité, on a

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}dx = a = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(1+a)}(*);$$

si le nombre des variables se réduit à deux, il vient

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}dx \int_0^{1-x} y^{b-1}dy = \frac{1}{b}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b dx:$$

mais (n° 57)

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^b dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{\Gamma(1+a+b)};$$

donc

$$S_1 = \frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b)}{b\Gamma(1+a+b)} = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(1+a+b)}.$$

Supposons maintenant que S_1 soit une intégrale triple; on pourra l'écrire ainsi

$$S_1 = \int_0^1 x^{a-1}dx \int_0^{y_1} y^{b-1}dy \int_0^{z_1} z^{c-1}dz,$$

(*) Cette dernière transformation repose sur le théorème bien connu

$$\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma\mu,$$

ou plus généralement

$$\Gamma(\mu+n) = \mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)\Gamma(\mu),$$

que l'on déduit immédiatement de l'équation (n° 56)

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu},$$

en la différentiant n fois de suite par rapport à la quantité a. On trouve en effet de cette manière

$$\int_0^\infty x^{\mu+n-1}e^{-ax}dx = \frac{\Gamma(\mu+n)}{a^{\mu+n}} = \frac{\mu(\mu+1)\ldots\ldots(\mu+n-1)}{a^{\mu+n}}\Gamma(\mu) \text{ etc.}$$

y_1 et z_1 représentant respectivement les différences $1-x$, $1-x-y$, en sorte que l'on ait

$$1-x=y_1,\quad y_1-y=z_1.$$

Désignons par η, ζ de nouvelles variables, et posons

$$y=\eta y_1,\quad z=\zeta z_1,$$

les limites communes de η, ζ seront 0 et 1, et l'intégrale S_1 prendra la forme

$$S_1=\int_0^1 x^{a-1}dx\int_0^1 \eta^{b-1}y_1^b d\eta\int_0^1 \zeta^{c-1}z_1^c d\zeta,$$

ou, à cause de

$$y_1=1-x,\quad z_1=y_1-\eta y_1=(1-x)(1-\eta),$$

$$S_1=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}dx\int_0^1 \eta^{b-1}(1-\eta)^c d\eta\int_0^1 \zeta^{c-1}d\zeta;$$

mais

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}dx=\frac{\Gamma(a)\Gamma(1+b+c)}{\Gamma(1+a+b+c)},$$

$$\int_0^1 \eta^{b-1}(1-\eta)^c d\eta=\frac{\Gamma(b)\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+b+c)},$$

$$\int_0^1 \zeta^{c-1}d\zeta=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(1+c)},$$

donc

$$S_1=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(1+a+b+c)}.$$

S'il y a quatre variables indépendantes x, y, z, t dans l'intégrale S_1, la valeur de cette intégrale s'obtiendra encore par le même procédé. On supposera les intégrations effectuées successivement par rapport à t, z, y et x, et l'on posera

$$1-x=y_1,\quad y_1-y=z_1,\quad z_1-z=t_1:$$

les limites relatives à t, z, y et x sont respectivement o et t_1, o et z_1, o et y_1, o et 1; si donc on remplace y, z et t par de nouvelles variables liées aux premières par les relations

$$y = \eta y_1, \quad z = \zeta z_1, \quad t = \theta t_1,$$

les limites communes à ces nouvelles variables seront o et 1; de plus, on aura

$$y_1 = (1 - x), \quad z_1 = (1 - x)(1 - \eta), \quad t_1 = (1 - x)(1 - \eta)(1 - \zeta),$$

par conséquent les variables x, η, ζ, θ pourront être séparées; en d'autres termes l'intégrale multiple S_1 se décomposera dans un produit de quatre intégrales qui toutes s'exprimeront par des fonctions Γ, à l'aide de l'équation

$$\int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

ou, en changeant b en $b + 1$,

$$\int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+1)}.$$

123. On peut encore présenter cette démonstration sous une autre forme; pour plus de généralité, considérons l'intégrale

$$S = \int\int\int \ldots f(x+y+z\ldots) x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots,$$

dans laquelle $f(x + y + z \ldots)$ désigne une fonction quelconque de $x + y + z + \ldots$, tandis que $x, y, z, \ldots$ prennent toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + z + \ldots < k,$$

k étant une constante positive.

Admettons d'abord qu'il n'y ait que deux variables,

x et y; on pourra écrire

$$S = \int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{k-x} f(x+y)\,y^{m-1}\,dy:$$

faisons $x = \xi\eta$, $y = \xi(1-\eta)$, les limites relatives aux nouvelles variables ξ et η seront o et k, o et 1, de sorte qu'on aura

$$S = \int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi \int_0^1 \eta^{l-1}(1-\eta)^{m-1}\,d\eta = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)}{\Gamma(l+m)} \int_0^k f(\xi)\,\xi^{l+m-1}\,d\xi.$$

Ainsi la valeur de S dépend à la fois des fonctions Γ et d'une certaine intégrale simple.

Supposons maintenant que S contienne trois variables x, y, z; en posant $k - x = y_1$, on pourra écrire

$$S = \int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz.$$

Mais l'intégrale

$$\int_0^{y_1} y^{m-1}\,dy \int_0^{y_1-y} f(x+y+z)\,z^{n-1}\,dz$$

est du nombre de celles que nous venons de traiter, et elle est égale à

$$\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^{y_1} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi;$$

donc, à cause de $y_1 = k - x$, on aura

$$S = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \int_0^k x^{l-1}\,dx \int_0^{k-x} f(x+\xi)\,\xi^{m+n-1}\,d\xi$$

$$= \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)} \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m+n)}{\Gamma(l+m+n)} \int_0^k f(u)\,u^{l+m+n-1}\,du.$$

Cette méthode de réduction successive étant évidemment générale, nous voyons que l'intégrale proposée S s'ex-

prime dans tous les cas par la formule

$$S = \frac{\Gamma(l)\Gamma(m)\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(l+m+n+\ldots)} \int_0^k f(u) u^{l+m+n+\ldots-1} du.$$

Lorsqu'on prend $f(u) = 1$, $k = 1$, l'intégrale S redevient celle que nous avions d'abord considérée, on a

$$S = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots}{\Gamma(1+l+m+n+\ldots)},$$

et par conséquent l'intégrale

$$\int\int\int \ldots x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} \ldots dx\,dy\,dz,$$

étendue à toutes les valeurs positives de $x, y, z, \ldots$ qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r \ldots < 1,$$

sera donnée par l'équation

$$S = \frac{a^l b^m c^n \ldots}{pqr\ldots} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}+\ldots\right)}.$$

Si, la somme $l+m+n+\ldots$ étant égale à l'unité, la fonction $f(u)$ est la dérivée $F'(u)$ d'une certaine fonction $F(u)$, on aura

$$\int_0^k f(u)\, u^{l+m+n+\ldots-1} du = F(k) - F(0),$$
$$\Gamma(1+l+m+n+\ldots) = \Gamma(2) = 1,$$
$$S = \Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n)\ldots\,[F(k) - F(0)].$$

Ainsi, en particulier dans le cas d'une intégrale double, on trouvera

$$\int_0^k x^{l-1} dx \int_0^{k-x} F'(x+y)\, y^{m-1} dy = \Gamma(l)\,\Gamma(m)\,[F(k) - F(0)],$$

et en ayant égard à l'équation

$$\Gamma(l)\,\Gamma(1-l)=\frac{\pi}{\sin l\pi},$$

et remplaçant m par sa valeur $1-l$,

$$\int_0^k x^{l-1}dx\int_0^{k-x}\mathrm{F}'(x+y)y^{-l}dy=\frac{\pi[\mathrm{F}(k)-\mathrm{F}(0)]}{\sin k\pi}.$$

Soit p un paramètre plus petit que ρ, et faisons $k=\rho-p$; supposons de plus que la fonction F étant une fonction de la somme de deux variables, on ait

$$\mathrm{F}(x)=\varphi(x+p),$$

l'équation qui précède deviendra

$$\int_0^{\rho-p}x^{l-1}dx\int_0^{\rho-x-p}\varphi'(x+p+y)\,y^{-l}dy=\frac{\pi[\varphi(\rho)-\varphi(p)]}{\sin k\pi}.$$

En posant dans cette équation $\rho=\infty$, et supposant que la fonction $\varphi(\rho)$ s'évanouit pour $\rho=\infty$, on trouvera

$$\int_0^\infty x^{l-1}dx\int_0^\infty\varphi'(x+p+y)\,y^{-l}dy=-\frac{\pi\,\varphi(p)}{\sin kp}.$$

124. M. Lejeune-Dirichlet a donné le premier l'intégrale

$$\mathrm{S}=\int\int\int\ldots x^{l-1}y^{m-1}z^{n-1}\ldots dx\,dy\,dz\ldots=\frac{a^l b^m c^n\ldots}{pqr}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{l}{p}\right)\Gamma\left(\frac{m}{q}\right)\Gamma\left(\frac{n}{r}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{l}{p}+\frac{m}{q}+\frac{n}{r}\ldots\right)}$$

et il y parvint à l'aide d'une méthode très-remarquable. Elle consiste simplement à multiplier l'expression qu'il s'agit d'intégrer par un facteur dont la valeur soit égale à l'unité dans l'étendue que les intégrations doivent embrasser, et qui s'évanouisse en dehors de cette étendue. Essayons de donner une idée suffisante de cette méthode.

Supposons qu'il s'agisse de déterminer l'intégrale triple

$$S = -\frac{1}{n-1}\iiint \frac{dx\,dy\,dz}{r^{n-1}},$$

étendue à toutes les valeurs positives de x, y, z qui vérifient l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1.$$

r est d'ailleurs déterminée par l'équation

$$r^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2.$$

Cette intégrale sert au calcul de l'attraction de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ sur un point extérieur ou intérieur.

Comme l'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} \cos ku\,du \text{ (*)}$$

(*) On a (n° 88)

$$\int_0^\infty \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2};$$

d'ailleurs, a désignant ainsi que b une constante positive, on aura

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\int_0^\infty [\sin(b+a)x + \sin(b-a)x]\frac{dx}{x}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b+a)x\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(b-a)\frac{dx}{x}.$$

Or, 1° si $b > a$, $a+b$ et $b-a$ seront deux constantes positives, et chacune des intégrales du second membre sera égale à $\frac{\pi}{2}$: on aura donc

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2};$$

2°. Si $b < a$, $b-a$ sera négatif, mais $a-b$ sera positif; la première

est égale à l'unité ou à zéro, suivant que la constante positive k est inférieure ou supérieure à l'unité, il en résulte que l'intégrale S peut être considérée comme la partie réelle d'une nouvelle intégrale

$$U = -\frac{2}{\varpi(n-1)}\int_0^\infty du\,\frac{\sin u}{u}\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)u\sqrt{-1}}}{r^{n-1}}\,dx\,dy\,dz,$$

dans laquelle les intégrations par rapport aux variables x, y, z peuvent maintenant s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Pour obtenir l'intégrale triple relative à ces variables, on exprimera la fraction $\frac{1}{r^{n-1}} = \frac{1}{(r^2)^{\frac{n-1}{2}}}$ par

---

intégrale sera toujours égale à $\frac{\pi}{2}$, tandis que la seconde, qu'on peut mettre sous la forme

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty \sin(a-b)\frac{dx}{x},$$

sera égale à $-\frac{\pi}{2}$; donc

$$\int_0^\infty \sin bx \cos ax\,\frac{dx}{x} = 0.$$

L'intégrale $\int_0^\infty \sin bx \cos ax\,\frac{dx}{x}$ est donc égale à $\frac{\pi}{2}$ ou à o, suivant que b est plus grand ou plus petit que a.

Si l'on fait $b = 1$, $a = k$, la condition $b - a > 0$ devient $k < 1$ et l'on en conclut immédiatement que le produit

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin x \cos kx\,\frac{dx}{x}$$

est réellement égal à l'unité ou à o, suivant que la constante positive k est inférieure ou supérieure à l'unité.

une intégrale définie au moyen de la formule connue d'Euler (*)

$$\int_0^{\infty} e^{rt\sqrt{-1}}\, t^{s-1}dt = \frac{\Gamma(s)\, e^{\frac{s\pi}{2}\sqrt{-1}}}{r^s}.$$

Dès lors, en faisant

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)u\sqrt{-1}+(x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z)t\sqrt{-1}}\, dx\, dy\, dz,$$

on aura

$$U = -\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{-(n-1)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_0^{\infty} du\,\frac{\sin u}{u}\int_0^{\infty} dt\, t^{\frac{n-1}{2}-1}\, e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)t\sqrt{-1}}\, V.$$

V est le produit de trois intégrales simples dont celle relative à x en vertu d'une formule connue, qui dérive de la formule d'Euler, est donnée par l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(t+\frac{u}{a^2}\right)x^2-2\alpha t x\right]\sqrt{-1}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{t+\frac{u}{a^2}}}\; e^{-\frac{\alpha^2 t^2}{t+\frac{u}{a^2}}}\,\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

En substituant cette valeur et celles des deux autres intégrales de forme analogue, remplaçant ensuite la variable t par une autre θ, telle que $t=\frac{u}{\theta}$, observant que

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^3 = \sqrt{-1}\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

(*) Nous donnerons dans une Leçon supplémentaire une démonstration rigoureuse de cette formule.

et posant

$$\delta = \frac{\alpha^2}{a^2+\theta} + \frac{\beta^2}{b^2+\theta} + \frac{\gamma^2}{c^2+\theta},$$

on trouvera, après avoir différentié par rapport à α, pour avoir la composante A de l'attraction de l'ellipsoïde parallèle à l'axe des x,

$$A = \frac{4\alpha}{a^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\frac{e^{-(n-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}}{n-1}\int_0^\infty \frac{d\theta\,\theta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{c^2}\right)}}\int_0^\infty e^{\delta u\sqrt{-1}}\frac{\sin u}{u^{2-\frac{n}{2}}}du.$$

Cette expression devant être réduite à sa partie réelle, tout revient à avoir celle de

$$e^{-(n-2)\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}\int_0^\infty e^{\delta u\sqrt{-1}}\frac{\sin u}{u^{2-\frac{n}{2}}}du.$$

Or cette intégrale, en y remplaçant $\sin u$ par des exponentielles imaginaires, sera immédiatement donnée par la formule d'Euler, en ayant soin d'observer que le second membre de cette formule doit être remplacé par

$$\frac{\Gamma(s)e^{-\frac{\pi s}{2}\sqrt{-1}}}{(-q)^s},$$

lorsque q a une valeur négative. On trouve ainsi que la partie réelle qu'il s'agit d'obtenir est zéro ou

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)\sin\frac{n\pi}{2}}{2(1-\delta)^{\frac{n}{2}-1}} = \frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(1-\delta)^{\frac{n}{2}-1}},$$

suivant que $\delta > 1$ ou $\delta < 1$.

Si le point (α, β, γ) est intérieur à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

on aura

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1,$$

et par conséquent aussi $\delta < 1$; on aura donc simplement

$$=\frac{2\alpha}{a^2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{d\theta\,\theta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2+\theta}-\frac{\beta^2}{b^2+\theta}-\frac{\gamma^2}{c^2+\theta}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Si le point est extérieur, on déterminera la racine positive unique λ de l'équation

$$\delta=\frac{\alpha^2}{a^2+\theta}+\frac{\beta^2}{b^2+\theta}+\frac{\gamma^2}{c^2+\theta}=1,$$

et l'on aura évidemment $\delta>1$ ou $\delta<1$, suivant que $\theta<\lambda$ ou $\theta>\lambda$. L'expression de A sera donc

$$A=\frac{2\alpha}{a^2}\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)}\int_\lambda^\infty\frac{d\theta\,\theta^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\theta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\theta}{c^2}\right)}}\left(1-\frac{\alpha^2}{a^2+\theta}-\frac{\beta^2}{b^2+\theta}-\frac{\gamma^2}{c^2+\theta}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Si dans cette dernière équation on écrit $\lambda+\theta$ au lieu de θ, et qu'on fasse

$$a^2+\lambda=a'^2,\quad \alpha'=\frac{a\alpha}{a'},$$

$$b^2+\lambda=b'^2,\quad \beta'=\frac{b\beta}{b'},$$

$$c^2+\lambda=c'^2,\quad \gamma'=\frac{c\gamma}{c'},$$

elle prendra la même forme que lorsqu'il s'agissait d'un point intérieur.

Il est inutile d'ajouter que le procédé que nous venons d'indiquer s'applique à toute intégrale de même forme que l'intégrale proposée S, quel que soit d'ailleurs le nombre des variables qu'elle renferme.

125. M. Catalan a été conduit, par des considérations géométriques très-simples, à une méthode nouvelle de réduction qui s'applique à un grand nombre d'intégrales, et notamment à celle qui donne l'expression analytique de la surface de l'ellipsoïde. Reprenons la formule

$$S = \int\int dx dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

et supposons qu'il s'agisse de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},$$

$$S = \int\int dx dy \sqrt{\frac{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \frac{y^2}{b^2}\left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Si l'on veut calculer la huitième partie de la surface de l'ellipsoïde, il faudra étendre les intégrations à toutes les valeurs positives de x et de y qui vérifieront la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqq 1.$$

Cela posé, admettons que les trois axes a, b, c sont rangés par ordre de grandeur, de telle sorte que l'on ait

$a > b > c$, et faisons

$$1 - \frac{c^2}{a^2} = m^2, \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = n^2, \quad \frac{x}{a} = \xi, \quad \frac{y}{b} = \eta,$$

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - m^2\xi^2 - n^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}},$$

il viendra

$$S = ab\int\int \zeta d\xi d\eta :$$

les limites de la nouvelle intégrale seront fournies par la condition

$$\xi^2 + \eta^2 \leqq 1.$$

Cette intégrale $\int\int \zeta d\xi d\eta$ représente un solide dont l'élément infiniment petit a pour base le rectangle $d\xi d\eta$ et pour hauteur ζ; elle peut être considérée comme exprimant le volume de la portion du cylindre $\xi^2 + \eta^2 = 1$, comprise entre les parties positives des plans coordonnés et la surface

$$\zeta^2 = \frac{1 - m^2\xi^2 - n^2\eta^2}{1 - \xi^2 - \eta^2}.$$

Or si, après avoir mis cette équation sous la forme

$$(\zeta^2 - m^2)\xi^2 + (\zeta^2 - n^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1,$$

nous y regardons ζ comme un paramètre variable, nous conclurons que tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre, et situé à une distance plus grande que l'unité de l'origine, coupe la surface suivant une ellipse dont l'équation est

$$(\zeta^2 - m^2)\xi^2 + (\zeta^2 - n^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1.$$

Pour $\zeta = 1$ cette projection est l'origine des coordon-

nées; et si, à partir de cette limite inférieure, on fait croître ζ indéfiniment, on obtient une série d'ellipses concentriques dont la limite répondant à $\zeta = \infty$, est le cercle $\xi^2 + \eta^2 = 1$. D'après cela nous prendrons pour élément du volume dont il s'agit le cylindre ayant pour hauteur ζ, et pour base le quart de la couronne comprise entre les deux ellipses que l'on obtient en attribuant au paramètre ζ deux valeurs consécutives ζ et $\zeta + d\zeta$. Cette couronne est aussi l'accroissement, ou mieux la différentielle du quart de l'aire de l'ellipse

$$(\zeta^2 - m^2)\xi^2 + (\zeta^2 - n^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1;$$

comme les axes principaux de cette ellipse sont

$$A = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - m^2}}, \quad B = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - n^2}},$$

le quart de son aire sera

$$\frac{\pi}{4}AB = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - m^2}}\sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - n^2}}:$$

la différentielle de cette aire aura pour valeur $\frac{\pi}{4}d.AB$, et l'on aura

$$S = \frac{\pi ab}{4}\int_1^\infty \zeta d\ AB = \frac{\pi}{4}ab\left[[AB\zeta - \int_1^\infty AB d\zeta\right]$$

$$= \frac{\pi}{4}ab\left[\frac{\zeta(\zeta^2 - 1)}{\sqrt{(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - n^2)}} - \int_1^\infty \frac{(\zeta^2 - 1)d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - m^2)(\zeta^2 - n^2)}}\right].$$

Les limites de ζ sont bien $\zeta = 1$, $\zeta = \infty$, car on a réellement, pour $\zeta = 1$, $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\xi^2 + \eta^2 = 0$; pour $\zeta = \infty$, $\xi^2 + \eta^2 = 1$, comme cela doit être; l'intégrale devant s'étendre à toutes les valeurs de ξ et de η propres à vérifier la condition $\xi^2 + \eta^2 \leqq 1$.

L'intégrale double S est donc ramenée à une intégrale simple qu'il s'agit d'évaluer. Pour cela posons

$$\zeta = \frac{m}{\sin u},$$

d'où

$$d\zeta = -\frac{m\cos u}{\sin^2 u}du,$$

$$\frac{-(\zeta^2-1)d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}} = \left(\frac{m^2}{\sin^2 u}-1\right)\frac{du}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}{\sin^2 u} - \frac{1-n^2}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}\right)du.$$

Par ce changement de variable, l'intégrale fonction de ζ se trouve décomposée en deux autres

$$\int\frac{du\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}{\sin^2 u}, \quad -(1-n^2)\int\frac{du}{\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}},$$

chacune de celles-ci devant être prise depuis $\sin u = m$ jusqu'à $\sin u = 0$, ou, en posant $m = \sin\mu$, depuis $u=\mu$ jusqu'à $u = 0$; en renversant ces limites et posant, pour simplifier, $\frac{n}{m}=k$, la différence des deux intégrales devient

$$\frac{1-n^2}{m}\int_0^\mu\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} - m\int_0^\mu\frac{du\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}{\sin^2 u},$$

et en intégrant par parties,

$$\frac{1-n^2}{m}\int_0^\mu\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} + m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} + mk^2\int_0^\mu\frac{\cos^2 u\,du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

ou

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u} + \frac{1}{m}\int_0^\mu\frac{(1-m^2k^2\sin^2 u)du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

ou

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}+m\int_0^\mu\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\,du+\frac{1-m^2}{m}\int_0^\mu\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}},$$

ou, en faisant usage des notations reçues,

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}+m\mathrm{E}(k,\mu)+\frac{1-m^2}{m}\mathrm{F}(k,\mu).$$

Il reste à calculer entre les limites relatives à chacune des variables ζ et u la somme des quantités

$$\frac{(\zeta^2-1)\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-m^2)(\zeta^2-n^2)}},\quad m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}.$$

En exprimant la première en fonction de u, il s'agira de chercher, entre les limites $u=0$, $\sin u=m$, la différence

$$m\cot u\sqrt{1-k^2\sin^2 u}-\frac{m^2-\sin^2 u}{\sin u\cos u\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}=\frac{(1-m^2-n^2\cos^2 u)\sin u}{\cos u\sqrt{m^2-n^2\sin^2 u}}.$$

Cette valeur devenant nulle à la première limite, il faudra seulement y substituer $\sin u=m$, ce qui la changera en

$$\frac{(1-m^2)(1-n^2)m}{m\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-n^2}}=\sqrt{(1-m^2)(1-n^2)}.$$

De tout ce qui précède on conclut enfin que la surface totale de l'ellipsoïde est donnée par l'équation

$$\mathrm{S}=2\pi ab\left[\sqrt{1-m^2}\sqrt{1-n^2}+m\mathrm{E}(k,\mu)+\frac{1-m^2}{m}\mathrm{F}(k,\mu)\right],$$

ou

$$\mathrm{S}=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)\mathrm{E}(k,\mu)+c^2\mathrm{F}(k,\mu)].$$

Cette valeur diffère, par les notations seulement, de celle qui a été donnée d'abord par Legendre (t. I[er] des *Exercices de Calcul intégral*, p. 109); pour l'appliquer il faut se rappeler que

$$k^2 = \frac{n}{m} = \frac{a(b^2 - c^2)}{b(a^2 - c^2)},$$

$$\sin\mu = m = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad \cos\mu = \frac{c}{a}.$$

126. Si l'on avait voulu ramener simplement l'intégrale S à une intégrale simple sans descendre jusqu'aux fonctions elliptiques, comme nous venons de le faire avec M. Lobatto, on aurait pu procéder un peu différemment. Revenons à l'équation

$$S = \frac{m}{n} \int\int \zeta d\xi d\eta,$$

qui nous montre que S est un solide dont l'élément est un parallélipipède ayant le rectangle $d\xi d\eta$ pour base, et ζ pour hauteur. Appelons A une surface qui ait $d\xi\, d\eta$ pour élément ou qui soit déterminée par l'équation

$$A = \int\int d\xi d\eta,$$

on pourra écrire

$$S = \int \zeta dA.$$

Comme ξ, η sont assujettis à vérifier constamment l'équation

$$(\zeta^2 - m^2)\xi^2 + (\zeta^2 - n^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1,$$

et à satisfaire à la condition

$$\xi^2 + \eta^2 \leqq 1,$$

les limites correspondantes de ζ seront 1 et ∞; et de plus

A ne peut être que le quart de l'ellipse représentée par l'équation qui précède ; on aura donc

$$\mathrm{A} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}},$$

$$\mathrm{S} = \frac{\pi}{4}mn\int_1^{\infty}\zeta d.\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-m^2}}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{\zeta^2-n^2}}.$$

En effectuant la différentiation, réduisant et posant

$$\mathrm{U} = \int_1^{\infty}\frac{\zeta^2 d\zeta}{\sqrt{\zeta^2-m^2}\sqrt{\zeta^2-n^2}},$$

on trouvera

$$\mathrm{S} = \frac{\pi}{4}mn\left[\frac{1-m^2}{m}\frac{d\mathrm{U}}{dm}+\frac{1-n^2}{n}\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right] = \frac{\pi}{4}\left[n(1-m^2)\frac{d\mathrm{U}}{dm}+m(1-n^2)\frac{d\mathrm{U}}{dn}\right].$$

L'intégrale double est donc ainsi réduite à une intégrale simple.

127. Pour seconde application de cette méthode, considérons l'intégrale triple

$$\mathrm{S} = \int\int\int dx\,dy\,dz\sqrt{\frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2}},$$

dans laquelle m, n, p sont des constantes positives moindres que l'unité, et supposons que l'intégration doive s'étendre à toutes les valeurs positives de x, y, z propres à vérifier la condition

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 1.$$

Posons

$$t^2 = \frac{1-m^2x^2-n^2y^2-p^2z^2}{1-x^2-y^2-z^2},$$

d'où

$$\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1}x^2 + \frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1}y^2 + \frac{t^2 - p^2}{t^2 - 1}z^2 = 1,$$

et appelons V un volume qui, ayant pour élément $dxdydz$, est déterminé par l'équation

$$V = \int\int\int dx\,dy\,dz,$$

S pourra se mettre sous la forme $\int t dV$; et comme les limites de t sont

1 correspondant à

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$$

∞ correspondant à

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

on aura

$$S = \int_1^\infty t dV.$$

dV est une fonction de t facile à évaluer; en effet, puisque les variables positives x, y, z sont assujetties à vérifier constamment l'équation d'un ellipsoïde dont les axes sont

$$A = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - m^2}},\quad B = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - n^2}},\quad C = \sqrt{\frac{t^2 - 1}{t^2 - p^2}},$$

V ne peut être que le quart $\frac{\pi}{3}$ ABC du volume de cet ellipsoïde, et l'on trouvera en conséquence

$$d.ABC = \frac{tdt\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{(t^2 - m^2)(t^2 - n^2)(t^2 - p^2)}}\left(\frac{1 - m^2}{t^2 - m^2} + \frac{1 - n^2}{t^2 - n^2} + \frac{1 - p^2}{t^2 - p^2}\right),$$

et, en posant

$$U = \int_1^\infty \frac{t^2 dt\sqrt{t^2 - 1}}{\sqrt{(t^2 - m^2)(t^2 - n^2)(t^2 - p^2)}},$$

$$S = \frac{1}{\sigma}\pi\left(\frac{1-m^2}{m}\frac{dU}{dm} + \frac{1-n^2}{n}\frac{dU}{dn} + \frac{1-p^2}{p}\frac{dU}{dp}\right).$$

128. Les résultats que nous venons d'obtenir ont été déduits de considérations géométriques qui ne peuvent pas s'étendre au cas d'un nombre de variables supérieur à 3. Mais il devait être évident *à priori*, que toutes ces considérations détournées sont l'expression d'un seul et même fait analytique; c'est ce dont il est facile de s'assurer. Considérons en effet l'intégrale multiple d'ordre n

$$S = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots \sqrt{\frac{1 - m^2x^2 - n^2y^2 - p^2z^2 \ldots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 \ldots\ldots}},$$

dans laquelle m, n, p,..., sont des constantes positives moindres que l'unité, et x, y, z,... des variables positives liées entre elles par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \leqq 1.$$

Posons

$$t^2 = \frac{1 - m^2x^2 - n^2y^2 - n^2z^2 - \ldots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - \ldots\ldots},$$

et calculons l'intégrale multiple $\int\int\int dx\,dy\,dz \ldots\ldots$ dans laquelle x, y, z,... prennent toutes les valeurs propres à satisfaire à la condition

$$\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1}x^2 + \frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1}y^2 + \frac{t^2 - p^2}{t^2 - 1}z^2 \ldots \leqq 1,$$

qui n'est pas contradictoire avec la première

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leqq 1,$$

attendu que les rapports $\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1}$, $\frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1}$,.... sont tous

plus grands que l'unité. Nous obtiendrons de la sorte une intégrale définie exprimée en t, m, n, p,..., que nous pouvons représenter par $F(t)$... Attribuons maintenant à t une nouvelle valeur $\theta = t + dt$ et calculons l'intégrale $\int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots$ entre les nouvelles limites qui se déduisent de la condition

$$\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1} x^2 + \frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1} y^2 + \ldots \leqq 1,$$

en y remplaçant t par θ, puis retranchons le premier résultat du second; la différence égale à $d.F(t)$ représentera la somme des valeurs que prend la fonction $dxdydz$... lorsque les variables satisfont à la condition

$$\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1} x^2 + \frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1} + \ldots = 1,$$

et que, dans cette équation, le paramètre t passe de t à $t + dt$. Par conséquent, d'après les premiers principes du calcul intégral, on pourra considérer le produit $td.F(t)$ comme exprimant, dans l'intégrale

$$S = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots \sqrt{\frac{1 - m^2 x^2 - n^2 y^2 \ldots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 \ldots}},$$

la partie que l'on obtiendrait en faisant croître le radical de t à $t + dt$; d'ailleurs aux limites

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 \ldots = 1,$$

correspondent $t = 1$, $t = \infty$; donc, pour déterminer la valeur complète de l'intégrale cherchée, il suffit de prendre la somme des valeurs qu'acquiert la fonction $td.F(t)$ lorsque t, croissant par degrés infiniment petits, passe de 1 à l'infini. En résumé, si l'on fait

$$F(t) = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots,$$

les limites étant déterminées par l'équation

$$\frac{t^2 - m^2}{t^2 - 1}x^2 + \frac{t^2 - n^2}{t^2 - 1}y^2 + \frac{t^2 - p^2}{t^2 - 1}z^2 + \ldots \leqq 1,$$

on aura

$$\int\int\int \ldots dx dy dz \ldots \sqrt{\frac{1 - m^2x^2 - n^2y^2 - p^2z^2 \ldots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 \ldots}} = \int_1^\infty td\ \mathrm{F}(t),$$

les limites de l'intégrale multiple étant données par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \leqq 1.$$

Comme on a

$$\int td.\mathrm{F}(t) = t\mathrm{F}(t) - \int \mathrm{F}(t)dt,$$

on peut mettre l'intégrale définie proposée sous une forme plus simple, où il n'y a plus même de différentiations à effectuer. Pour déterminer la fonction $\mathrm{F}(t)$ restée jusqu'ici inconnue, il suffit de recourir à la formule remarquable de M. Dirichlet

$$\int\int\int \ldots x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1} \ldots dx dy dz \ldots = \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}{pqr \ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{p}\right)\Gamma\left(\frac{\beta}{q}\right) \ldots}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q} + \ldots\right)},$$

dans laquelle, comme nous l'avons vu, toutes les constantes étant positives, les variables x, y, z,...., aussi positives, doivent satisfaire à la condition

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \ldots \leqq 1.$$

Pour appliquer cette formule au calcul de la fonction

$F(t)$, il suffit de faire

$$\alpha=\beta=\gamma=\ldots=1,$$

$$a=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}},\quad b=\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-n^2}}..p=q=r=\ldots=2;$$

on obtient ainsi immédiatement, à cause de

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

et en appelant ν le nombre des variables,

$$F(t)=\int\int\int\ldots dxdydz\ldots=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2-n^2}\cdots},$$

et par conséquent

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\int_1^\infty td.\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2-m^2}\cdot\frac{t^2-1}{t^2-n^2}\cdots};$$

en effectuant la différentiation indiquée, on aura

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\int_1^\infty\frac{t^2(t^2-1)^{\frac{\nu}{2}-1}dt}{\sqrt{(t^2-m^2)(t^2-n^2)\ldots}}\left(\frac{1-m^2}{t^2-m^2}+\frac{1-n^2}{t^2-n^2}+\ldots\right).$$

Le cas où les quantités $m, n, p,\ldots$ sont égales entre elles doit être remarqué ; on a alors

$$S=\int\int\int\ldots dxdydz\ldots\sqrt{\frac{1-m^2(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}$$

$$=\nu(1-m^2)\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^\nu}{\Gamma\left(1+\frac{\nu}{2}\right)}\int_1^\infty\frac{t^2(t^2-1)^{\frac{\nu}{2}-1}dt}{(t^2-m^2)^{\frac{\nu}{2}+1}}.$$

En posant

$$t^2 - 1 = (t^2 - m^2)\sin^2 u,$$

il vient successivement

$$t^2 = \frac{1 - m^2 \sin^2 u}{\cos^2 u}, \quad t^2 - m^2 = \frac{1 - m^2}{\cos^2 u},$$

$$t^2 - 1 = (1 - m^2)\frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}, \quad tdt = (1 - m^2)\frac{\sin u du}{\cos^3 u},$$

$$t^2 dt = (1 - m^2)\frac{\sin u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u}}{\cos^4 u},$$

$$\frac{t^2 dt}{(t^2 - m^2)^2}\cdot\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 - m^2}\right)^{\frac{\nu}{2}-1} = \frac{1}{1 - m^2}\sin^{\nu-1} u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u},$$

$$S = 2\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1} u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u}.$$

Si ν est impair, l'intégrale sera réductible aux transcendantes elliptiques de première et de seconde espèce; et si ν est pair, elle pourra s'exprimer par des logarithmes. Il ne sera pas inutile de montrer comment s'opère cette réduction. On a identiquement, en posant $\sqrt{1 - m^2 \sin^2 u} = \Delta$,

$$\sin^{\nu-1} u du \Delta = \sin^{\nu-3} u du \Delta + \frac{1}{2m^2}\sin^{\nu-4} u \cos u \times - 2m^2 \sin u \cos u du \Delta;$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1} u du \Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-3} u du \Delta - \frac{1}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta^3 [(\nu - 4)\sin^{\nu-5} u \cos^2 u du - \sin^{\nu-3} u du]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-3} u du \Delta - \frac{\nu-4}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-5} u du \Delta + \frac{\nu-4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-3} u du \Delta$$

$$+ \frac{\nu-3}{3m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-3} u du \Delta - \frac{\nu-3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1} u du \Delta.$$

Cette équation donne, en posant, pour abréger,

$$A_{\nu-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1} u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u},$$

$$A_{\nu-1} = \frac{(\nu-1)m^2 + (\nu-3)}{\nu m^2} A_{\nu-3} - \frac{\nu-4}{\nu m^2} A_{\nu-5}.$$

1°. Si ν est impair, on a

$$A_0 = E_1, \quad A_2 = \frac{2m^2 - 1}{3m^2} E_1 + \frac{1 - m^2}{3m^2} F_1;$$

en partant de ces valeurs, on calculera facilement A_4, A_6,....

2°. Si ν est pair, les termes initiaux de la série seront

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u},$$

$$A_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 u du \sqrt{1 - m^2 \sin^2 u}.$$

Pour déterminer ces deux intégrales, posons

$$\cos u = x.$$

La première se change immédiatement en

$$\int_0^1 dx \sqrt{1 - m^2 + m^2 x^2} = m \int_0^1 dx \sqrt{n^2 + x^2},$$

en faisant $\frac{1 - m^2}{m^2} = n^2$. Or, on a

$$\int dx \sqrt{n^2 + x^2} = \frac{x}{2} \sqrt{n^2 + x^2} + \frac{n^2}{2} \mathrm{l} \left(x + \sqrt{n^2 + x^2}\right);$$

donc

$$\int_0^1 dx\sqrt{n^2+x^2} = \frac{1}{2}\sqrt{n^2+1} + \frac{n^2}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{1+\sqrt{1+n^2}}{n}\right),$$

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1-m^2}{m}\,\mathrm{l}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}\right).$$

La seconde intégrale se transforme successivement en

$$A_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin u\,(1-\cos^2 u)\,du\sqrt{1-m^2\sin^2 u} = A_1 - m\int_0^1 x^2dx\sqrt{n^2+x^2},$$

mais l'intégration par parties donne

$$\int x^2dx\sqrt{n^2+x^2} = \frac{x\,(n^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - n^2\int dx\sqrt{n^2+x^2}}{4};$$

donc

$$m\int_0^1 x^2dx\sqrt{n^2+x^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{m^2} - n^2A_1\right),$$

$$A_3 = \left(1+\frac{n^2}{4}\right)A_1 - \frac{1}{4m^2} = \frac{3m^2+1}{4m^2}\,A_1 - \frac{1}{4m^2},$$

et enfin

$$A_3 = \frac{3m^2-1}{8m^2} + \frac{(1-m^2)(3m^2+1)}{8m^2}\,\mathrm{l}\sqrt{\frac{1+m}{1-m}}.$$

Les deux premiers termes de la série étant connus, on calculera facilement les suivants.

Dans le cas particulier où $m=0$, on aura

$$S = 2\,\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\nu-1}u\,du = 2\,\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)},$$

et par suite

$$\int\int\int\cdots\frac{dx\,dy\,dz\ldots}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2\ldots}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu}\frac{\pi^{\frac{\nu+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}.$$

Dans cette intégrale les variables sont positives et satisfont à la condition

$$x^2+y^2+z^2+\ldots \leqq 1.$$

129. La méthode de réduction qui précède peut être présentée sous la forme générale suivante. Supposons, 1° que l'intégrale proposée soit

$$S=\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots)\,\mathrm{F}[f(x,y,z,\ldots)];$$

2° que les ν variables $x, y, z, \ldots$, positives, pour plus de simplicité, doivent toujours satisfaire à la condition

$$\varphi(x,y,z,\ldots)\leqq 0;$$

3° que la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ soit de telle nature qu'elle prenne des valeurs déterminées et connues t_0, T, quand on fera

$$x=y=z\ldots=0,\quad \varphi=0;$$

4° que de plus l'intégrale

$$\int\int\int\ldots dx\,dy\,dz\ldots F(x,y,z,\ldots),$$

prise entre les limites

$$x=y=z\ldots=0,\quad f(x,y,z,\ldots)\leqq t$$

soit connue et égale à $\mathrm{f}(t)$;

5° qu'enfin la seconde condition

$$f(x,\ y,\ z\ldots,) \leqq t$$

n'étant pas contradictoire avec la première

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ldots) \leqq 0,$$

en faisant varier t depuis t_0 jusqu'à T, on reproduise tous les systèmes de valeurs $x,\ y,\ z,\ldots$, satisfaisant à la première, on aura

$$S = \int_{t_0}^{T} F(t) \frac{d.f(t)}{dt} dt.$$

Ce théorème deviendra évident si on répète, sur ce cas général, les raisonnements déjà développés sur un exemple particulier.

Pour premier exemple, considérons l'intégrale

$$S = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left(\frac{1 - ax^{\alpha} - by^{\beta} - cz^{\gamma} - \ldots}{1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots}\right)^{\frac{1}{m}},$$

dans laquelle les quantités $p,\ q,\ r,\ldots,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$ sont des constantes positives quelconques; $a,\ b,\ c,\ldots$ des constantes moindres que l'unité; m une constante positive plus grande que 1; et $x,\ y,\ldots$ des variables qui peuvent recevoir toutes les valeurs positives compatibles avec la condition

$$x^{\alpha} + y^{\beta} + z^{\gamma} + \ldots \leqq 1.$$

Si l'on fait

$$\tau = \frac{1 - ax\ - by^{\beta} - cz^{\gamma} - \ldots}{1 - x^{\alpha} - y^{\beta} - z^{\gamma} - \ldots},$$

$$\mathrm{f}(t) = \int\int\int \ldots dx\,dy\,dz \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots,$$

les limites étant déterminées par la condition

$$(t^m - a)x^\alpha + (t^m - b)y^6 + \ldots\ldots \leqq t^m - 1,$$

ou

$$\left(\frac{x}{\sqrt[\alpha]{\frac{t^m-1}{t^m-a}}}\right)^\alpha + \left(\frac{y}{\sqrt[6]{\frac{t^m-1}{t^m-b}}}\right)^6 + \ldots \leqq 1,$$

on aura

$$\mathrm{S} = \int_1^\infty t\,d\mathrm{f}(t);$$

puis, par le théorème de M. Dirichlet,

$$\mathrm{f}(t) = \frac{\left(\frac{t^m-1}{t^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}} \left(\frac{t^m-1}{t^m-b}\right)^{\frac{q}{6}} \left(\frac{t^m-1}{t^m-c}\right)^{\frac{r}{\gamma}}}{\alpha 6 \gamma \ldots} \; \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{6}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{6}+\ldots\right)},$$

et par conséquent

$$\mathrm{S} = \frac{1}{\alpha 6 \gamma} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{6}\right)\ldots}{\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{6}+\ldots\right)} \int_1^\infty t\,d\left[\left(\frac{t^m-1}{t^m-a}\right)^{\frac{p}{\alpha}}\left(\frac{t^m-1}{t^m-b}\right)^{\frac{q}{6}}\ldots\right].$$

Si les constantes a, b, c..., sont égales entre elles, on trouvera, en posant, pour abréger, $t^m = \theta$, $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{6}+\frac{r}{\gamma}\ldots = k$,

$$\int\int\int \ldots dx\,dy\,dz^r \ldots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \ldots \left[\frac{1 - a(x^\alpha + y^6 + z^\gamma + \ldots)}{1 - (x + y^6 + z^\gamma + \ldots)}\right]^{\frac{1}{m}}$$

$$= (1-a)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{6}\right)\ldots}{\alpha 6 \gamma \ldots \Gamma(k)} \int_1^\infty \frac{\theta^{\frac{1}{m}}(\theta-1)^{k-1}\,d\theta}{(\theta-a)^{k+1}}.$$

Si dans cette dernière a est nul, le second membre se réduit à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\cdots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(\gamma)}\int_1^{\infty}\frac{(\theta-1)^{k-1}d\theta}{\theta^{k+1-\frac{1}{m}}};$$

en posant

$$\theta=\frac{1}{\tau},$$

l'intégrale se transforme en

$$\int_0^1 \tau^{-\frac{1}{m}}(1-\tau)^{k-1}d\tau=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma(k)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{m}\right)};$$

donc

$$\iiint\ldots\frac{dx\,dy\,dz\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}}{(1-x^{\alpha}-y^{\beta}-z^{\gamma}\ldots)^{\frac{1}{m}}}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}.$$

La condition aux limites est toujours

$$x^{\alpha}+y^{\beta}+z^{\gamma}+\ldots\leqq 1.$$

Cette dernière équation se déduit immédiatement du théorème plus général (nº 123) démontré d'abord par M. Liouville.

Pour donner un exemple numérique, prenons l'intégrale

$$S=\iiint\ldots dx\,dy\,dz\ldots\sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}{1+(x^2+y^2+z^2+\ldots)}},$$

dans laquelle les ν variables sont positives et assujetties à

vérifier la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 \ldots \leqq 1.$$

On peut évidemment la mettre sous la forme

$$S = \left(\frac{1}{2}\right)^\nu \int\int\int \ldots \frac{dx\,dy\,dz\ldots}{\sqrt{xyz}} \sqrt{\frac{1-(x+y+z+\ldots)}{1+(x+y+z+\ldots)}};$$

x, y, z,... devant satisfaire à la condition

$$x + y + z + \ldots \leqq 1.$$

En employant la formule générale on obtient

$$S = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \int_0^1 t^{\frac{\nu}{2}-1} dt \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.$$

Or en posant

$$t = \theta^{\frac{1}{2}},$$

et ayant égard à la relation

$$\int_0^1 \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} d\theta = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

on trouve

$$\int_0^1 t^{\frac{\nu}{2}-1} dt \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = -\int_0^1 \frac{t^{\frac{\nu}{2}} dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_0^1 \frac{t^{\frac{\nu}{2}-1} dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{\nu}{4}-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta + \frac{1}{2}\int_0^1 \theta^{\frac{\nu}{4}-1}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+1\right)} + \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)}.$$

donc

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^{\nu+1}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+1\right)} + \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{4}+\frac{1}{2}\right)} \right].$$

De cette équation, jointe à la relation connue

$$\Gamma(\tfrac{1}{4})\Gamma(\tfrac{3}{4}) = \frac{\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi},$$

on tirera successivement

$$\int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{4})^2},$$

$$\iint dx\, dy \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2)}{1+(x^2+y^2)}} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2}-1\right),$$

$$\iiint dx\, dy\, dz \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2)}{1+(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{1}{8}\sqrt{2\pi}\left[\frac{4\pi^2}{\Gamma(\frac{1}{4})^2} - \Gamma(\tfrac{1}{4})^2\right],$$

$$\iiiint dx\, dy\, dz\, du \sqrt{\frac{1-(x^2+y^2+z^2+u^2)}{1+(x^2+y^2+z^2+u^2)}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right).$$

130. Pour mieux faire connaître les ressources nouvelles que ces procédés ingénieux ont créées à l'analyse, reprenons encore, avec M. Catalan, l'intégrale d'ordre n,

$$S = \iiint \ldots dx\, dy\, dz \ldots,$$

et supposons que les limites des intégrations soient déterminées par la condition

$$\frac{x^2}{k^2-a^2} + \frac{y^2}{k^2-b^2} + \frac{z^2}{k^2-c^2} + \ldots \leqq 1,$$

en supposant, 1° que les variables ne reçoivent que des valeurs positives; 2° que de plus les constantes k, a, b, c,...

sont inégales et telles que l'on ait

$$k^2 > a^2 > b^2 > c^2 \ldots$$

Pour effectuer l'intégration, substituons aux variables $x, y, z, \ldots, n$ nouvelles variables $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, liées aux premières par les équations

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} + \ldots = 1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} + \ldots = 1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2 - a^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - c^2} + \ldots = 1,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Lorsque $n = 3$, ces équations sont celles qui servent à passer d'un système d'axes rectangulaires à un système de coordonnées elliptiques.

Pour déterminer les limites de ces nouvelles variables, il faudra assigner aux anciennes des valeurs arbitraires satisfaisant à la condition

$$\frac{x^2}{k^2 - a^2} + \frac{y^2}{k^2 - b^2} + \frac{z^2}{k^2 - c^2} + \ldots \leq 1;$$

puis, en désignant par h^2 la valeur positive et plus petite que l'unité que prend alors le premier membre, résoudre l'équation

$$\frac{x^2}{t - a^2} + \frac{y^2}{t - b^2} + \frac{z^2}{t - c^2} + \ldots = h^2.$$

Les n racines de cette équation seront les valeurs de $\lambda^2, \mu^2, \nu^2, \ldots$, correspondantes aux valeurs choisies pour $x^2, y^2, z^2, \ldots$. Si, par exemple, $n = 3$, et si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point compris

dans l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{k^2-a^2}+\frac{y^2}{k^2-b^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}=1,$$

les trois racines de l'équation en t seront les carrés des coordonnées elliptiques de ce point, ou les carrés des paramètres des trois surfaces orthogonales qui s'y croisent.

On prouve facilement que l'équation en t a ses racines réelles (*) et inégales; et l'on démontre ainsi la possibilité

(*) En effet, si, comme on l'a supposé, les constantes $a, b, c,\ldots$ satisfont la condition $a > b > c,\ldots$, il suffit de poser successivement dans l'équation

$$\frac{x^2}{t-a^2}+\frac{y^2}{t-b^2}+\frac{z^2}{t-c^2}+\ldots-h^2=0,$$

$$t=-\infty;\quad t=a^2+\varepsilon,\quad t=b^2+\varepsilon,\quad t=c^2+\varepsilon,\ldots,\quad t=\infty;$$

ε désignant une quantité positive et infiniment petite; puis d'observer les signes que prend le premier membre de cette équation pour affirmer que les limites des racines $\lambda^2, \mu^2, \nu^2,\ldots$ de cette équation sont a^2 et b^2, b^2 et c^2,.... ∞. Si à la place de h^2 on avait mis $+h^2$, les limites des racines eussent été $-\infty$ et a^2, a^2 et b^2,... b^2 et c^2.... Pour démontrer la réalité des racines de cette équation, M. Plana a suivi une autre marche qui consiste à poser

$$t=\alpha+\beta\sqrt{-1};$$

par cette substitution l'équation proposée se décompose dans les deux suivantes

$$\frac{x^2(\alpha-a^2)}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2}+\frac{y^2(\alpha-b^2)}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2}+\frac{z^2(\alpha-c^2)}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2}+\ldots=1,$$

$$\frac{x^2\beta}{(\alpha-a^2)^2+\beta^2}+\frac{y^2\beta}{(\alpha-b^2)^2+\beta^2}+\frac{z^2\beta}{(\alpha-c^2)^2+\beta^2}+\ldots=0.$$

Or la seconde exige évidemment que l'on ait $\beta=0$, c'est-à-dire que la racine t soit réelle. La première de ces méthodes, comme l'a fait observer M. Liouville, paraît se prêter difficilement aux équations transcendantes, ou, ce qui revient au même, au cas où le premier membre, devenu une série convergente, renferme un nombre infini de termes; on a en effet besoin, pour l'employer, de savoir, *à priori*, que l'équation dont on s'occupe n'a jamais plus de n racines. Il faudra donc recourir à l'artifice ingénieux de M. Plana si le nombre n est infini; l'équation peut alors se mettre sous la forme

$$\Sigma\frac{x^2}{t-a}=h^2.$$

du système de transformations de coordonnées employé ici. On sait de plus que les racines λ^2, μ^2, ν^2,... de cette même équation satisfont à la condition

$$\lambda^2 > a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2 \ldots,$$

En faisant

$$t = \alpha + \beta\sqrt{-1},$$

on trouve

$$\Sigma \frac{x^2\left(\alpha - a - \beta\sqrt{-1}\right)}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = h^2,$$

d'où l'on déduit

$$\Sigma \frac{x^2(\alpha - a)}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = h^2, \quad \beta\Sigma \frac{x^2}{(\alpha - a)^2 + \beta^2} = 0.$$

Or la seconde de ces équations est absurde, à moins que l'on n'ait $\beta = 0$, c'est-à-dire à moins que la racine t soit réelle. Donc l'équation proposée n'a pas de racines imaginaires. Pour prouver qu'elle n'a pas non plus de racines égales, il suffira d'ailleurs d'observer que l'existence d'une racine réelle multiple entraînerait celle de l'équation absurde

$$\Sigma \frac{x^2}{(t - a)^2} = 0.$$

La démonstration précédente s'étend d'elle-même au cas où l'équation donnée deviendrait

$$\Sigma \frac{x^2}{t - a} = f(t),$$

$f(t)$ étant non plus une simple constante, mais une fonction telle que la quantité

$$f\left(\alpha + \beta\sqrt{-1}\right)$$

se réduise à la forme

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}^2\sqrt{-1},$$

A et B désignant des quantités réelles : cette équation n'aurait alors ni racines imaginaires ni racines égales.

On peut conclure de ce que nous venons de dire que si $\mathrm{F}(t)$ est une fonction algébrique ou transcendante décomposable en facteurs simples sous la forme

$$\mathrm{F}(t) = k\left(1 - \frac{t}{a}\right)^m \left(1 - \frac{t}{b}\right)^n \left(1 - \frac{t}{c}\right)^p \ldots,$$

où k, a, b, c,... désignent des constantes réelles quelconques, et m, n, p,...

ce qui apprend que chacune des nouvelles variables, à l'exception de λ, sera comprise entre deux termes consécutifs de la suite a, b, c,..... Afin de savoir si ces deux

---

des exposants positifs, l'équation

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = f(t)$$

n'aura ni racines imaginaires, ni racines égales, tant que la fonction $f(t)$ remplira la condition dont on a parlé ci-dessus; cela résulte de ce que la fonction $\frac{F'(t)}{F(t)}$ est égale à

$$\frac{m}{t-a} + \frac{n}{t-b} + \frac{p}{t-c} \cdots$$

Posons, par exemple,

$$\varphi(t) = \cos t,$$

puis

$$f(t) = a,$$

ou

$$f(t) = a + b^2 t,$$

a et b étant deux constantes réelles, nous formerons les deux équations

$$\tang t = -a, \quad \tang t = -a - b^2 t,$$

que les géomètres ont déjà considérées et dont les racines sont nécessairement réelles et inégales.

En prenant $f(t) = 0$, l'équation

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = f(t)$$

se réduit à

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = 0,$$

et par conséquent lorsque $F(t)$ a la forme indiquée plus haut, l'équation

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales. De là il est aisé de conclure que l'équation $F'(t)$ a aussi toutes ses racines réelles, quoiqu'elle puisse avoir des racines multiples.

termes sont les limites de l'intégrale correspondante à cette nouvelle variable, recourons aux valeurs de x^2, y^2, z^2, ..., en fonction de λ^2, μ^2, ν^2, ..., valeurs qui, d'après la méthode d'élimination de M. Binet, sont données par les équations

$$x^2 + \frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)\ldots}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\ldots} = 0,$$

$$y^2 + \frac{(b^2-\lambda^2)(b^2-\mu^2)(b^2-\nu^2)\ldots}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)\ldots} = 0,$$

$$z^2 + \frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)\ldots}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)\ldots} = 0.$$

En posant dans ces équations

1°. $$x = y = z\ldots = 0,$$

auquel cas $h = 0$, on trouve

$$\lambda = a, \quad \mu = b, \quad \nu = c, \ldots;$$

2°. $$x^2 = k^2 - a^2, \quad y^2 = z^2 \ldots = 0,$$

ce qui donne $h = 1$, il vient

$$\lambda = k, \quad \mu = b, \quad \nu = c, \ldots;$$

les valeurs limites de λ sont donc k et a. On prouverait de la même manière que les valeurs limites de μ sont a et b, etc., et par conséquent, pour embrasser tous les éléments de l'intégrale S, on doit attribuer à chacune des variables λ, μ, ν, ..., toutes les valeurs comprises entre les deux constantes qui comprennent entre elles cette même variable.

Cela posé, puisqu'en désignant par Δ_σ la fraction

$$\Delta_\sigma = \frac{(\lambda^2-\sigma^2)(\mu^2-\sigma^2)(\nu^2-\sigma^2)\ldots}{(a^2-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)},$$

on aura, en vertu des formules qui servent au changement

de variables indépendantes

$$dx\,dy\,dz\ldots = \lambda\mu\nu\ldots d\lambda\,d\mu\,d\nu\ldots\sqrt{\Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,\Delta_\nu},$$

on aura

$$S=\int_a^k\int_a^b\int_b^c\ldots d\lambda\,d\mu\,d\nu\ldots\lambda\mu\nu\ldots\sqrt{\Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,\Delta_\nu}.$$

D'un autre côté, si l'on applique à l'intégrale S, prise sous la première forme, la formule de M. Dirichlet, on trouve

$$S=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)\ldots},$$

donc

$$\int_a^k\int_a^b\int_a^c\ldots\lambda d\lambda.\mu d\mu.\nu d\nu\ldots\sqrt{\Delta_\lambda\,\Delta_\mu\,\Delta_\nu\ldots}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)(k^2-c^2)\ldots}$$

Cette formule est susceptible de simplification : en effet, toutes les différences telles que $\lambda^2-\mu^2$ se trouvent évidemment élevées au carré sous le radical du premier membre; on aura dès-lors, sans ambiguïté de signes et sans imaginaires,

$$\int_a^k\int_a^b\int_b^c\ldots\lambda d\lambda.\mu d\mu.\nu d\nu\ldots\frac{P(\lambda^2-\mu^2)}{\sqrt{D_\lambda D_\mu D_\nu}},$$

P indiquant un produit de facteurs de même forme que celui qui suit cette caractéristique, tandis que, en désignant par m la constante qui dans la suite $a, b, c, \ldots$ occupe le même rang que σ dans la suite $\lambda, \mu, \nu, \ldots,$

D_σ représente le produit

$$-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)\ldots(l^2-\sigma^2)(\sigma^2-m^2)(\sigma^2-n^2)(\sigma^2-p^2)\ldots(\sigma^2-t^2).$$

Si la dernière constante t^2 était nulle, alors le facteur σ^2-t^2 de D_σ, se réduisant à σ^2, détruit le facteur σ qui se trouve hors du radical sous le signe d'intégration, et l'on a

$$\int_k^a\int_a^b\int_b^c\ldots d\lambda\, d\mu\, d\nu\ldots\frac{P(\lambda^2-\mu^2)}{\sqrt{D'_\lambda D'_\mu D'_\nu}}$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}k\sqrt{(k^2-a^2)(k^2-b^2)\ldots(k^2-s^2)},$$

D'_σ étant égal à

$$(a^2-\sigma^2)(b^2-\sigma^2)(c^2-\sigma^2)\ldots(l^2-\sigma^2)(\sigma^2-m^2)(\sigma^2-p^2)\ldots(\sigma^2-s^2).$$

En prenant dans cette formule $n=3$ et calculant $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$ au moyen de l'équation bien connue

$$\Gamma(\mu+1)=\mu\,\Gamma(\mu),$$

qui donne successivement

$$\Gamma\left(1+\tfrac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$
$$\Gamma\left(1+\tfrac{3}{2}\right)=\Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right)=\tfrac{3}{2}\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

on retombe sur l'intégrale triple donnée d'abord par M. Lamé.

VINGT-UNIÈME LEÇON.

Leçon supplémentaire sur le passage du réel à l'imaginaire dans la recherche des intégrales définies.—Détermination de quelques intégrales particulières.

131. En exposant le procédé si ingénieux appliqué par M. Lejeune-Dirichlet à la réduction de certaines intégrales multiples, nous avons été forcés de recourir à une formule très-remarquable donnée d'abord par Euler, et démontrée depuis rigoureusement par Poisson. La démonstration de Poisson, longue et difficile, s'appuie sur l'intégration d'un système d'équations simultanées, ce qui est réellement un chemin détourné. Pour remédier à cet inconvénient et ne pas renvoyer à la seconde partie du Calcul intégral la recherche d'une intégrale définie, nous avons été amenés à exposer avec quelques détails, dans une leçon supplémentaire, deux des Mémoires de M. Cauchy; ce sont peut-être les plus remarquables et les moins connus. L'un, ayant pour titre : *Mémoire sur les intégrales définies*, fait partie des volumes de l'Académie des Sciences; l'autre sous le titre : *Recherche d'une formule générale qui fournit la valeur de la plupart des intégrales définies connues et celle d'un grand nombre d'autres*, a été inséré dans les Annales de M. Gergonne, tomes XVI et XVII. On trouvera d'ailleurs dans cette

leçon, et les vraies bases du passage du réel à l'imaginaire, et un procédé très-ingénieux et très-général pour la détermination d'une multitude d'intégrales définies.

Soit $F(z)$ une fonction quelconque de la variable z, et supposons que z soit lui-même une fonction de deux autres variables x et y, les dérivées de l'intégrale $\int F(z)dz$ prises tour à tour par rapport à x et à y seront respectivement

$$F(z)\frac{dz}{dx} = F(z)D_x z, \quad F(z)\frac{dz}{dy} = F(z)D_y z.$$

La dérivée du second ordre de cette même intégrale, prise par rapport aux deux variables x et y, sera ou

$$D_y . F(z) D_x z,$$

ou

$$D_x . F(z) D_y z,$$

et l'on aura par conséquent

$$D_y . F(z) D_x z = D_x . F(z) D_y z.$$

On veut vérifier directement cette équation en effectuant les différentiations indiquées : elle est identique ou subsiste quelle que soit la fonction de x et de y que l'on prenne pour z ; elle subsistera si l'on suppose cette fonction en partie réelle et en partie imaginaire. Ainsi, par exemple, si u et v désignent deux fonctions réelles quelconques de x et de y, on pourra faire

$$z = u + v\sqrt{-1};$$

alors, si l'on suppose

$$F(u + v\sqrt{-1}) = U + V\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{U}\frac{du}{dx}-\mathrm{V}\frac{dv}{dx}=\mathrm{P},\quad \mathrm{U}\frac{du}{dy}-\mathrm{V}\frac{dv}{dy}=\mathrm{Q},$$
$$\mathrm{U}\frac{dv}{dx}+\mathrm{V}\frac{du}{dx}=\mathrm{R},\quad \mathrm{U}\frac{dv}{dy}+\mathrm{V}\frac{du}{dy}=\mathrm{S},$$

l'équation

$$\mathrm{D}_y.\mathrm{F}(z)\,\mathrm{D}_x z=\mathrm{D}_x.\,\mathrm{F}(z)\,\mathrm{D}_y z$$

deviendra

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy}+\frac{d\mathrm{R}}{dy}\sqrt{-1}=\frac{d\mathrm{Q}}{dx}+\frac{d\mathrm{S}}{dx}\sqrt{-1},$$

et se partagera nécessairement en deux autres

$$\frac{d\mathrm{P}}{dy}=\frac{d\mathrm{Q}}{dx},\quad \frac{d\mathrm{R}}{dy}=\frac{d\mathrm{S}}{dx}.$$

On peut encore vérifier immédiatement ces deux équations en différentiant; elles renferment toute la théorie du passage du réel à l'imaginaire. Il ne reste plus qu'à indiquer la manière de s'en servir. Multiplions les deux membres par $dx\,dy$, elles deviendront

$$dx\,d_y\mathrm{P}=dy\,d_x\mathrm{Q},\quad dx\,d_y\mathrm{R}=dy\,d_x\mathrm{S}.$$

Si maintenant on intègre par rapport à x et à y, entre les limites x_0, X, y_0, Y, l'une des intégrations s'effectuera toujours; et si l'on désigne par P_{y_0}, P_{Y}, R_{y_0}, R_{Y}, Q_{x_0}, Q_{X}, S_{x_0}, S_{X} les valeurs des fonctions P, Q, R, S correspondantes à x_0, X ou y_0, Y, on aura

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\mathrm{P}_{\mathrm{Y}}dx-\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\mathrm{P}_{y_0}dx=\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}\mathrm{Q}_{\mathrm{X}}\,dy-\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}\mathrm{Q}_{x_0}dy,$$
$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\mathrm{R}_{\mathrm{Y}}\,dx-\int_{x_0}^{\mathrm{X}}\mathrm{R}_{y_0}dx=\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}\mathrm{S}_{\mathrm{X}}\,dy-\int_{y_0}^{\mathrm{Y}}\mathrm{S}_{x_0}dy,$$

en supposant toutefois qu'entre les limites des intégrations les fonctions P, Q, R, S conservent toujours une valeur déterminée.

Si l'on fait

$$x_0 = 0,\quad X = x;\quad y_0 = 0,\quad Y = y,$$

et si l'on représente par p et r, q et s les valeurs que prennent les fonctions P et R pour $y=0$, Q et S pour $x = 0$, il viendra

$$\int_0^x P\,dx - \int_0^x p\,dx = \int_0^y Q\,dy - \int_0^y q\,dy,$$
$$\int_0^x R\,dx - \int_0^x r\,dx = \int_0^y S\,dy - \int_0^y s\,dy.$$

132. 1[re] *Application.* $u = x$, $v = y$; on aura

$$U + V\sqrt{-1} = F(x + y\sqrt{-1}),$$
$$\frac{du}{dx} = 1,\quad \frac{du}{dy} = 0,\quad \frac{dv}{dx} = 0,\quad \frac{dv}{dy} = 1,$$
$$P = U,\quad Q = -V,\quad R = V,\quad S = U.$$

Si l'on fait de plus

$$F(x) = \varpi,\quad F(y\sqrt{-1}) = \mathcal{U} + \mathcal{V}\sqrt{-1},$$

on aura

$$p = \varpi,\quad q = -\mathcal{V},\quad r = 0,\quad s = \mathcal{U},$$

et par suite

$$\int_0^x U\,dx - \int_0^x \varpi\,dx = \int_0^y \mathcal{V}\,dy - \int_0^y V\,dy,$$
$$\int_0^x V\,dx = \int_0^y U\,dy - \int_0^y \mathcal{U}\,dy.$$

Ces deux équations peuvent être remplacées par la seule formule

$$\int_0^x F(x + y\sqrt{-1})\,dx - \int_0^x F(x)\,dx$$
$$= \sqrt{-1}\left[\int_0^y F(x + y\sqrt{-1})\,dy - \int_0^y F(y\sqrt{-1})\,dy\right].$$

Exemple : Faisons

$$F(z) = e^{-z^2},$$

on aura

$$U = e^{y^2} e^{-x^2} \cos 2xy,$$
$$V = -e^{y^2} e^{-x^2} \sin 2xy,$$
$$w = e^{-x^2},\quad \mathit{U} = e^{y^2},\quad \mathit{V} = 0,$$

et par suite

$$e^{y^2} \int_0^x e^{-x^2} \cos 2xy\,dx - e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \sin 2xy\,dy = \int_0^x e^{-x^2}\,dx,$$

$$e^{y^2} \int_0^x e^{-x^2} \sin 2xy\,dx + e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \cos 2xy\,dy = \int_0^y e^{y^2}\,dy.$$

Si l'on suppose infinie la seconde des limites x, les deux quantités

$$e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \sin 2xy\,dy,\quad e^{-x^2} \int_0^y e^{y^2} \cos 2xy\,dy,$$

s'évanouiront, et l'on aura simplement, en faisant $y = a$,

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} e^{-a^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin 2ax\,dx = e^{-a^2} \int_0^a e^{x^2}\,dx.$$

2me *Application.* $u = ax$, $v = xy$; a étant une quantité constante, on aura

$$U + V\sqrt{-1} = F\left(ax + xy\sqrt{-1}\right),$$

$$\frac{du}{dx} = a,\quad \frac{dv}{dx} = y,\quad \frac{du}{dy} = 0,\quad \frac{dv}{dy} = x,$$

$$P = aU - Vy,\quad Q = -Vx,\quad R = Uy + aV,\quad S = Ux.$$

Si l'on fait de plus

$$F(ax) = w,\quad F(0) = k,$$

on aura

$$p = a\varpi,\quad q = 0,\quad r = 0,\quad s = 0,\quad k = 0,$$

à moins que k ne soit infini. Cela posé, on aura

$$a\int_0^x \mathrm{U}dx - y\int_0^x \mathrm{V}dx - a\int_0^x \varpi dx = -x\int_0^y \mathrm{V}dy,$$
$$y\int_0^x \mathrm{U}dx + a\int_0^x \mathrm{V}dx = x\int_0^y \mathrm{U}dy.$$

Ces deux équations peuvent être remplacées par l'équation unique

$$(a + y\sqrt{-1})\int_0^x \mathrm{F}(ax + xy\sqrt{-1})dx - a\int_0^x \mathrm{F}(ax)\,dx$$
$$= x\sqrt{-1}\int_0^y \mathrm{F}(ax + xy\sqrt{-1})\,dy;$$

on pourra encore donner à ces deux équations la forme

$$\int_0^x \mathrm{U}dx = \frac{x}{a^2+y^2}\left[y\int_0^y \mathrm{U}dy - a\int_0^y \mathrm{V}dy\right] + \frac{a^2}{a^2+y^2}\int_0^x \varpi dx,$$
$$\int_0^x \mathrm{V}dx = \frac{x}{a^2+y^2}\left[a\int_0^y \mathrm{U}dy + y\int_0^y \mathrm{V}dy\right] - \frac{ay}{a^2+y^2}\int_0^x \varpi dx.$$

Si la valeur extrême de x est telle que les deux quantités $x\mathrm{U}$, $x\mathrm{V}$ s'évanouissent quel que soit y, on aura

$$x\int_0^y \mathrm{U}dy = x\int_0^y \mathrm{V}dy = 0,$$

et par suite

$$\int_0^x \mathrm{U}dx = \frac{a}{a^2+y^2}\int_0^x a\varpi dx,$$
$$\int_0^x \mathrm{V}dx = -\frac{y}{a^2+y^2}\int_0^x a\varpi dx.$$

En faisant $y = b$, ces deux équations pourront être rem-

placées par l'équation unique

$$(a+b\sqrt{-1})\int_0^x \mathrm{F}[(a+b\sqrt{-1})x]dx = \int_0^x a\mathrm{F}(ax)dx.$$

Dans un grand nombre de cas, U et V s'évanouiront par la supposition $x=\infty$; on aura alors

$$(a+b\sqrt{-1})\int_0^\infty \mathrm{F}[(a+b\sqrt{-1})x]dx = \int_0^\infty \mathrm{F}(x)dx.$$

Si dans ces équations on suppose

$$\mathrm{F}(x) = x^{n-1}f(x),$$

n étant un nombre réel quelconque, on aura

$$\mathrm{F}[(a+b\sqrt{-1})x] = (a+b\sqrt{-1})^{n-1}x^{n-1}f(ax+bx\sqrt{-1}),$$

et en posant

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin\beta,$$

$$a+b\sqrt{-1} = r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta),$$

$$(a+b\sqrt{-1})^{n-1} = r^{n-1}[\cos(n-1)\alpha+\sqrt{-1}\sin(n-1)\alpha],$$

et par conséquent

$$\int_0^\infty x^{n-1}f[r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta)x]dx$$

$$= \frac{\cos n\alpha - \sqrt{-1}\sin n\alpha}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)dx.$$

On a d'ailleurs $a^2+b^2=r^2$, $\alpha = \operatorname{arctang}\frac{b}{a}$, cette notation désignant toujours le plus petit des arcs qui a $\frac{b}{a}$ pour tangente; et si l'on fait

$$f[r(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\beta)x] = \mathrm{U}+\mathrm{V}\sqrt{-1},$$

cette dernière équation équivaut aux deux suivantes

$$\int_0^\infty \mathrm{U}x^{n-1}dx = \frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)dx,$$

$$\int_0^\infty \mathrm{V}x^{n-1}dx = -\frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}f(x)dx.$$

1er *Exemple* : Posons $f(x)=e^{-x}$, il viendra

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\left(\cos bx+\sqrt{-1}\sin bx\right)dx$$

$$=\frac{\cos n\alpha-\sqrt{-1}\sin n\alpha}{r^n}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\cos bx dx=\frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\sin bx dx=\frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx.$$

Si l'on observe que l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

est précisément celle que nous avons désignée par la notation $\Gamma(n)$, la première de ces équations deviendra

$$\int_0^\infty x^{n-1}e^{-\left(a+b\sqrt{-1}\right)x}dx=\frac{e^{n\alpha\sqrt{-1}}\Gamma(n)}{r^n};$$

en faisant $a=0$ on aurait

$$\alpha=\text{arc tang}\,\infty=\frac{\pi}{2},\quad r=b,$$

et remplaçant alors n par a, on aura

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{bx\sqrt{-1}}=\frac{e^{\frac{a\pi}{2}\sqrt{-1}}}{b^a}\Gamma(a);$$

c'est précisément la formule d'Euler : elle équivaut aux

deux équations

$$\int_0^\infty x^{a-1} \cos bx dx = \frac{\cos \frac{a\pi}{2}}{b^a} \Gamma(a),$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin bx dx = \frac{\sin \frac{a\pi}{2}}{b^a} \Gamma(a).$$

En posant dans la formule d'Euler $x = (y + 6)^2$, $a = \frac{1}{2}$, et ayant égard aux équations

$$\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(by^2 + 2b6y)\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-b6^2} \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

C'est la seconde formule employée par M. Dirichlet (nº 124).

2me *Exemple:* Si l'on faisait $f(x) = e^{-(x+c)^2}$, on aurait

$$f(ax + bx\sqrt{-1}) = e^{b^2x^2 - (ax+c)^2}[\cos 2bx(ax+c) - \sqrt{-1} \sin 2bx(ax+c)],$$

$$U = e^{b^2x^2 - (ax+c)^2} \cos 2bx(ax+c),$$

$$V = - e^{b^2x^2 - (ax+c)^2} \sin 2bx(ax+c),$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{b^2x^2 - (ax+c)^2} \cos 2bx\,(ax+c)\,dx = \frac{\cos n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-(x+c)^2} x^{n-1} dx,$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{b^2x^2 - (ax+c)^2} \sin 2bx\,(ax+c)\,dx = \frac{\sin n\alpha}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-(x+c)^2} x^{n-1} dx.$$

133. Nous ne pousserons pas plus loin l'application de ces principes. Passons à la recherche de la formule générale qui fournit la valeur d'un très-grand nombre d'intégrales définies.

Supposons que la fonction

$$F(x + y\sqrt{-1})$$

s'évanouisse, 1° pour $x = \pm \infty$, quel que soit y; 2° pour $y = \infty$, quel que soit x, et conserve une valeur unique et déterminée pour toutes les valeurs de x et de y renfermées entre les limites

$$x = -\infty, \quad x = +\infty, \quad y = 0, \quad y = \infty;$$

si après avoir cherché les racines réelles ou imaginaires de l'équation $\frac{1}{F(x)} = 0$, on désigne par $x_1, x_2, x_3, \ldots.$ celles de ces racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif, et par $F_1, F_2, F_3, \ldots.$ les valeurs que reçoivent les produits

$$\varepsilon F(x_1 + \varepsilon), \quad \varepsilon F(x_2 + \varepsilon), \quad \varepsilon F(x_3 + \varepsilon), \ldots,$$

lorsque ε se réduit à 0; alors, comme nous l'avons vu, en posant

$$\Delta = 2\pi(F_1 + F_2 + F_3 + \ldots)\sqrt{-1},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \Delta.$$

Comme cette formule fournit les valeurs d'une multitude d'intégrales définies, il ne sera pas inutile d'en donner une démonstration directe. Elle se déduit très-facilement d'un théorème que nous allons établir en peu de mots. Si l'on désigne par $F(x)$ une fonction telle que l'expression $F(x + y\sqrt{-1})$ s'évanouisse, 1° pour $x = \pm \infty$ quel que soit y; 2° pour $y = \infty$ quel que soit x, et demeure toujours finie et continue entre les limites

$$x = -\infty, \quad x = \infty; \quad y = 0, \quad y = \infty;$$

et si de plus on nomme F la limite vers laquelle converge le produit $xF(x)$, tandis que la valeur numérique

de x devient infiniment grande, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = -\pi F\sqrt{-1}.$$

Démonstration. Pour établir ce théorème, nous chercherons d'abord la valeur de l'intégrale

$$\int_{-X}^{X} F(x)\,dx.$$

On a généralement

$$D_y F(x+y\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\, D_x F(x+y\sqrt{-1}):$$

et si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente, par rapport à x et à y, entre les limites

$$x=-X,\quad x=+X;\quad y=0,\quad y=\infty,$$

on en tirera

$$\int_{-X}^{+X}\int_0^{\infty} D_y F(x+y\sqrt{-1})\,dy\,dx = \sqrt{-1}\int_0^{\infty}\int_{-X}^{+X} D_x F(x+y\sqrt{-1})\,dx\,dy,$$

puis, en ayant égard à la condition $F(x+\infty\sqrt{-1})=0$,

$$\int_{-X}^{+X} F(x)\,dx = -\sqrt{-1}\int_0^{\infty}\left[F(X+y\sqrt{-1}) - F(-X+y\sqrt{-1})\right]dy.$$

Si maintenant on attribue à la quantité X une valeur très-grande, on aura successivement

$$(X+y\sqrt{-1})F(X+y\sqrt{-1}) = (-X+y\sqrt{-1})F(-X+y\sqrt{-1}) = F,$$

et par suite

$$F(X+y\sqrt{-1}) = \frac{F}{X+y\sqrt{-1}},$$

$$F(-X+y\sqrt{-1}) = \frac{F}{-X+y\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\int_{-X}^{+X} F(x)dx = -F\sqrt{-1}\int_0^\infty \left[\frac{1}{X+y\sqrt{-1}} + \frac{1}{X-y\sqrt{-1}}\right]dy$$
$$= -F\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{2X\,dy}{X^2+y^2} = -\pi F\sqrt{-1}.$$

Cette dernière équation deviendra rigoureuse si l'on pose $X=\infty$, et l'on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = -\pi F\sqrt{-1}.$$

Observons, toutefois, que si l'intégrale définie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$$

est du nombre de celles dont la valeur générale est indéterminée, la formule qui précède fournira seulement celle des valeurs particulières de l'intégrale que nous avons désignée sous le nom de *valeur principale*.

Corollaire 1[er]. Lorsque la quantité désignée par F s'évanouit, l'intégrale proposée n'admet qu'une seule valeur qui se réduit à zéro, en sorte qu'on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 0.$$

Ainsi, par exemple, si l'on prend

$$F(x) = \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-a}}{1+x^2} = \frac{\cos ax + \sqrt{-1}\sin ax}{1+x^2} - \frac{e^{-a}}{1+x^2},$$

on trouvera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax + \sqrt{-1}\sin ax}{1+x^2}\,dx - e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 0,$$

et par suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = e^{-a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x^2}\,dx = 0.$$

Corollaire 2me. Si l'on désigne par $\mathrm{F}(x)$, $F(x)$ deux fonctions qui, considérées isolément, ne vérifient *pas les* conditions énoncées dans le théorème, mais dont la différence $\mathrm{F}(x) - F(x)$ satisfasse aux conditions dont il s'agit ; alors, en représentant par F et F les limites vers lesquelles convergent les produits $x\mathrm{F}(x)$, $xF(x)$, tandis que la valeur numérique de la variable x croît de plus en plus, on aura évidemment

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathrm{F}(x) - F(x)]\,dx = \pi(F - \mathrm{F})\sqrt{-1},$$

et par suite

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \pi(F - \mathrm{F})\sqrt{-1}.$$

Les intégrales comprises dans cette dernière formule, doivent encore être réduites à leurs valeurs principales.

Si la quantité F s'évanouit, on aura simplement

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \pi F\sqrt{-1}.$$

Corollaire 3me. Supposons que l'expression

$$\mathrm{F}(x + y\sqrt{-1})$$

s'évanouisse toujours, 1° pour $x = \pm\infty$, quel que soit y; 2° pour $y = \infty$, quel que soit x, mais devienne infinie pour un ou plusieurs systèmes de valeurs positives ou

négatives de x et de valeurs nulles ou positives de y. Alors, pour déterminer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)dx$, à l'aide de la formule donnée, il suffira de trouver une fraction rationnelle de x telle que la différence $\mathrm{F}(x) - F(x)$ remplisse les conditions énoncées dans le théorème. Considérons d'abord le cas où l'expression $\mathrm{F}(x+y\sqrt{-1})$ devient infinie pour $x=a$, $y=b$, b représentant une quantité positive ou nulle. Faisons, pour abréger,

$$a+b\sqrt{-1}=x_1,$$

et désignons par F_1 la limite vers laquelle converge le produit $(x-x_1)\mathrm{F}(x)$, tandis que le facteur $x=x_1$ converge vers zéro : la différence

$$\mathrm{F}(x)-\frac{\mathrm{F}_1}{x-x_1}=\frac{(x-x_1)\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}_1}{x-x_1}$$

obtiendra en général une valeur finie pour $x=x_1$; et si entre les racines de l'équation $\frac{1}{\mathrm{F}(x)}=0$, la racine x_1 est la seule dans laquelle le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif, cette différence remplira les conditions énoncées dans le théorème. On pourra donc prendre

$$F(x)=\frac{\mathrm{F}_1}{x-x_1}=\frac{\mathrm{F}_1}{x-a-b\sqrt{-1}}.$$

Cela posé, on trouve, 1° $F=\mathrm{F}_1$;

2°. Si b est nul,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx=\mathrm{F}_1 \lim \int_{-\mathrm{X}}^{+\mathrm{X}} \frac{\mathrm{F}_1 dx}{x-a}=\mathrm{F}_1 \lim \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{X}-a}{\mathrm{X}+a}\right)^2=0,$$

et si b est positif,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx=\lim \int_{-\mathrm{X}}^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{F}_1 dx}{x-a-b\sqrt{-1}}=\mathrm{F}_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b\sqrt{-1}\,dx}{(x-a)^2+b^2}=\pi\,\mathrm{F}_1\sqrt{-1};$$

on aura donc, si b est nul,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \pi \mathrm{F}_1 \sqrt{-1};$$

si b est positif,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = 2\pi \mathrm{F}_1 \sqrt{-1}.$$

Si b devenait négatif, on devrait prendre $F(x) = 0$, et l'on aurait, en conséquence,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = 0.$$

134. Pour établir les formules qui précèdent, nous avons supposé que le produit $(x - x_1)\,\mathrm{F}(x)$ convergeait vers une limite finie F_1, tandis que le facteur $x - x_1$ s'approchait indéfiniment de o. Supposons maintenant que ce produit ait une limite infinie, et que dans la suite

$$(x - x_1)\,\mathrm{F}(x),\quad (x - x_1)^2\,\mathrm{F}(x), \ldots,\quad (x - x_1)^m\,\mathrm{F}(x),$$

le terme $(x - x_1)^m\,\mathrm{F}(x)$ soit le premier qui ait une limite finie; alors, si l'on pose

$$(x - x_1)^m \mathrm{F}(x) = f(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{1} f'(x_1) + \ldots$$
$$+ \frac{(x - x_1)^{m-1}}{1.2.3..(m-1)} f^{(m-1)}(x_1) + (x - x_1)^m \varphi(x),$$

la fonction $\varphi(x)$ conservera, en général, une valeur finie pour $x = x_1$ et remplira la condition énoncée dans le théorème. Comme on aura d'ailleurs

$$\varphi(x) = \mathrm{F}(x) - \frac{f'(x_1)}{1} \frac{1}{(x - x_1)^{m-1}} - \frac{f''(x_1)}{1.2} \frac{1}{(x - x_1)^{m-2}} - \ldots$$
$$- \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{1}{x - x_1},$$

il est clair qu'on pourra prendre

$$F(x) = \frac{f'(x_1)}{1} \frac{1}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{f''(x_1)}{1.2} \frac{1}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{1}{x-x_1}.$$

En adoptant cette valeur de $F(x)$, on trouvera

$$F_1 = \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

et par conséquent l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx + \pi(F_1 - \mathrm{F}_1)\sqrt{-1},$$

continuera de subsister pourvu que l'on suppose

$$F_1 = \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)} = \lim \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \mathrm{D}_x^{m-1}(x-x_1)^m \mathrm{F}(x).$$

On trouvera encore dans cette hypothèse, 1° lorsque b étant nul, les expressions

$$f^{(m-2)}(x),\quad f^{(m-4)}(x),\quad f^{(m-6)}(x),\ \ldots,$$

se réduiront toutes à zéro,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 0;$$

2° lorsque, b étant nul, quelques-unes des mêmes expressions obtiendront des valeurs différentes de zéro,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \pm\infty;$$

3° lorsque b sera positif,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = 2\pi F_1 \sqrt{-1}.$$

Par suite, les formules

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)dx = 2\mathrm{F}_1\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)dx = 2\pi\mathrm{F}_1\sqrt{-1}$$

subsisteront si la racine de l'équation $\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = 0$ est une racine imaginaire dans laquelle le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif, ou une racine réelle pour laquelle les expressions $f^{(m-2)}(x)$, $f^{(m-4)}(x)$, $f^{(m-6)}(x)$, ... s'évanouissent.

Si dans la racine x_1, le coefficient de $\sqrt{-1}$ était négatif, on retrouverait la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)dx = 0.$$

Si l'équation $\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = 0$ admettait plusieurs racines x_1, x_2, x_3, ..., alors, pour obtenir la valeur de $F(x)$ propre à remplir les conditions prescrites, il suffirait d'ajouter ensemble les valeurs de $F(x)$ correspondantes à ces diverses racines.

135. Les formules qui précèdent réduisent la détermination des intégrales qu'elles renferment à la recherche des racines de l'équation $\frac{1}{\mathrm{F}(x)} = 0$.

La formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(x)dx = \Delta$$

peut d'ailleurs, si l'on veut, être remplacée par la suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{F}(x)+\mathrm{F}(-x)}{2}dx = \tfrac{1}{2}\Delta.$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait

$$\mathrm{F}(x) = \varphi(u).\chi(v).\psi(w)\ldots f(x),$$

$\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... désignant des fonctions rationnelles des variables u, v, w,..., et u, v, w,..., $f(x)$ représentant des fonctions de x qui restent complétement déterminées dans le cas même où, après avoir remplacé x par $x+y\sqrt{-1}$, on attribue à x une valeur réelle quelconque, et à y une valeur réelle positive. Concevons d'ailleurs que la fonction $f(x)$ ne devienne jamais infinie pour aucune valeur finie, réelle ou imaginaire, de la variable x; pour obtenir les racines de l'équation $\frac{1}{F(x)}=0$, il faudra d'abord chercher celles des équations

$$\frac{1}{\varphi(u)}=0, \quad \frac{1}{\chi(v)}=0, \quad \frac{1}{\psi(w)}=0, \ldots,$$

dans lesquelles les fonctions $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$, ... sont, par hypothèse, rationnelles. Supposons ces mêmes équations résolues, et soit $h+k\sqrt{-1}$ une de leurs racines, on n'aura plus à résoudre que des équations de la forme

$$u=h+k\sqrt{-1}, \quad v=h+k\sqrt{-1}, \ldots;$$

chacune d'elles fournira une seule racine, dont il sera facile de fixer la valeur, si l'on a pris pour u, v, w,... quelques-unes des fonctions

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}, \quad l(r-x\sqrt{-1}), \quad l\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right),$$
$$l\left[r\sin\theta+(r\cos\theta-x)\sqrt{-1}\right],$$

r et s étant des quantités positives et θ un arc compris entre les limites 0 et π. En effet, en posant, pour abréger,

$$\rho=(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \omega=\text{arc tang}\,\frac{h}{k},$$

on trouvera pour

$$\frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}=h+k\sqrt{-1},\quad x=\frac{2\rho\cos\omega+(1-\rho^2)\sqrt{-1}}{1+2\rho\sin\omega+\rho^2};$$

pour

$$1(r-x\sqrt{-1})=h+k\sqrt{-1},$$
$$x=-e^h\sin k+(e^h\cos k-r)\sqrt{-1};$$

pour

$$1\left(1+\frac{s}{x}\sqrt{-1}\right)=h+k\sqrt{-1},$$

$$x=\frac{s}{e^h\sin k-(e^h\cos k-1)\sqrt{-1}}\cdots,$$

et ainsi du reste.

Si l'on prenait pour u, v, w,... quelques-unes des fonctions

$$\sin bx,\ \cos bx,\ e^{bx},\ e^{bx\sqrt{-1}},\ e^{(a+b\sqrt{-1})x},$$
$$1(1+re^{bx\sqrt{-1}}),\quad 1(1-re^{bx\sqrt{-1}}),\ldots,$$

a, b désignant des quantités quelconques, et r un nombre inférieur à l'unité, chacune des équations

$$\frac{1}{\varphi(u)}=0,\quad \frac{1}{\varphi(v)}=0,\ldots$$

aurait une infinité de racines. Ainsi, par exemple, en représentant par n un nombre entier quelconque, on trouverait, pour $\sin bx=0$,

$$x=0,\quad x=\pm\frac{\pi}{b},\ldots,\quad x=\pm\frac{n\pi}{b};$$

pour $\cos bx=0$,

$$x=\pm\frac{\pi}{2b},\quad x=\pm\frac{3\pi}{2b},\ldots,\quad x=\pm\frac{(2n+1)\pi}{2b};$$

pour $e^{bx} = h + k\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{1}{b}\left[\mathrm{l}\rho + \left(\frac{\pi}{2} - \varpi\right)\sqrt{-1} \pm 2n\pi\sqrt{-1}\right];$$

pour $e^{(a+b\sqrt{-1})x} = h + k\sqrt{-1}$,

$$x = \frac{\mathrm{l}\rho + \left(\frac{\pi}{2} - \varpi\right)\sqrt{-1} \pm 2n\pi\sqrt{-1}}{a + b\sqrt{-1}} \ldots$$

Alors la somme désignée par Δ se composerait, en général, d'une infinité de termes, et par conséquent l'intégrale $\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{r}\,dx$ se trouverait représentée par la somme d'une série infinie.

136. En ayant égard aux diverses remarques que l'on vient de faire, on déduira des équations fondamentales une multitude de formules générales propres à la détermination des intégrales définies : nous nous contenterons d'en citer quelques-unes. En désignant par r une quantité positive, et par m un nombre entier, on établira sans difficulté les formules générales

$$\int_0^\infty \frac{F(x) - F(-x)}{2\sqrt{-1}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}F(0),$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2+r^2}\,\frac{\pi}{2} = F(r\sqrt{-1}),$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x) - F(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{x\,dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}F(r\sqrt{-1}),$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,\frac{r\,dx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{4}[F(r)-F(-r)]\sqrt{-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2\sqrt{-1}}\,\frac{r^2\,dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi}{2}\left[F(0) - F(r\sqrt{-1})\right],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{r - x\sqrt{-1}}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{r + x\sqrt{-1}}\,dx = 2\pi F\left(r\sqrt{-1}\right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{\left(r - x\sqrt{-1}\right)^m}\,dx = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(x)}{\left(r + x\sqrt{-1}\right)^m}\,dx = (-1)^{m-1}\frac{2\pi}{\Gamma(m)}\frac{d^{m-1}F\left(r\sqrt{-1}\right)}{dr^{m-1}}.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction rationnelle de la variable x, et concevons qu'après avoir calculé les diverses racines de l'équation $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, on représente par

$$h + k\sqrt{-1}$$

l'une quelconque de celles dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ est positif. Soient de plus n le nombre des racines égales à $h + k\sqrt{-1}$, ε une quantité infiniment petite, et H_n, K_n deux quantités réelles déterminées par la formule

$$H_n + K_n\sqrt{-1} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} D_\varepsilon^n \left[\varepsilon^n \varphi\left(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon\right)\right],$$

qui deviendra simplement

$$H + K\sqrt{-1} = \varepsilon\varphi\left(h + k\sqrt{-1} + \varepsilon\right),$$

si une seule racine est égale à $h + k\sqrt{-1}$.

Soit enfin $f(x)$ une fonction telle que l'équation

$$\frac{1}{f(x)} = 0$$

n'admette point de racines dans lesquelles le coefficient de $\sqrt{-1}$ soit positif, ou du moins qui ne produise dans

la valeur de Δ que des termes dont la somme se réduise à o; on tirera de l'équation

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx = \Delta :$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f(x)dx=(K_{m-1}-H_{m-1})f(h+k\sqrt{-1})+(K_{m-2}-H_{m-2})\frac{f'(h+k\sqrt{-1})}{1}\ldots$$
$$+(K_1-H_1\sqrt{-1})\frac{f^{(m-1)}(h+k\sqrt{-1})}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

les expressions $K - H\sqrt{-1}$, $K_1 - H_1\sqrt{-1}, \ldots$, devant être réduites à moitié quand la quantité k devient nulle. Ainsi, par exemple, a, b, r désignant toujours des quantités positives, $h + k\sqrt{-1}$ une des racines inégales de l'équation

$$\frac{1}{\varphi(x)} = 0,$$

ω et ρ ce que nous avons déjà vu, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-x\sqrt{-1})^{a-1}\varphi(x)dx = -2\pi[(K-H\sqrt{-1})(k-h\sqrt{-1})^{a-1}+\ldots],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{bx\sqrt{-1}}\varphi(x)dx=-2\pi[(K-H\sqrt{-1})e^{-bk}(\cos bh+\sqrt{-1}\sin bh)+\ldots)],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}l(1-rx\sqrt{-1})\varphi(x)dx=-2\pi[(K-H\sqrt{-1})l(1+kr-hr\sqrt{-1})+\ldots].$$

....

Chacune de ces formules se décomposera en deux équations réelles, lorsqu'on égalera séparément à o et les parties réelles des deux membres, et les parties multipliées par $\sqrt{-1}$. En opérant ainsi, et prenant pour $\varphi(x)$ une fonction réelle, on obtiendra une multitude de formules parmi lesquelles nous citerons les suivantes :

$$\int_0^\infty x^{a-1}\varphi(x)dx = \frac{2\pi}{\sin a\pi}\left\{\rho^{a-1}\left[1+k\cos(1-a)\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)-k\sin(1-a)\frac{\pi}{2}+\omega\right]+\ldots\right.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos bx\,\varphi(x)dx = -2\pi[(K\cos bh + H\sin bh)e^{-bk} + \ldots],$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin bx\,\varphi(x)dx = -2\pi[(K\sin bh - H\cos bh)e^{-bk} + \ldots\ldots].$$

. . . .

Si maintenant on attribue aux fonctions $F(x)$, $f(x)$, $\varphi(x)$, ou bien aux constantes a, b, r,.... des valeurs particulières, on déduira des formules générales la plupart des intégrales définies connues, et une infinité d'autres nouvelles. En voici seulement quelques-unes :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1-x} = \pi\cot a\pi,$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^2-1} = \int_0^1 \frac{x^a - \frac{1}{x^a}}{x-\frac{1}{x}}\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}\operatorname{tang}\frac{a\pi}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a dx}{x^2+2rx\cos\theta+r^2} = \frac{\pi r^{a-1}}{\sin a\pi}\,\frac{\sin a\theta}{\sin\theta},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}(\mathrm{l}\,x)^n dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{d^n \operatorname{séc}\frac{a\pi}{2}}{da^n},$$

$$\int_0^\infty \cos bx\frac{rdx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}e^{-br}, \quad \int_0^\infty \sin bx\frac{xdx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}e^{-br},$$

$$\int_0^\infty \cos bx\frac{rdx}{x^2-r^2} = -\frac{\pi}{2}\sin br, \quad \int_0^\infty \sin bx\frac{xdx}{x^2-r^2} = \frac{\pi}{2}\cos br,$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin bx}{x}\,\frac{r^2dx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-br}).$$

137. Nous avons vu que lorsque la fonction $F(x+y\sqrt{-1})$ s'évanouit pour $x = \pm\infty$, quel que soit y, et pour

$y = \pm \infty$, quel que soit x, on a $\Delta = 0$. Alors si l'équation $\frac{1}{F(x)} = 0$ a une infinité de racines, la formule $\Delta = 0$ renferme un nombre infini de termes, et peut être appliquée à la sommation des séries. Ainsi, par exemple, si l'on prend successivement

$$F(x) = \varphi(x)\frac{\cos rx}{\sin \pi x}, \quad F(x) = \varphi(x)\frac{\sin rx}{\sin \pi x},$$

r désignant un nombre entier inférieur à π, et $\varphi(x)$ une fraction rationnelle dans laquelle le numérateur soit d'un degré plus petit que le dénominateur, on déterminera immédiatement, à l'aide de l'équation $\Delta = 0$, les sommes des séries

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0) - \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos r + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2r - \text{etc.},$$

$$-\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin r + \frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2r - \text{etc.}$$

Si l'on fait d'ailleurs

$$s = \pm(2m+1)\pi \pm r,$$

m étant un nombre entier quelconque, l'arc s restera entièrement arbitraire, et ces séries deviendront

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2}\cos s + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2}\cos 2s + \text{etc.},$$

$$\frac{\varphi(1)-\varphi(-1)}{2}\sin s + \frac{\varphi(2)-\varphi(-2)}{2}\sin 2s + \text{etc.}$$

Enfin si l'on pose $s = 0$, la première de ces séries sera réduite à

$$\tfrac{1}{2}\varphi(0) + \frac{\varphi(1)+\varphi(-1)}{2} + \frac{\varphi(2)+\varphi(-2)}{2} + \text{etc.};$$

en attribuant à $\varphi(x)$ la valeur particulière

$$\varphi(x) = \frac{1}{u^2 - x^2},$$

on obtiendra la formule connue

$$\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-4} + \frac{1}{u^2-9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\cot \pi u.$$

Si après avoir multiplié les deux membres de cette dernière équation par $2udu$, on l'intègre par rapport à u, et à partir de $u=0$, on trouvera

$$\mathrm{l}\frac{\sin \pi u}{\pi u} = \mathrm{l}(1-u^2) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{9}\right) + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{l}\sin \pi u = l\pi + lu + \mathrm{l}(1-u^2) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{2}\right) + \ldots,$$

et par suite

$$\sin \pi u = \pi u(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{9}\right)\ldots\ldots$$

Si l'on pose maintenant $u=\frac{1}{2}$, on obtiendra la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\ldots\ldots$$

On peut démontrer cette dernière formule comme il suit : nous avons trouvé (n° 42)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{1.3.5\ldots 2(m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots 2(m+1)}.$$

et en posant $2m = n$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, on aura

$$u_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n},\quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n+1}.$$

On a d'ailleurs, pour toutes les valeurs de x comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin^n x > \sin^{n+1} x,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \text{ ou } u_n > u_{n+1},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

On a, par la même raison,

$$u_{n+2} < u_{n+1},$$

et par suite

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1};$$

donc si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \text{A},$$

$\frac{\pi}{2}$ se trouvera compris entre A et A $\frac{n+2}{n+1} = \text{A}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)$, c'est-à-dire entre deux quantités sensiblement égales entre elles quand n est très-grand; on aura donc, en passant à la limite,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

138. Il est enfin une autre formule très-générale démon-

en attribuant à $\varphi(x)$ la valeur particulière

$$\varphi(x) = \frac{1}{u^2 - x^2},$$

on obtiendra la formule connue

$$\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{u^2-1} + \frac{1}{u^2-4} + \frac{1}{u^2-9} + \ldots = \frac{\pi}{2u}\cot\pi u.$$

Si après avoir multiplié les deux membres de cette dernière équation par $2udu$, on l'intègre par rapport à u, et à partir de $u=0$, on trouvera

$$\mathrm{l}\frac{\sin\pi u}{\pi u} = \mathrm{l}(1-u^2) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{9}\right) + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{l}\sin\pi u = l\pi + lu + \mathrm{l}(1-u^2) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{4}\right) + \mathrm{l}\left(1-\frac{u^2}{2}\right) + \ldots,$$

et par suite

$$\sin\pi u = \pi u(1-u^2)\left(1-\frac{u^2}{4}\right)\left(1-\frac{u^2}{9}\right)\ldots\ldots$$

Si l'on pose maintenant $u=\frac{1}{2}$, on obtiendra la formule de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\,\frac{2}{3}\,\frac{4}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{5}\,\frac{6}{7}\,\frac{8}{7}\,\frac{8}{9}\ldots\ldots$$

On peut démontrer cette dernière formule comme il suit : nous avons trouvé (n° 42)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\,dx = \frac{1.3.5\ldots 2(m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\,\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{1.3.5\ldots 2(m+1)}.$$

et en posant $2m = n$, $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, on aura

$$u_n = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{n-1}{n},\quad u_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n+1}.$$

On a d'ailleurs, pour toutes les valeurs de x comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$,

$$\sin^n x > \sin^{n+1} x,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n+1} x dx \text{ ou } u_n > u_{n+1},$$

et par conséquent

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}.$$

On a, par la même raison,

$$u_{n+2} < u_{n+1},$$

et par suite

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{n+1};$$

donc si l'on pose, pour abréger,

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n+1} = \text{A},$$

$\frac{\pi}{2}$ se trouvera compris entre A et A $\frac{n+2}{n+1} = \text{A}\left(1 + \frac{n}{n+1}\right)$, c'est-à-dire entre deux quantités sensiblement égales entre elles quand n est très-grand; on aura donc, en passant à la limite,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots$$

138. Il est enfin une autre formule très-générale démon-

trée aussi par M. Cauchy, et qu'il importe de rappeler en finissant. Désignons par z une variable imaginaire dont r soit le module et t l'argument; par $F(z)$ une fonction qui reste finie et continue ainsi que sa dérivée $F'(z)$ pour toute valeur du module r inférieure à une certaine limite donnée R. Supposons de plus que r, restant constant, la fonction $F(z)$ soit une fonction périodique qui reprenne pour $t = \alpha + 2\pi$ la valeur qu'elle avait pour $t = \alpha$. On aura

$$z = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$
$$D_r F(z) = F'(z) D_r z = F'(z)\, e^{t\sqrt{-1}},$$
$$D_t F(z) = F'(z) D_t z = F'(z)\, r e^{t\sqrt{-1}}\sqrt{-1},$$

et par suite

$$D_r F(z) = \frac{1}{r\sqrt{-1}} D_t F(z).$$

Les deux membres de cette dernière équation ayant chacun une valeur finie et déterminée pour toute valeur de r plus petite que R, si on les multiplie par $dr dt$ et qu'on intègre entre les limites o et r; α et $\alpha + 2\pi$, on trouvera

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} dt \int_0^r d_r F(z) = \int_0^r \frac{dr}{r\sqrt{-1}} \int_\alpha^{\alpha+2\pi} d_t F(z).$$

Or

$$\int_0^r d_r F(z) = F(z) - F(0),$$

et, en vertu de l'hypothèse admise,

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} d_t F(z) = F\left(re^{(\alpha+2\pi)\sqrt{-1}}\right) - F\left(re^{\alpha\sqrt{-1}}\right) = 0,$$

donc

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} dt[F(z) - F(0)] = 0,$$

$$\mathrm{F}(0)\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}dt = 2\pi\mathrm{F}(0) = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\mathrm{F}(z)\,dt\,;$$

et enfin

$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\mathrm{F}(z)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\mathrm{F}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)dt.$$

Si l'on fait $\alpha = 0$, on trouvera

$$(a)\qquad \mathrm{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{F}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)dt\,;$$

si $\alpha = -2\pi$, il viendra

$$\mathrm{F}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0}\mathrm{F}\left(re^{t\sqrt{-1}}\right)dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{F}\left(re^{-t\sqrt{-1}}\right)dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{F}\left(re^{-t\sqrt{-1}}\right)dt.$$

La formule (a) subsiste donc quand on y change t en $-t$. Si dans cette même formule on pose $\mathrm{F}(z) = f(x+z)$, x étant une nouvelle variable indépendante de z, on aura $\mathrm{F}(0) = f(x)$, et par suite

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f\left(x + re^{t\sqrt{-1}}\right)dt$$

Il résulte de cette dernière formule que toute fonction qui reste continue, ainsi que sa dérivée, entre certaines limites, peut être représentée entre ces limites par une intégrale définie, renfermant, sous le signe $\int$ la même fonction.

Exemple: 1°. $\mathrm{F}(z) = \dfrac{1}{1-z}$; pour toute valeur du module r plus petite que l'unité, on aura

$$\mathrm{F}(0) = 1 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{1-re^{t\sqrt{-1}}} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt}{1-r\cos t-r\sin t\sqrt{-1}}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{dt\left(1-r\cos t+r\sin t\sqrt{-1}\right)}{1-2r\cos t+r^2},$$

d'où

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos t + r\sin t\sqrt{-1}}{1 - 2r\cos t + r^2} = 2\pi.$$

Cette équation équivaut aux deux suivantes :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - r\cos t}{1 - 2r\cos t + r^2} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{r\sin t dt}{1 - 2r\cos t + r^2} = 0.$$

2°: $F(z) = l(1 - z)$; on aura $F'(z) = \frac{1}{1-z}$, la fonction et sa dérivée seront continues pour toute valeur du module r inférieure à l'unité. On a

$$z = r(\cos t + \sqrt{-1}\sin t),$$

et en posant

$$1 - z = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

il viendra

$$\rho\cos\theta = 1 - r\cos t, \quad \rho\sin\theta = -r\sin t,$$
$$\rho = \sqrt{1 - 2r\cos t + r^2}, \quad l(1 - z) = l\rho + \theta\sqrt{-1},$$

et ces diverses équations suffiront à prouver que la fonction $F(z)$ et sa dérivée reprendront la même valeur quand t passera de la valeur α à la valeur $\alpha + 2\pi$; cette fonction satisfera donc aux conditions énoncées: on aura

$$F(0) = l\,1 = \int_0^{2\pi} l\left(1 - re^{t\sqrt{-1}}\right) dt = 0,$$

et, en changeant t en $-t$,

$$\int_0^{2\pi} l\left(1 - re^{-t\sqrt{-1}}\right) dt = 0.$$

Si l'on ajoute ces deux équations, en observant que $e^{t\sqrt{-1}} + e^{-t\sqrt{-1}} = 2\cos t$, les imaginaires dispa-

raissent, et il vient

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{l}(1 - 2r\cos t + r^2)dt = 0.$$

Cette formule suppose, comme nous l'avons dit, que r est plus petit que 1. Si r est plus grand que 1, l'intégrale du premier membre est égale à $4\pi \mathrm{l} r$. On a, en effet,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{l}(1 - 2r\cos t + r^2)dt = \int_0^{2\pi} \mathrm{l} r^2 dt + \int_0^{2\pi} \mathrm{l}\left(1 - \frac{2}{r}\cos t + \frac{1}{r^2}\right)dt.$$

Or

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{l} r^2 dt = 4\pi \mathrm{l} r, \quad \int_0^{2\pi} \mathrm{l}\left(1 - \frac{2}{r}\cos t + \frac{1}{r^2}\right) = 0,$$

puisque $\frac{1}{r} < 1$; donc

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{l}(1 - 2r\cos t + r^2)dt = 4\pi \mathrm{l} r.$$

3°. $$F(z) = e^{az} = e^{ar\cos t + \sqrt{-1}\, ar\sin t}$$
$$= e^{b\cos t}[\cos(b\sin t) + \sqrt{-1}\sin(b\sin t)],$$

en posant $ar = b$. On aura, pour toutes les valeur finies de r ou de b,

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos t}\cos(b\sin t)\, dt = 2\pi,$$

ou

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos t}\sin(b\sin t)dt = 0.$$



CALCUL INTÉGRAL.

SECONDE PARTIE.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

VINGT-DEUXIÈME LEÇON.

Principes généraux. — Équations différentielles du premier ordre. — Intégration immédiate.

139. On nomme *équations différentielles* celles qui établissent des relations entre une variable indépendante x, des fonctions y et z de cette variable, et les différentielles de ces fonctions ou leurs dérivées des divers ordres. L'ordre de la plus haute dérivée qui se trouve comprise dans une équation différentielle, sert à fixer ce qu'on appelle l'ordre de cette même équation. Une équation différentielle du premier ordre, entre la variable x et les fonctions y, z,..., renferme seulement avec x, y, z,..., les dérivées du premier ordre

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad z' = \frac{dz}{dx}, \ldots$$

Cela posé, intégrer des équations différentielles, c'est trouver les fonctions qu'elles déterminent, ou du moins

des équations nouvelles qui ne renferment que la variable et les fonctions dont il s'agit. Ces équations nouvelles se nomment *intégrales*.

Sous la dénomination d'équation différentielle du premier ordre à deux variables, on comprend généralement toute équation de la forme

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Résolue par rapport à la fonction dérivée y', ou $\frac{dy}{dx}$, cette équation fournit pour cette dérivée une ou plusieurs valeurs de la forme $\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}(x,\ y)$: si l'on suppose d'ailleurs

$$\mathrm{f}(x,\ y) = -\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},$$

M et N désignant deux fonctions nouvelles de x et de y, l'équation $\frac{dy}{dx} = \mathrm{f}(x,\ y)$, multipliée par N, deviendra

$$\mathrm{N}\frac{dy}{dx} = -\mathrm{M}, \quad \text{ou} \quad \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0.$$

140. Il importe d'abord de se faire une idée exacte de la signification d'une équation différentielle donnée, de la relation qu'une semblable équation établit entre les variables.

Analytiquement, cette équation a pour effet d'exprimer le coefficient différentiel ou les dérivées en fonction des deux variables, de fournir la valeur de la dérivée correspondant à des valeurs données de x et de y, et le problème de l'intégration consiste à chercher une fonction de y et de x qui, différentiée et résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, reproduise l'expression donnée $\mathrm{f}(x, y)$. Considérée

géométriquement, l'équation différentielle donne la tangente trigonométrique de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente menée à un point quelconque d'une courbe inconnue. Intégrer c'est construire la courbe ou la déterminer au moins par son équation. Nous prouverons plus tard analytiquement et rigoureusement que l'intégrale d'une équation quelconque du premier ordre à deux variables existe, et qu'on peut en obtenir des valeurs aussi approchées que l'on voudra; quelques considérations géométriques mettent aussi cette existence hors de doute. Prenons l'équation différentielle sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

et regardons x et y comme deux ordonnées rectangulaires, en donnant à x et y deux valeurs arbitraires a et b, c'est-à-dire en prenant arbitrairement un premier point M dont les coordonnées seront

$$OP = x = a, \quad MP = y = b,$$

on aura

$$\frac{dy}{dx} = f(a, b),$$

puis on mènera la ligne MT qui fasse avec l'axe des x un angle dont la tangente soit égale à $f(a, b)$; cette droite MT sera une première tangente à la courbe cherchée. Comme une courbe et la tangente coïncident sensiblement dans les environs du point de contact, on pourra regarder le point M', situé à une très-petite distance de M sur la ligne MT, comme appartenant à la courbe, de sorte que l'on aura les coordonnées

$$x = OP' = a', \quad y = M'P' = b,$$

d'un autre de ses points; à l'aide de ces deux coordonnées

et de l'équation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, on déterminera une seconde tangente, puis un troisième point, etc. On arrivera donc de cette manière à un polygone qui, à mesure qu'on multipliera ses côtés, différera d'autant moins d'une courbe déterminée dont l'équation sera l'intégrale de l'équation différentielle proposée. Mais cette construction prouve aussi qu'une équation différentielle du premier ordre appartient à une infinité de courbes, puisqu'on peut prendre le premier point où l'on voudra. En effet, suivant la position arbitraire que l'on attribuera à ce premier point, les courbes construites seront modifiées non-seulement dans leur position, mais même en général dans leur forme; néanmoins elles auront toutes un caractère commun dont la nature est exprimée par l'équation différentielle proposée. Ainsi cette équation différentielle exprime une propriété commune à une infinité de courbes que l'on peut concevoir tracées sur un plan; cette propriété détermine l'inclinaison de la tangente dans un point quelconque en fonction des coordonnées de ce point, et donne le moyen de construire la courbe lorsque l'on connaît un de ses points. On peut remarquer d'ailleurs que le choix de l'une quelconque de ces lignes dépend d'une seule quantité arbitraire; il suffira, par exemple, de fixer la valeur de y correspondant à $x = a$.

141. On peut, en vertu de ce qui précède, concevoir ce que doit être l'équation primitive ou l'intégrale de l'équation différentielle proposée. Cette intégrale, si l'on veut qu'elle ait la même généralité que l'équation différentielle, doit convenir à l'une quelconque des courbes que l'on peut construire à l'aide de cette équation. Dès lors il faut, 1° qu'elle contienne une constante arbitraire différente des constantes qui peuvent se trouver dans l'é-

quation différentielle proposée, ou dans l'expression analytique de la propriété commune à toutes les courbes. L'indétermination de la constante donnera à l'intégrale la généralité nécessaire en permettant de la faire coïncider avec l'une quelconque des courbes en question, et de représenter par conséquent le système entier de ces courbes. 2° Il faut que cette équation primitive satisfasse à l'équation différentielle proposée, c'est-à-dire que les valeurs de y et de $\frac{dy}{dx}$, tirées de l'équation primitive et de sa différentielle, substituées dans l'équation donnée, la rendent identique; ou, ce qui revient au même, il faut qu'en éliminant la constante arbitraire entre l'équation primitive et sa différentielle, on retrouve l'équation proposée.

De cette possibilité évidente d'éliminer une constante quelconque C entre une équation $F(x, y, C) = 0$, et sa différentielle

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy = 0,$$

de manière à arriver à une équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

entièrement indépendante de cette constante, on aurait pu conclure, *à priori*, et sans recourir à aucune considération géométrique, qu'une équation différentielle convient à une infinité d'équations primitives qui ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs assignées à une certaine constante, et que par conséquent l'intégrale de l'équation primitive d'une équation différentielle donnée doit, pour avoir toute sa généralité, renfermer une constante arbitraire dont on puisse disposer à volonté.

Cela posé, l'équation primitive qui contient une constante arbitraire à laquelle on n'a pas donné de valeurs particulières, s'appelle l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée. A chaque valeur de la constante répond une intégrale nouvelle que nous nommerons intégrale particulière. Mais quelquefois il arrive qu'une équation primitive vérifie l'équation différentielle donnée, sans qu'on puisse la déduire de l'intégrale générale en attribuant à la constante une valeur numérique particulière, et qu'elle soit telle qu'on ne puisse la rattacher à l'intégrale générale qu'en détournant la constante de sa signification numérique naturelle, pour lui donner une valeur variable ou pour la remplacer par une fonction de x et de y; ces équations primitives reçoivent alors le nom d'intégrales ou de solutions singulières. Nous nous occuperons d'abord de la recherche de l'intégrale générale en faisant connaître les principales méthodes à l'aide desquelles on y parvient dans certains cas.

142. Reprenons l'équation

$$Mdx + Ndy = 0.$$

Il peut arriver que l'on reconnaisse immédiatement dans le premier membre la différentielle exacte d'une certaine fonction $u = F(x, y)$, de telle sorte que l'équation proposée puisse se mettre sous la forme

$$du = df(x, y) = 0;$$

dans ce cas il est évident que l'intégrale générale sera

$$u = f(x, y) = C.$$

Exemples :

1°. $$Mdx + Ndy = xdy + ydx = d(xy) = 0,$$

l'intégrale générale est

$$xy = C;$$

2°. $$Mdx + Ndy = dy - f(x)dx = d\left[y - \int_{x_0}^{x} f(x)dx\right] = 0,$$

l'intégrale sera

$$y - \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = C, \quad \text{ou} \quad y = \int f(x)\,dx;$$

3°. $$\begin{aligned} Mdx + Ndy &= \varphi(x)\,dx + \chi(y)\,dy \\ &= d\left[\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)\,dy\right] = 0, \end{aligned}$$

l'intégrale est

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)\,dy = C.$$

Dans l'équation

$$\varphi(x)\,dx + \chi(y)\,dy$$

les variables sont séparées, et l'on voit que, dans ce cas, l'intégration s'effectue immédiatement.

143. Mais l'expression $Mdx + Ndy$ peut être la différentielle exacte d'une fonction $u = F(x, y)$ sans qu'on reconnaisse immédiatement quelle est cette fonction. L'intégration, dans ce cas, est cependant sûre et facile, parce que l'on peut toujours déterminer la fonction u; en effet, on ne peut avoir identiquement

$$Mdx + Ndy = \varphi(x, y)\,dx + \chi(x, y)\,dy = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

sans que l'on ait

$$M = \varphi(x, y) = \frac{du}{dx}, \quad N = \chi(x, y) = \frac{du}{dy},$$

et par suite

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{dN}{dx} = \frac{d\chi(x, y)}{dx}.$$

Or, dès que la condition

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\chi(x, y)}{dx}$$

sera remplie, on calculera facilement la fonction u en procédant comme il suit. Puisque u a pour dérivée, par rapport à x, M ou $\varphi(x, y)$, on devra avoir

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + Y,$$

Y désignant une fonction arbitraire de la variable y. On tire de cette dernière équation

$$\frac{du}{dy} = \frac{d}{dy}\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \frac{dY}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, y)}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy}.$$

En substituant pour $\frac{d\varphi(x, y)}{dy}$ sa valeur $\frac{d\chi(x, y)}{dx}$, et pour $\frac{du}{dy}$ sa valeur $\chi(x, y)$, on aura

$$\chi(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi(x, y)}{dx}\,dx + \frac{dY}{dy},$$

ou en effectuant l'intégration indiquée

$$\chi(x, y) = \chi(x, y) - \chi(x_0, y) + \frac{dY}{dy},$$

$$\frac{dY}{dy} = \chi(x_0, y), \quad Y = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y) + C:$$

et par conséquent la valeur générale de u étant

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y) + C,$$

l'intégrale générale de l'équation

$$Mdx + Ndy = \varphi(x, y)dx + \chi(x, y)dy = 0$$

sera

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y) = C,$$

ou

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{M}dx + \int_{y_0}^{y} \mathrm{N}_{x_0} dx = C,$$

en désignant par la notation N_{x_0} ce que devient N quand on y fait $x = x_0$. Si l'on avait fait d'abord

$$u = \int_{y_0}^{y} \chi(x, y)\,dx + \mathrm{X},$$

on aurait trouvé pour l'intégrale générale

$$\int_{y_0}^{y} \chi(x, y)\,dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y_0)\,dx = C,$$

et l'on prouvera facilement que ces deux valeurs différentiées reproduisent l'équation différentielle proposée. On prouve aussi, à l'aide du simple raisonnement, que dans le cas où le binome $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ est une différentielle exacte, l'intégrale générale de l'équation

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$$

est

$$\int \mathrm{M}dx + \int \mathrm{N}_y dy = C, \quad \text{ou} \quad \int \mathrm{N}dy + \int \mathrm{M}_x dx = C,$$

en désignant par N_y les termes de N qui ne renferment pas x, et par M_x les termes de M qui ne renferment pas y. En effet, tous les termes de u qui contenaient x ont donné, par la différentiation, des termes qui sont venus faire partie de $\mathrm{M}dx$; on les retrouvera donc en intégrant $\int \mathrm{M}dx$, et, pour compléter u, c'est-à-dire pour avoir les termes de u qui ne renfermaient que y, il suffira d'intégrer la partie de $\mathrm{N}dy$ qui ne renferme pas x, ou

ce que nous avons désigné par la notation $N_y\,dy$. Le même raisonnement s'appliquerait à l'expression

$$\int N dy + \int M_x dx.$$

Pour avoir dans tous les cas N_y, il faut évidemment, de N qui est la dérivée totale de la fonction u prise par rapport à y, retrancher $\frac{d}{dy}\int Mdx$, ou la partie de cette dérivée qui provient des termes $\int Mdx$ qui renfermaient x; on arrive ainsi à la formule connue

$$u = \int Mdx + \int \left(N - \frac{d}{dy}\int Mdx \right) dy.$$

Exemples :

1°. $$\frac{y\,dx}{x^2+y^2} - \frac{x\,dy}{x^2+y^2} = 0,$$

on a

$$\frac{d\frac{y}{x^2+y^2}}{dy} = \frac{d\frac{-x}{x^2+y^2}}{dx} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\int_{x_0}^{x} Mdx = \int_{x_0}^{x} \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = \text{arc tang}\frac{x}{y} - \text{arc tang}\frac{x_0}{y},$$

$$\int_{y_0}^{y} N_{x_0}dy = -\int_{y_0}^{y} \frac{x_0 dy}{x_0^2+y^2} = -\text{arc tang}\frac{y}{x_0} + \text{arc tang}\frac{x_0}{y_0},$$

$$u = \text{arc tang}\frac{x}{y} - \left(\text{arc tang}\frac{x_0}{y} + \text{arc tang}\frac{y}{x_0}\right) + \text{arc tang}\frac{x_0}{y_0},$$

ou, parce que

$$\text{arc tang}\frac{x_0}{y} + \text{arc tang}\frac{y}{x_0} = \frac{\pi}{2},$$

$$u = \text{arc tang}\frac{x}{y} + C;$$

l'intégrale cherchée sera par conséquent

$$\text{arc tang}\,\frac{x}{y} = C.$$

En employant la formule

$$\int \mathrm{M}dx + \int \mathrm{N}_y dy = C,$$

on trouvera simplement pour l'intégrale cherchée

$$\int \mathrm{M}dx = \text{arc tang}\,\frac{x}{y} = C.$$

Toutes les fois que l'équation différentielle proposée se réduit à l'une des formules

$$\varphi(x,\ y)\,dx + \chi(y)dy = 0,$$
$$\varphi(x)\,dx + \chi(x,\ y)dy = 0,$$

et plus généralement toutes les fois qu'elle ne renfermera pas de termes en x seul, ou en y seul, son intégrale se réduira à

$$\int \mathrm{M}dx = \int \varphi(x,\ y)\,dx = C,$$

ou

$$\int \mathrm{N}dy = \int \chi(x,\ y)\,dx = C;$$

2°. $$\frac{dx}{x}+\frac{y^2dx}{x^3}-\frac{ydy}{x^2}+\frac{(ydx-xdy)\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}+\frac{dy}{2y} = 0,$$

ou

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}\right)dx+\left(\frac{1}{2y}-\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right)dx = 0,$$

on a

$$\frac{d\mathrm{M}}{dy}=\frac{d\mathrm{N}}{dx}=\frac{2y}{x^3}+\frac{x^2+2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}}\ldots$$

$$\int \mathrm{M}dx = \mathrm{l}x - \frac{y^2}{2x^2} + y\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{x^2+y^2};$$

en intégrant par parties, on trouve

$$\int \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}};$$

mais en posant

$$\sqrt{x^2+y^2} = z,$$

et en substituant x à z, on trouvera facilement que l'expression $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+y^2}}$ est égale à

$$\frac{1}{y}\,\mathrm{l}\left(\frac{-y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right),$$

d'ailleurs

$$N_y = \frac{1}{2y}, \quad \int N_y dy = \int \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}y.$$

L'intégrale générale de l'équation proposée sera donc

$$\mathrm{l}x - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}\left(\frac{-y^2+y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\right) + \frac{1}{2}\,\mathrm{l}y = C.$$



VINGT-TROISIÈME LEÇON.

Intégration par substitution. — Intégration par le moyen d'un facteur.

---

144. L'intégration par substitution consiste à remplacer la variable y ou x par une nouvelle variable z tellement choisie, que l'on obtienne, entre x et z ou y et z, une équation dont le premier membre soit une différentielle immédiate, ou qu'on puisse facilement intégrer par une autre méthode.

Exemples :

1°. $$dy + f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0,$$

posons

$$\frac{y}{x} = z,$$

d'où

$$y = xz, \quad dy = xdz + zdx,$$

et en substituant pour y et dy leurs valeurs,

$$xdz + [z + f(z)]\,dx = x[z + f(z)]\left[\frac{dz}{z + f(z)} + \frac{dx}{x}\right] = 0;$$

cette équation se décompose en deux autres,

$$\frac{dz}{z + f(z)} + \frac{dx}{x} = 0, \quad x[z + f(z)] = 0,$$

et par conséquent on la vérifie, soit en posant

$$lx + \int \frac{dz}{z+f(z)} = C,$$

soit en attribuant à z l'une des valeurs

$$z = z_1,\quad z = z_2,\quad z = z_3, \ldots,$$

$z_1, z_2, z_3, \ldots$ désignant les diverses racines de l'équation

$$z + f(z) = 0.$$

Si l'on remet $\frac{y}{x}$ au lieu de z, on trouvera, pour les intégrales de l'équation proposée,

$$\int \frac{dy}{y + xf\left(\frac{y}{x}\right)} + lx = C, \qquad y = z_1 x, \qquad y = z_2 x, \text{ etc.}$$

La première de ces équations est l'intégrale générale de l'équation donnée. Quant aux valeurs de y données par les autres équations, elles seront, ou des intégrales particulières, ou des intégrales singulières.

2°. $$\frac{xydy + y^2dx}{x^2y^2 + a^4} = \frac{df(y)}{a^2},$$

ou

$$\frac{y}{x^2y^2 + a^4}\, d(xy) = \frac{df(y)}{a^2},$$

et posant

$$xy = az,$$

on trouve

$$d(xy) = adz, \quad x = \frac{az}{y},$$

et par suite

$$\frac{aydz}{a^2z^2 + a^4} = \frac{df(y)}{a^2}, \qquad \left[\frac{df(y)}{y} - \frac{adz}{z^2 + a^2}\right] y = 0,$$

équation que l'on vérifie, soit en posant $y = 0$, soit en posant

$$\int \frac{df(y)}{y} - \text{arc tang}\frac{z}{a} = C,$$

3°.
$$bydx - \frac{a^3dx}{x} = aydy,$$

ou

$$y(bdx - ady) = \frac{a^3dx}{x}, \quad yd(bx - ay) = \frac{a^3dx}{x};$$

en posant

$$bx - ay = az,$$

l'équation qui précède devient

$$bxdz - azdz = \frac{a^3dx}{x};$$

faisons encore

$$zdz = \frac{a^2\,ds}{s},$$

il viendra

$$bxdz = a^3\left(\frac{ds}{s} + \frac{dx}{x}\right) = a^3\,\frac{d.xs}{xs},$$

ou enfin, en posant

$$sx = v, \quad x = \frac{v}{s}, \quad \frac{bdz}{s} - a^3\,\frac{dv}{v^2} = 0.$$

Puisque s est exprimée en fonction de z par l'équation

$$zdz = \frac{a^2\,ds}{s},$$

les variables z et v peuvent être censées séparées dans cette dernière équation qui est par conséquent intégrable.

Il est du reste impossible de donner des règles générales relatives à cette substitution. Quelquefois on laisse

indéterminées quelques-unes des nouvelles variables introduites, se réservant, dans le cours des opérations, de leur donner des valeurs particulières qui facilitent la séparation des variables ou qui simplifient les équations en faisant évanouir un ou plusieurs termes.

Exemple :

$$dy + y\,\mathrm{F}(x)\,dx = f(x)\,dx;$$

posons $y = zt$, en substituant on aura

$$zdt + tdz + zt\,\mathrm{F}(x)dx = f(x)dx:$$

nous pouvons disposer de z et de t de telle sorte que l'on ait

$$tdz + zt\,\mathrm{F}(x)dx = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{z} + \mathrm{F}(x)\,dx = 0.$$

L'équation qui précède se réduit alors à

$$zdt = f(x)\,dx, \quad \text{ou} \quad dt = \frac{f(x)}{z}\,dx.$$

De l'équation

$$\frac{dz}{z} + \mathrm{F}(x)dx = 0,$$

on tire

$$z = e^{-\int \mathrm{F}(x)\,dx};$$

en substituant on aura

$$dt = e^{\int \mathrm{F}(x)\,dx} f(x)\,dx, \quad t = \mathrm{C} + \int e^{\int \mathrm{F}(x)dx} f(x)dx,$$

et l'intégrale cherchée sera

$$y = e^{-\int \mathrm{F}(x)dx}\left[\mathrm{C} + \int e^{\int \mathrm{F}(x)dx} f(x)dx\right].$$

145. Lorsque, pour convertir le premier membre de l'équation $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy = 0$ en une différentielle exacte, il suffit de le multiplier par un facteur connu ν, ou, en

d'autres termes, lorsqu'on a identiquement

$$v(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = du,$$

l'équation proposée peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{v}\,du = 0,$$

et l'on y satisfait, soit én prenant $du = 0$, $u = C$, soit en prenant $\frac{1}{v} = 0$. L'équation $u = C$ est l'intégrale générale, et les valeurs de y en x, tirées de l'équation $\frac{1}{v} = 0$, seront des intégrales particulières ou singulières.

Exemple :

1°. $$xdy - ydx = 0,$$

on a

$$xdy - ydx = xy\left(\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}\right) = xyd(\mathrm{l}\,y - \mathrm{l}\,x) = xydu.$$

Il suffit de multiplier l'équation proposée par $\frac{1}{xy}$ pour rendre son premier membre une différentielle exacte; on y satisfera donc en posant, 1° $u = \mathrm{l}\,y - \mathrm{l}\,x = C$, ou, ce qui revient au même, $\frac{y}{x} = C$, $y = Cx$, et cette dernière équation sera l'intégrale générale cherchée; 2° en faisant $y = 0$: mais cette dernière valeur ne sera qu'une intégrale particulière, car elle se déduit de l'intégrale générale lorsqu'on y fait $C = 0$.

2°. $$dy\sqrt{x} - dx\sqrt{y} = 0,$$

on a

$$\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{y}}(dy\sqrt{x} - dx\sqrt{y}) = \frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{\sqrt{x}} = du.$$

L'intégrale générale sera

$$u = 2(y^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}) = C, \quad \text{ou} \quad y = (C + \sqrt{x})^2;$$

la valeur $y = 0$, que l'on obtient en égalant à o le facteur $\frac{1}{v} = \sqrt{x}\sqrt{y}$, sera une intégrale singulière parce qu'elle ne peut pas se déduire de l'intégrale générale.

3°. $$dy - y\,l\,y\,dx = 0.$$

Le facteur propre à rendre intégrable est $\frac{1}{y\,l\,y}$, et l'équation se décompose en deux autres.

$$\frac{dy}{y\,l\,y} - dx = \frac{d\,l\,y}{l\,y} - dx = 0, \quad \text{et} \quad y\,l\,y = 0.$$

L'intégrale générale est

$$l\,l\,y = x + C, \quad \text{ou} \quad l\,y = Ce^x,$$

les valeurs $y = 0$, $y = 1$, déduites de l'équation $y\,l\,y = 0$, sont des intégrales particulières.

4°. Enfin, $$\varphi(x)\,\chi(y)\,dx + \varphi_1(x)\,\chi_1(y)\,dy = 0;$$

le facteur $\frac{1}{\varphi_1(x)\,\chi(y)}$ sépare les variables et rend intégrable. L'intégrale générale est

$$\int \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}dx + \int \frac{\chi_1(y)}{\chi(y)}dx = C;$$

les valeurs $y = y_1$, $y_1 = y_2$, etc., y_1, y_2, y_3,..., étant les diverses racines de l'équation $\chi(y) = \infty$, seront des intégrales particulières ou singulières.

146. Quand on aura trouvé un premier facteur v qui rend intégrable le premier membre de l'équation différentielle $M\,dx + N\,dy = 0$, de sorte qu'on ait identi-

quement

$$\nu(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = du,$$

on en pourra déduire une infinité d'autres qui seront tous de la forme $\nu\varphi(u)$, φ désignant une fonction arbitraire quelconque. En effet, pour qu'un second facteur V jouisse de la même propriété que ν, il est nécessaire et il suffit que le produit

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \frac{\mathrm{V}}{\nu}du$$

soit encore une différentielle exacte $d\mathrm{U}$; or, 1° cette condition sera remplie si l'on pose

$$\frac{\mathrm{V}}{\nu} = \varphi(u), \quad \mathrm{V} = \nu\varphi(u),$$

puisque alors on vérifiera l'équation

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \frac{\mathrm{V}}{\nu}du = \varphi(u)du = d\mathrm{U},$$

en prenant

$$\mathrm{U} = \int \varphi(u)\,du.$$

2°. Réciproquement si le nouveau facteur V rend le binome $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ intégrable, il sera de la forme $\nu\varphi(u)$, car si l'on a

$$\mathrm{V}(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = \frac{\mathrm{V}}{\nu}du = d\mathrm{U},$$

on aura, en remarquant que U, qui est une fonction de x et de y, devra être considéré comme une fonction de x et de u, que l'on peut substituer à y,

$$\frac{\mathrm{V}}{\nu}du = \frac{d\mathrm{U}}{dx}dx + \frac{d\mathrm{U}}{du}du.$$

Or cette dernière équation se partage en deux autres,

l'une

$$\frac{V}{v} = \frac{dU}{du} du,$$

l'autre

$$\frac{dU}{dx} = 0;$$

et l'on tire de cette dernière

$$U = \psi(u), \quad \frac{V}{v} = \psi'(u), \quad V = v\psi'(u) = v\varphi(u).$$

Il est ordinairement très-difficile de découvrir le facteur propre à rendre intégrable l'expression $Mdx + Ndy$; toutefois, pour établir l'existence d'un semblable facteur, il suffit d'admettre qu'il existe pour l'équation

$$Mdx + Ndy = 0,$$

une intégrale générale de la forme

$$y = f(x, C).$$

Admettons en effet cette intégrale, on en tirera $C = u$, u désignant une fonction des seules quantités x, y, puis, en différentiant, on trouvera

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0.$$

Il en résulte que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est donnée à la fois par les deux équations du premier degré

$$M - N\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 0,$$

et si l'on élimine $\frac{dy}{dx}$ entre ces deux équations, on en

tirera

$$\frac{\frac{du}{dx}}{M}=\frac{\frac{du}{dy}}{N}.$$

Or cette dernière équation ne pourra être qu'une équation identique et non pas une équation qui détermine y en fonction de x et d'où l'on puisse tirer $y=\varphi(x)$; en effet elle doit être vérifiée, ainsi que les deux équations

$$Mdx+Ndy=o, \quad \frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=o,$$

pour $y=f(x, C)$, et l'on devrait avoir, quel que soit C,

$$\varphi(x)=f(x, C),$$

ce qui est absurde. Donc si l'on pose $\frac{\frac{du}{dx}}{M}=v$, on aura identiquement

$$\frac{\frac{du}{dy}}{N}=v, \quad \frac{du}{dx}=vM, \quad \frac{du}{dy}=vN,$$

$$v(Mdx+Ndy)=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy=du,$$

et par conséquent il existe un facteur v qui, multiplié par l'expression $Mdx+Ndy=o$, transforme cette expression en une différentielle exacte.

M. Paul Binet démontre rigoureusement cette proposition en procédant comme il suit.

Puisque la valeur $y=f(x, C)$ vérifie l'équation

$$\varphi(x, y)dx+\chi(x, y)dy=o,$$

on aura identiquement

$$\varphi(x, f)dx+\chi(x, f)df=o,$$

en représentant, pour abréger, la fonction $f(x, C)$ par f.

Si dans cette fonction on remplace la constante C par une valeur variable ou fonction de x et de y, l'équation qui précède ne sera plus vérifiée, mais on aura identiquement

$$\varphi(x,f)\,dx+\chi(x,f)\,df=\varphi(x,f)dx+\chi(x,f)\frac{df}{dx}dx+\chi(x,f)\frac{df}{dC}dC.$$

D'ailleurs la première partie

$$\varphi(x, f)\,dx + \chi(x, f)\frac{df}{dx}dx$$

du second membre de cette dernière équation est nulle parce que c'est le résultat de la substitution de la valeur $y = f(x, C)$ dans l'équation

$$\varphi(x, y)dx + \chi(x, y)dy = 0;$$

quand on y considère C comme constant, on aura donc identiquement, et quel que soit C,

$$\varphi(x, f)dx + \chi(x, f)df = \chi(x,f)\frac{df}{dC}dC.$$

Donnons à C, dans cette équation, sa valeur $u=\mathrm{F}(x, y)$, déduite de l'équation $y = f(x, C)$, et remarquons que l'expression $f(x, u)$ est identiquement égale à y, puisque si, après avoir tiré de l'équation $y = f(x, C)$ la valeur u de C, on l'y substitue ensuite, l'équation résultante $y = f(x, u)$ doit être identique, de telle sorte que le second membre, comme le premier, se réduise à y; on trouvera ainsi

$$\varphi(x, y)dx + \chi(x, y)dy = \chi(x, y)\frac{df}{du}du = \chi(x, y)\frac{df(x, u)}{du}du,$$

et par suite

$$\frac{1}{\chi(x,y)\frac{df(x,u)}{du}}[\varphi(x,y)dx+\chi(x,y)dy]=du,$$

$$\frac{\psi(u)}{\chi(x,y)\frac{df(x,u)}{du}}[\varphi(x,y)dx+\chi(x,y)dy]=\psi(u)du=d\text{U}.$$

Donc le facteur $\nu=\frac{1}{\chi(x,y)\frac{df(x,u)}{du}}$, ou plus généralement le facteur $\text{V}=\nu\psi(u)$, jouit de la propriété de transformer l'expression différentielle $\text{M}dx+\text{N}dy$ en une différentielle exacte.

147. Le facteur ν, en vertu même de sa définition, doit être tel que l'expression $\nu(\text{M}dx+\text{N}dy)$ devienne une différentielle exacte, et vérifie par conséquent l'équation

$$\frac{d.\text{M}\nu}{dy}=\frac{d.\text{N}\nu}{dx},$$

d'où l'on tire, en développant,

$$\text{M}\frac{d\nu}{dy}-\text{N}\frac{d\nu}{dx}+\left(\frac{d\text{M}}{dy}-\frac{d\text{N}}{dx}\right)\nu=0.$$

Cette dernière équation, qui renferme les deux dérivées partielles du facteur ν, est presque toujours plus difficile à intégrer que l'équation proposée elle-même, de sorte qu'elle ne peut conduire à la connaissance de ce facteur que dans quelques cas particuliers. Supposons, par exemple, que dans cette équation mise sous la forme

$$\frac{1}{\nu}\left(\frac{d\nu}{dx}-\frac{\text{M}}{\text{N}}\frac{d\nu}{dy}\right)=\frac{1}{\text{N}}\left(\frac{d\text{M}}{dy}-\frac{d\text{N}}{dx}\right),$$

le second membre soit une fonction X de x seul, il en

devra être ainsi du premier. Or c'est ce qui aura lieu si, après avoir supposé le facteur ν fonction de x seul, on pose

$$\frac{d\nu}{\nu} = \mathrm{X}dx, \quad \nu = e^{\int \mathrm{X}dx};$$

tel est donc, dans ce cas, le facteur qui rendra l'expression $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ une différentielle exacte; on trouverait de même pour ν la valeur $e^{\int \mathrm{Y}dy}$, si l'expression

$$\frac{1}{\mathrm{M}}\left(\frac{d\mathrm{N}}{dx} - \frac{d\mathrm{M}}{dy}\right)$$

était une fonction Y de y seul.

Quelquefois aussi l'on parvient à déterminer le facteur ν en partageant l'expression $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ en deux autres $(\mathrm{M}_1dx + \mathrm{N}_1dy) + (\mathrm{M}_2dx + \mathrm{N}_2dy)$, tellement choisies, que l'on puisse connaître immédiatement deux facteurs ν_1 et ν_2 propres à les rendre des différentielles exactes en vérifiant les équations

$$\nu_1(\mathrm{M}_1dx + \mathrm{N}_1dy) = du_1, \quad \nu_2(\mathrm{M}_2dx + \mathrm{N}_2dy) = du_2;$$

alors en effet les facteurs

$$\mathrm{V}_1 = \nu_1\varphi_1(u_1), \quad \mathrm{V}_2 = \nu_2\varphi_2(u_2)$$

rendront encore ces expressions intégrables, et il suffira évidemment de choisir les fonctions $\varphi_1(u_1)$, $\varphi_2(u_2)$ de telle sorte que l'on ait

$$\nu_1\varphi_1(u_1) = \nu_2\varphi_2(u_2) = \nu,$$

pour obtenir le facteur ν propre à rendre l'expression proposée $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy$ une différentielle exacte.

Exemple :

$$aydx + bxdy + x^m y^n(kydx + hxdy) = 0;$$

faisons

$$M_1 = ay,\quad N_1 = bx,\quad M_2 = hx^m y^{n+1},\quad N_2 = kx^{m+1}y^n,$$
$$M_1dx + N_1dy = aydx + bxdy,$$
$$M_2dx + N_2dy = x^m y^n(hydx + kxdy),$$

on pourra prendre

$$v_1 = \frac{1}{xy},\quad v_2 = \frac{1}{x^{m+1}\,y^{n+1}};$$

on trouve en effet alors

$$\frac{1}{xy}(aydx + bxdy) = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} = d\mathrm{l}\,.\,x^a y^b,$$
$$u_1 = \mathrm{l}.x^a\cdot y^b,$$
$$\frac{x^m y^n}{x^{m+1}\,y^{n+1}}(hydx + kxdy) = h\frac{dx}{x} + k\frac{dy}{y} = d\mathrm{l}.x^h\,y^k,$$
$$u_2 = \mathrm{l}.x^h\,y^k,$$

et les expressions

$$v_1\varphi(u_1) = \frac{1}{xy}\varphi_1(x^a y^b),\quad v_2\varphi(u_2) = \frac{1}{x^{n+1}\,y^{n+1}}\varphi_2(x^h\,y^k),$$

deviendront égales si, après avoir posé

$$\varphi_1(x^a y^b) = x^{a\alpha}y^{b\alpha},\quad \varphi_2(x^h y^k) = x^{6h}y^{6k},$$

on a

$$a\alpha - 1 = 6h - m - 1,\quad b\alpha - 1 = 6k - n - 1,$$

d'où

$$\alpha = \frac{nh - mk}{ak - bh},\quad 6 = \frac{an - mb}{ak - bh},$$

et

$$v = \frac{1}{xy}(x^a y^b)^{\frac{nh - km}{ak - bh}}.$$

148. Appliquons les principes précédents à l'équation linéaire et à l'équation homogène du premier ordre.

L'équation différentielle linéaire du premier ordre est celle dans laquelle la variable dépendante y, et sa dérivée y' ne sont ni multipliées l'une par l'autre, ni élevées à des puissances supérieures à la première; ou celle qui a pour premier membre une fonction linéaire des quantités y et $y' = \frac{dy}{dx}$. La forme la plus générale de cette équation est

$$y'\varphi(x) + y\chi(x) + \varphi(x) = 0,$$

ou

$$\varphi(x)dy + [y\chi(x) + \psi(x)]dx = 0.$$

Si l'on pose

$$\frac{\chi(x)}{\varphi(x)} = F(x), \quad \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} = f(x),$$

elle deviendra

$$dy + yF(x)dx = f(x)dx.$$

Nous l'avons déjà intégrée sous cette forme, en posant $y = zt$. On y parvient plus simplement peut-être en supposant d'abord que l'on ait $f(x) = 0$; l'équation réduite alors à $dy + yF(x)dx = 0$, se décompose en deux autres

$$\frac{dy}{y} + F(x)dx = 0, \quad y = 0,$$

et a pour intégrale générale

$$l\,y + \int F(x)dx = C,$$
$$y = Ce^{-\int F(x)dx};$$

$y = 0$ est une intégrale particulière que l'on obtient en posant $C = 0$.

Faisons $C = 1$ et désignons par y_1 l'expression $e^{-\int F(x)dx}$, l'intégrale générale sera alors $y = Cy_1$.

Pour revenir au cas où $f(x)$ n'est pas nul, remplaçons la constante C par une nouvelle variable z que l'on choisira de telle sorte que la valeur

$$y = zy_1 = ze^{-\int F(x)dx}$$

vérifie l'équation donnée

$$dy + yF(x)dx = f(x)dx.$$

Or si dans cette équation on substitue pour y la valeur zy_1, et si l'on remarque que

$$dy_1 + y_1 F(x)dx = 0,$$

puisque y_1 est une intégrale particulière de l'équation

$$dy + y F(x) dx = 0,$$

on trouvera

$$y_1 dz = f(x)dx,$$

d'où

$$dz = \frac{f(x)}{y_1} dx = e^{\int F(x)dx} f(x)dx,$$

et par suite

$$z = C + \int e^{\int F(x)dx} f(x)dx;$$

l'intégrale générale de l'équation linéaire est donc

$$y = e^{-\int F(x)dx}\left[C + \int e^{\int F(x)dx} f(x)dx\right],$$

comme nous l'avions déjà vu, ou simplement

$$y = e^{-\int F(x)dx}\int e^{\int F(x)dx} f(x)dx.$$

Exemples : Les équations différentielles

$$dy - ydx = e^x dx, \quad dy + ydx = e^x dx,$$

ont respectivement pour intégrales générales

$$y = (x + C)e^x, \quad y = \tfrac{1}{2}e^x + Ce^{-x}.$$

On pourra intégrer cette même équation linéaire en déterminant le facteur qui rende les deux membres des différentielles exactes. Si l'on considère d'abord l'équation

$$dy + yF(x)dx = 0,$$

comme on la rend intégrable à l'aide du facteur $v = \frac{1}{y}$, qui renferme la seule variable y, on trouve alors

$$u = 1y + \int F(x)dx = 1\left[ye^{\int F(x)dx}\right].$$

En conséquence, les divers facteurs propres à rendre le premier membre de l'équation $dy + y\,F(x)dx = 0$ une différentielle exacte, seront de la forme

$$v\varphi(u) = \frac{1}{y}\varphi[1y + \int F(x)dx].$$

Il est essentiel d'observer que parmi ces facteurs, il en existe un qui renferme la seule variable x; savoir, celui que l'on obtient en posant

$$\varphi(u) = e^u = ye^{\int F(x)dx},$$

et qui se réduit à $e^{\int F(x)dx}$. Ce facteur, indépendant de y, rend aussi intégrable l'équation linéaire complète

$$dy + y\,F(x)dx = f(x)dx.$$

En effet, si l'on multiplie ses deux membres par $e^{\int F(x)dx}$, on trouvera

$$e^{\int F(x)dx}dy + yF(x)e^{\int F(x)dx}dx = e^{\int F(x)dx}f(x)dx,$$

ou

$$d\left[ye^{\int F(x)dx}\right] = e^{\int F(x)dx}f(x)dx,$$

$$ye^{\int F(x)dx} = \int f(x)\,e^{\int F(x)dx}dx,$$

$$y = e^{-\int F(x)dx}\int f(x)\,e^{\int F(x)dx}dx.$$

Exemples :

I. $$dy + ydx = ax^n dx,$$

n étant un nombre entier :

$$y = Ce^{-x} + x^n - nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} - n(n-2)(n-1)x^{n-3} + \text{etc.},$$

en faisant $C = 0$, on aurait une intégrale particulière algébrique.

II. $(1 - x^2)dy + xydx = adx; \quad y = ax + C\sqrt{1 - x^2}.$

$$dy + \frac{nydx}{\sqrt{1+x^2}} = adx, \; y = C(\sqrt{1+x^2} - x)^n + \frac{na}{n^2-1}\sqrt{1+x^2} - \frac{ax}{n^2-1}.$$

L'équation

$$dy + yF(x)dx = f(x)y^{n+1}dx$$

se ramène immédiatement à une équation linéaire, il suffit pour cela de poser

$$\frac{1}{y^n} = z;$$

on obtient en effet de cette manière

$$\frac{-ndy}{y^{n-1}} = dz, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dz}{nz},$$

$$\frac{-dz}{nz} + F(x)dx = \frac{f(x)dz}{z},$$

$$dz - nF(x)zdx = -nf(x)dx,$$

$$z = \frac{1}{y^n} = -e^{n\int F(x)dx}\int e^{-n\int F(x)dx} f(x)dx.$$

149. L'équation différentielle du premier ordre

$$Mdx + Ndy = 0$$

est homogène lorsque les fonctions des variables x, y, représentées par M et N, sont homogènes et du même

degré, en sorte qu'on ait

$$M = x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad N = x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right);$$

dans cette hypothèse, l'équation devient

$$x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

et il suffit de la diviser par le produit $x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)$ pour la ramener à la formule

$$dy + f\left(\frac{y}{x}\right)dx = 0,$$

que nous avons intégrée à l'aide de la substitution $y = xz$. On peut, au reste, appliquer directement cette substitution à l'équation

$$x^a\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + x^a\chi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0,$$

qui se décompose alors en deux autres, savoir,

$$\frac{dx}{x} + \frac{\chi(z)dz}{\varphi(z) + z\chi(z)} = 0, \quad x^{a+1}[\varphi(z) + z\chi(z)] = 0:$$

de ces deux dernières, l'une s'intègre immédiatement, et fournit l'intégrale générale

$$lx + \int \frac{\chi(z)dz}{\varphi(z) + z\chi(z)} = C, \quad \text{ou} \quad lx + \int \frac{Ndy}{Mx + Ny} = C;$$

de l'autre on déduit des intégrales particulières ou des intégrales singulières de la forme $z = m$ ou $y = mx$, m étant une racine de l'équation

$$\varphi(z) + z\chi(z) = 0.$$

Exemple : Supposons que M et N se réduisent à des fonctions homogènes du premier degré, en sorte qu'on ait

$$M = Ax + By, \quad N = Cx + Dy.$$

L'équation différentielle sera

$$(Ax + By)\,dx + (Cx + Dy) = o.$$

Si l'on fait $y = xz$, elle deviendra

$$x^2 \left\{ [A + (B + C)z + Dz^2] \frac{dx}{x} + (C + Dz)\,dz \right\} = o;$$

et se partagera en deux autres,

$$\frac{dx}{x} + \frac{(C + Dz)\,dz}{A + (B + C)\,z + Dz^2} = o,$$

$$x^2[A + (B + C)z + Dz^2] = o.$$

Soient maintenant

$$a = \frac{1}{2D}\left[-B - C + \sqrt{(B + C)^2 - 4AD}\right],$$

$$b = \frac{1}{2D}\left[-B - C - \sqrt{(B + C)^2 - 4AD}\right],$$

les deux racines de l'équation

$$A + (B + C)\,z + Dz^2 = o,$$

et concevons que la fraction $\frac{C + Dz}{A + (B + C)z + Dz^2}$, étant décomposée en fractions simples, on trouve

$$\frac{C + Dz}{A + (B + C)z + Dz^2} = \frac{m}{z - a} + \frac{n}{z - b};$$

les quantités m et n seront déterminées par les formules

$$m + n = 1, \quad mb + na = -\frac{C}{D},$$

dont la seconde peut être remplacée par l'une des suivantes :

$$m - n = \frac{C - B}{\sqrt{(B + C)^2 - 4AD}},$$

$$mn = \frac{BC - AD}{(B + C)^2 - 4AD}.$$

L'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{(C + Dz)dz}{A + (B + C)z + Dz^2} = 0$$

sera réduite à

$$\frac{dx}{x} + \frac{mdz}{z - a} + \frac{ndz}{z - b} = 0,$$

et aura pour intégrale générale

$$\mathrm{l}\,x + m\,\mathrm{l}(z - a) + n\,\mathrm{l}(z - b) = C,$$

ou

$$x(z - a)^m (z - b)^n = C;$$

en remettant pour z sa valeur $\frac{y}{x}$, puis ayant égard à l'équation $m + n = 1$, on obtiendra l'intégrale générale sous la forme très-simple

$$(y - ax)^m (y - bx)^n = C.$$

De plus, on tirera de l'équation

$$x^2 [A + (B + C) z + Dz^2] = 0$$

$z = a$, $z = b$, ou, ce qui revient au même, $y = ax$, $y = bx$. Ces deux valeurs seront évidemment des intégrales particulières, à moins que l'une des constantes

m, n s'évanouisse. Dans ce dernier cas, la formule

$$mn = \frac{BC - AD}{(B + C)^2 - 4AD}$$

donnerait $BC - AD = 0$, et l'on en conclurait

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = k,$$

k désignant une nouvelle constante. Par suite, l'équation proposée deviendrait

$$(Cx + Dy)(dy + kdx) = 0,$$

et se décomposerait en deux autres, savoir,

$$dy + kdx = 0, \quad Cx + Dy = 0.$$

On trouverait alors pour l'intégrale générale

$$y + kx = C,$$

et la valeur $y = -\frac{C}{D}x$ serait une intégrale singulière, à moins que l'on n'eût identiquement

$$k = -\frac{C}{D}.$$

150. Si l'on prenait pour M et N deux fonctions linéaires quelconques des variables x, y, telles que

$$Ax + By + E,$$

et

$$Cx + Dy + F,$$

l'équation différentielle serait

$$(Ax + By + E)dx + (Cx + Dy + F)dy = 0,$$

qui sera ramenée à la forme

$$(A\xi + B\eta)d\xi + (C\xi + D\eta)d\eta = 0,$$

si l'on pose

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta,$$

ξ, η désignant deux nouvelles variables, et α, β deux constantes déterminées par les équations

$$\begin{aligned} A\alpha + B\beta + E &= 0, \\ C\alpha + D\beta + F &= 0. \end{aligned}$$

Or il est toujours possible de satisfaire à ces deux dernières équations par des valeurs finies des constantes α, β, à moins que les quantités A, B, C, D ne remplissent la condition $\frac{A}{C} = \frac{B}{D} = k$. Dans ce cas particulier, l'équation proposée se réduirait à

$$(Cx + Dy)(dx + kdy) + Edx + Fdy = 0,$$

et il suffirait de substituer z à $Cx + Dy$ pour obtenir la transformée

$$[(D - kC)z + DE - CF]dx + (kz + F)dz = 0,$$

dans laquelle on peut séparer les variables, en divisant le premier membre par le polynome

$$(D - kC)z + DE - CF.$$

La même substitution permet d'opérer la séparation des variables dans toute équation de la forme

$$dy = f(Cx + Dy)dx.$$

Exemples :

I. $$xdx + ydy = mydx,$$

1°. $$m > 2, \quad \text{ou} \quad m = a + \frac{1}{a}:$$

$$\left(\frac{ay - a^2x}{ay - x}\right)^{\frac{a^2+1}{2(a^2-1)}} \sqrt{x^2 - mxy + y^2} = C;$$

2°. $$m = 2:$$

$$l(x - y) = C - \frac{x}{x - y};$$

3°. $$m < 2, \quad \text{ou} \quad m = 2\cos\alpha:$$

$$l\sqrt{x^2 - mxy + y^2} = C - \cot\alpha \operatorname{arc\,tang} \frac{y \sin\alpha}{x - y\cos\alpha}.$$

II. $$xdx + ydy = xdy - ydx:$$

$$l\sqrt{x^2 + y^2} = C + \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}.$$

III. $xdy - ydx = dx\sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 = C^2 + 2Cy.$



VINGT-QUATRIÈME LEÇON.

Intégration par différentiation, ou par la substitution de la dérivée y' à la fonction inconnue y.

---

151. Lorsqu'une équation différentielle du premier ordre est résolue par rapport à y, et se présente sous la forme

$$y = F(x, y'),$$

alors, pour intégrer en substituant à la fonction inconnue y sa dérivée y', il suffit de différentier cette même équation. En opérant ainsi l'on trouvera

$$y'dx = D_x F(x, y')\,dx + D_{y'} F(x, y')\,dy',$$

ou

$$[D_x F(x, y') - y']\,dx + D_{y'} F(x, y')\,dy' = 0.$$

Cela posé, si par une méthode quelconque on parvient à découvrir l'intégrale générale et les intégrales singulières de cette dernière équation, il ne restera plus qu'à éliminer y' entre ces intégrales et l'équation donnée

$$y = F(x, y'),$$

pour obtenir l'intégrale générale de celle-ci et ses intégrales singulières.

152. Parmi les différentes formes que l'on peut attribuer à la fonction $F(x, y')$, il importe de distinguer celles qui

rendent l'équation

$$[D_x F(x, y') - y'] dx + D_{y'} F(x, y') dy' = 0$$

linéaire et homogène. Or, pour que cette équation devienne linéaire relativement à l'inconnue y' et à sa différentielle dy', il sera d'abord nécessaire que le coefficient de dy', savoir, $D_{y'} F(x, y')$, se réduise à une fonction $f(x)$ de la seule variable x; en d'autres termes, il faudra que l'on ait

$$D_{y'} F(x, y') = f(x), \quad \text{ou} \quad \frac{dF(x, y')}{dy'} dy' = f(x) dy'.$$

Si l'on intègre par rapport à y' les deux membres de cette équation, en effectuant l'intégration à partir de $y' = 0$, et désignant par $F(x)$ la valeur de $F(x, y')$ correspondante à une valeur nulle de y', on trouvera

$$F(x, y') - F(x) = y' f(x),$$

et par suite

$$F(x, y') = F(x) + y' f(x).$$

Lorsqu'on adopte cette valeur générale de $F(x, y')$, la formule

$$[D_y F(x, y') - y'] dx + D_{y'} F(x, y') dy' = 0$$

se réduit effectivement à une équation différentielle linéaire; mais on doit observer que, dans cette hypothèse, l'équation proposée, se trouvant ramenée à la suivante

$$y = F(x) + y' f(x),$$

ou

$$y dx = F(x) dx + f(x) dy,$$

devient elle-même linéaire, et que par conséquent la substitution de la dérivée y' à la variable y est inutile. Si l'on voulait que l'équation

$$[D_x F(x, y') - y'] dx + D_{y'} F(x, y') dy' = 0,$$

au lieu d'être linéaire par rapport à y' et dy', fût linéaire par rapport à x et dx, il faudrait d'abord supposer $D_x F(x, y')$ réduite à une fonction $f(y')$ de la seule variable y' : on obtiendrait ainsi l'équation

$$D_x F(x, y') = f(y'),$$

puis, intégrant ses deux membres par rapport à x, à partir de $x = 0$, et désignant par $F(y')$ la valeur de $F(x, y')$ qui correspond à une valeur nulle de x, on trouverait

$$F(x, y') - F(y') = xf(y'),$$
$$F(x, y') = F(y') + xf(y').$$

Lorsqu'on adopte cette valeur de $F(x, y')$, l'équation

$$[D_x F(x, y') - y']dx + D_{y'} F(x, y') = 0$$

devient effectivement linéaire par rapport à x et dx. Cette même équation, qui peut alors s'écrire comme il suit,

$$[f(y') - y']dx + xf'(y')dy' + F'(y')dy' = 0,$$

a pour intégrale générale

$$x = e^{-\int \frac{f'(y')dy'}{f(y') - y'}} \left[C - \int F'(y') e^{\int \frac{f'(y')dy'}{f(y') - y'}} dy' \right].$$

Dans la même hypothèse, l'équation proposée deviendra

$$y = F(y') + xf(y'),$$

et pour obtenir son intégrale générale il suffira d'éliminer y' entre les deux dernières équations.

Dans le cas particulier où l'on prend $f(y') = y'$, l'équation donnée et l'équation transformée obtenue par la substitution de y' à y se réduisent à

$$y = xy' + F(y'), \quad 0 = [x + F'(y')]dy'.$$

Pour obtenir la seconde, il suffit toujours de différentier la première par rapport à x. Cette seconde se décompose

de plus en deux autres

$$dy' = 0, \quad x + F'(y') = 0,$$

qui donnent son intégrale générale $y' = C$ et ses intégrales singulières. La valeur $y' = C$, substituée dans l'équation donnée, donne, pour l'intégrale générale cherchée,

$$y = Cx + F(C).$$

Si l'on élimine y' entre les formules

$$y = xy' + F(y'), \quad x + F'(y') = 0,$$

on obtiendra les intégrales singulières de l'équation donnée.

Exemple : L'équation $y = xy' - y'^2$ a pour intégrale générale $y = Cx + C^2$, et pour intégrale singulière $y = \frac{x^2}{4}$.

153. Revenons encore à l'équation

$$[D_x F(x, y') - y']dx + D_{y'} F(x, y')dy' = 0.$$

Pour qu'elle soit homogène, il est nécessaire et il suffit que les deux fonctions $D_x F(x, y') - y'$, $D_{y'} F(x, y')$, soient homogènes et de même degré. Si l'on désigne ce degré par a, on aura

$$D_{y'} F(x, y') = x^a f\left(\frac{y'}{x}\right).$$

Si l'on intègre par rapport à y' les deux membres de cette dernière équation, et si l'on désigne toujours par $F(x)$ la valeur de $F(x, y')$ correspondante à une valeur nulle de y', on trouvera

$$F(x, y') = F(x) + x^{a+1} \int_0^{y'} f\left(\frac{y'}{x}\right) \frac{dy'}{x},$$

puis on en conclura, en différentiant par rapport à x,

$$D_x F(x, y') = F'(x) + x^a \int_0^{y'} \left[a f\left(\frac{y'}{x}\right) - \frac{y'}{x} f'\left(\frac{y'}{x}\right) \frac{dy'}{x} \right],$$

VINGT-CINQUIÈME LEÇON.

Méthode par laquelle on peut déduire certaines intégrales singulières de l'intégrale générale. — Détermination de la constante que renferme l'intégrale générale.

---

154. Soit $F(x, y, C)$ une fonction des variables x, y et de la constante C. Si l'on veut obtenir une équation différentielle qui ait pour intégrale générale l'équation finie

$$F(x, y, C) = 0,$$

il faudra éliminer la constante C entre cette équation et sa dérivée

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx} = 0.$$

Il s'agit de savoir si cette dernière peut admettre des solutions qui ne soient pas renfermées dans l'intégrale générale. Or toute équation entre x et y peut se mettre sous la forme

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

$\varphi(x, y)$ désignant une certaine fonction de x et de y, et F désignant la même fonction que ci-dessus, mais dans laquelle on a remplacé la constante C par la fonction $\varphi(x, y)$. On peut donc admettre que les solutions singulières, s'il en existe, sont toutes comprises dans la formule

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

et il reste à déterminer ce que doit être pour cela la fonc-

tion φ. En différentiant cette dernière équation, on trouve

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{dF}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dx}=0.$$

Pour que la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de cette équation, soit identique à celle que donnerait l'équation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

c'est-à-dire pour que l'équation

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0$$

soit elle-même une intégrale singulière ou particulière de l'équation

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dx}=0,$$

il suffit évidemment que l'on ait

$$\frac{\frac{dF}{d\varphi}\ \frac{d\varphi}{dx}}{\frac{dF}{dy}}=0,$$

ce qui peut avoir lieu de plusieurs manières :

1°. Si $\frac{d\varphi}{dx}=0$, mais alors φ est une constante, et l'équation

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0,$$

n'étant qu'un cas particulier de l'équation

$$F(x, y, C) = 0,$$

est tout simplement une intégrale particulière ;

2°. Si $\frac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}}=0$, équation à laquelle on satisfait en posant ou $\frac{dF}{d\varphi}=0$, ou $\frac{dF}{dy}=\infty$. On pourra donc obtenir

des intégrales singulières en éliminant la fonction φ entre les équations

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0, \quad \frac{dF}{d\varphi} = 0,$$

ou

$$F[x, y, \varphi(x, y)] = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty,$$

ce qui revient à éliminer C entre les équations

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{dF}{dC} = 0,$$

ou

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{dF}{dy} = \infty.$$

Toutefois, pour qu'une équation résultant de cette élimination soit réellement une intégrale singulière, il faudra, 1° que la valeur trouvée pour φ annule l'expression $\dfrac{\frac{dF}{d\varphi}}{\frac{dF}{dy}} = 0$, c'est-à-dire satisfasse à l'équation différentielle proposée; 2° que cette équation ne puisse pas se déduire de l'intégrale générale $F(x, y, C) = 0$, en donnant à la constante C une valeur particulière.

155. L'intégrale singulière a une liaison géométrique très-remarquable avec l'intégrale générale. En comparant, en effet, la méthode qui donne les intégrales singulières avec celle qui conduit aux lignes enveloppes (t. I, n° 220), on verra immédiatement que l'intégrale singulière représente la courbe enveloppe des intégrales particulières.

Exemples : 1° Considérons l'équation

$$dy = \pm 2y^{\frac{1}{2}}dx,$$

ou

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \pm x,$$

son intégrale générale est $y = (x + C)^2$, on aura

$$\frac{dF}{dC} = x + C;$$

et en éliminant C entre les deux équations

$$y = (x + C)^2, \quad x + C = 0,$$

on trouvera $y = 0$, et cette dernière équation sera l'intégrale singulière de l'équation donnée. On ne peut pas cette fois égaler $\frac{dF}{dy}$ à l'infini, parce que $\frac{dF}{dy} = 1$.

2°. L'équation $y = C(x + C)^2$ satisfait à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 8y^2 - 4xy\frac{dy}{dx},$$

et est son intégrale générale; or on a

$$\frac{dF}{dC} = (x + C)^2 + 2(x + C)C = 0,$$

d'où l'on tire

$$C = -x, \quad C = -\frac{x}{3}.$$

La première de ces deux valeurs, substituée dans l'équation $y = C(x + C)^2$, fournit l'intégrale particulière $y = 0$, qui correspond aussi à une valeur nulle de la constante. La seconde conduit à l'intégrale singulière $y = -\frac{4}{27}x^3$.

3°. Considérons enfin l'équation différentielle

$$y = xy' + f(y'),$$

qui, comme nous l'avons vu, a pour intégrale générale

$$y = Cx + f(C),$$

on a

$$\frac{dF}{dC} = x + f'(C) = 0.$$

L'élimination de C entre ces deux équations fournira évidemment des intégrales singulières. En effet, la dérivée y' de l'une quelconque de ces valeurs, étant déterminée par le système des équations

$$y = Cx + f(C), \quad x + f'(C) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, par l'équation unique

$$x + f'(y') = 0,$$

sera nécessairement une quantité variable ou fonction de x, tandis que la dérivée de chaque intégrale particulière sera, en vertu de l'équation $y' = C$, une quantité constante.

156. Pour déduire de la méthode précédente les intégrales singulières, il faut connaître l'intégrale générale; cependant ces solutions ont des caractères qui les font dériver immédiatement de l'équation différentielle sans aucune intégration. Euler, Laplace, Lagrange, Poisson se sont tour à tour occupés de cette question. Ils avaient essayé de prouver en particulier que le caractère propre des solutions singulières était de rendre infini ou indéterminé le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dy}$.

Cette propriété est moins générale que ne l'avaient cru ces illustres géomètres; d'ailleurs les démonstrations qu'on en a publiées jusqu'ici dépendent de développements en séries dont rien ne prouve la convergence, et sont loin par conséquent de la rigueur dont nous nous sommes fait une loi dans cet ouvrage.

On verra, dans une des leçons suivantes, comment

M. Cauchy est parvenu à définir rigoureusement le caractère des solutions singulières et à les séparer des intégrales particulières.

157. La valeur que l'intégrale générale $F(x, y, C) = o$ fournit pour y, renfermant avec la variable x une constante arbitraire C, il en résulte que l'inconnue y ne peut pas être complétement déterminée en fonction de x par la seule condition de vérifier l'équation proposée

$$Mdx + Ndy = o.$$

La constante C, de laquelle on peut disposer à volonté, donne le moyen d'assujettir l'inconnue y à une seconde condition, par exemple, à prendre une certaine valeur particulière y_0 pour une valeur donnée x_0 de la variable x. En effet, cette seconde condition sera remplie si l'on détermine la constante C par l'équation

$$F(x_0, y_0, C) = o.$$

Si maintenant on élimine C entre les deux équations

$$F(x, y, C) = o, \quad F(x_0, y_0, C) = o,$$

l'équation résultante ne renfermera plus que les variables x, y avec leurs valeurs particulières x_0, y_0, et donnera pour y une fonction de x propre à remplir à la fois les deux conditions ci-dessus énoncées.

Lorsque l'intégrale générale se présente sous la forme $u = C$, u étant une fonction des variables x, y, la seconde équation devient $u_0 = C$, u_0 désignant la valeur particulière que prend la fonction u quand on y suppose

$$x = x_0, \quad y = y_0;$$

et l'élimination de la constante C produit la formule

$$u = u_0,$$

qui satisfait effectivement aux conditions requises. Pour

obtenir directement cette formule, il suffit d'observer que si l'intégrale générale $u = C$ appartient à l'équation

$$Mdx + Ndy = 0,$$

cette équation multipliée par un facteur convenable deviendrait $du = 0$. En considérant dans cette dernière y comme une fonction de x, puis intégrant les deux membres à partir de $x = x_0$, $y = y_0$, c'est-à-dire de manière qu'ils s'évanouissent pour la valeur x_0 de x, et pour la valeur y_0 de y on trouvera

$$u - u_0 = 0,$$

et par suite

$$u = u_0.$$

Exemple : 1°. L'équation

$$\varphi(x)dx + \chi(y)dy = 0$$

a pour intégrale

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \chi(y)\,dy = 0.$$

2°. En opérant sur les deux membres de l'équation

$$dy + y\,F(x)\,dx = f(x)\,dx,$$

multipliée par le facteur $\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx$, on en tirera

$$ye^{\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx} - y_0 = \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx} f(x)\,dx,$$

et par suite

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx} f(x)\,dx\right].$$

Si $f(x) = 0$, on trouverait simplement

$$y = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} F(x)\,dx}.$$

Considérons encore l'équation différentielle

$$y = xy' + f(y');$$

son intégrale générale se déduira, comme on l'a vu, de la formule $dy' = 0$; or, si l'on désigne par y'_0 la valeur de y' qui répond à la valeur x_0 de x, on tirera de l'équation $dy' = 0$, en intégrant les deux membres à partir de $x = x_0$, $y' - y'_0 = 0$, ou, ce qui revient au même, $dy = y'_0\,dx$. En opérant de la même manière sur cette dernière équation, on trouvera

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

d'où

$$y'_0 = y' = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

et, en substituant pour y' sa valeur dans l'équation

$$y = xy' + f(y'),$$

$$\frac{y_0 x - x_0 y}{x - x_0} = f\left(\frac{y - y_0}{x - x_0}\right).$$

Pour transformer les diverses intégrales que nous venons d'obtenir en intégrales générales, il suffit de concevoir que l'une des quantités x_0, y_0, étant réduite à un nombre fixe, à zéro, par exemple, ou à l'unité, l'autre se change en une constante arbitraire. On simplifie ordinairement ces intégrales en supposant $x_0 = 0$. Ainsi, en adoptant cette hypothèse, on réduira l'intégrale de l'équation $y = xy' + f(y')$ à $y_0 = f\left(\frac{y - y_0}{x}\right)$.

Tout ce qui a été dit ci-dessus relativement aux intégrales générales des équations différentielles ne saurait s'appliquer à leurs intégrales singulières, attendu que celles-ci ne renferment point de constantes arbitraires dont on puisse disposer de manière à remplir des conditions nouvelles.

et

$$y_1 = y_0[1 + (x_1 - x_0)F(x_0)],$$
$$y_2 = y_1[1 + (x_2 - x_1)F(x_1)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y = y_{n-1}[1 + (X - x_{n-1})F(x_{n-1})],$$

et en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$,

$$Y = y_0[1+(x_1 - x_0)F(x_0)][1+(x_2 - x_1)F(x_1)]\ldots[1 + (X - x_{n-1})F(x_{n-1})],$$
$$\mathrm{l}Y = \mathrm{l}y_0 + \mathrm{l}[1+(x_1-x_0)F(x_0)] + \mathrm{l}[1+(x_2-x_1)F(x_1)]\ldots+\mathrm{l}[1+(X-x_{n-1})F(x_{n-1})].$$

D'ailleurs, si l'on représente par a une quantité finie, par α, ε deux quantités infiniment petites, et par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$\mathrm{l}(1 + a\alpha) = \frac{a\alpha}{1+\theta a\alpha} = \alpha(a \pm \varepsilon),$$

$$\mathrm{l}[1+(x_1 - x_0)F(x_0)]+\mathrm{l}[1+(x_2 - x_1)F(x_1)]\ldots +\mathrm{l}[1+(X - x_{n-1})F(x_{n-1})]$$
$$= (x_1 - x_0)[F(x_0)+\varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[F(x_1)+\varepsilon_1]\ldots+ (X - x_{n-1})[F(x_{n-1})+\varepsilon_{n-1}],$$

ε_0, ε_1, $\varepsilon_2, \ldots,$ ε_{n-1} désignant des nombres très-petits. Comme le second membre de cette dernière formule diffère très-peu de l'intégrale définie $\int_{x_0}^{X} F(x)dx$, il en résulte que la valeur de $\mathrm{l}Y$ se réduit sensiblement à

$$\mathrm{l}Y = \mathrm{l}y_0 + \int_{x_0}^{X} F(x)\,dx,$$

et la valeur correspondante de Y, à

$$y_0\, e^{\int_{x_0}^{X} F(x)\,dx}.$$



VINGT-SIXIÈME LEÇON.

Exposition d'une méthode rigoureuse à l'aide de laquelle on peut démontrer l'existence d'une valeur de y propre à vérifier une équation différentielle du premier ordre, et calculer cette valeur avec un degré d'approximation donné.

---

159. Toutes les fois que l'équation différentielle

$$dy = f(x, y)dx$$

est intégrable par l'une des méthodes exposées dans les leçons précédentes, on en conclut aisément, comme on l'a fait voir, pour l'inconnue y, une fonction de x propre à vérifier cette équation différentielle, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire, y_0, dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0. Réciproquement il sera certain que l'équation

$$dy = f(x, y)dx$$

sera intégrable et qu'elle admet une intégrale générale comprenant une constante arbitraire si l'on démontre qu'il existe une valeur générale de y propre à remplir les deux conditions énoncées ; or on parvient à ce but, dans un grand nombre de cas, à l'aide des principes que nous allons établir.

Concevons que, X étant une nouvelle valeur particulière de x, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des quantités intermédiaires entre les limites x_0, X, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. Supposons de plus qu'on calcule

n valeurs correspondantes de $y, y_1, \ldots, y_{n-1}, Y$, à l'aide des équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

en éliminant $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, on obtiendra une valeur de Y de la forme

$$Y = F(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, X, y_0),$$

qui jouira de propriétés fort remarquables. Et d'abord, en ajoutant toutes ces équations, on trouvera

$$\begin{aligned} Y - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \ldots \\ + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}). \end{aligned}$$

Or la somme du second membre est égale au produit de la somme des différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$, ou $X - x_0$, par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0, y_0), \quad f(x_1, y_1), \ldots;$$

et si l'on désigne par A la valeur absolue du plus grand de ces coefficients, cette moyenne sera nécessairement exprimée par une expression de la forme $\pm \Theta A$, Θ désignant un nombre inférieur à l'unité; on aura donc

$$\begin{aligned} Y - y_0 &= \pm \Theta A (X - x_0), \\ Y &= y_0 \pm \Theta A (X - x_0), \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que la valeur de Y se trouvera nécessairement comprise entre les limites $y_0 \pm A(X - x_0)$. En raisonnant de la même manière, on ferait voir que les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ sont respectivement comprises entre les limites

$$y_0 \pm A(x_1 - x_0), \quad y_0 \pm A(x_2 - x_1), \ldots, \quad y_0 \pm A(x_{n-1} - x_0),$$

donc toutes ces quantités se réduisent aussi bien que Y à des expressions de la forme

$$y_0 \pm \Theta A(X - x_0).$$

On doit en conclure que les coefficients

$$f(x_0, y_0),\ f(x_1, y_1), \ldots, f(x_{n-1}, y_{n-1})$$

sont des valeurs particulières de l'expression

$$f[x_0 + \theta(X - x_0),\quad y_0 \pm \Theta A(X - x_0)]$$

qui correspondent à des valeurs de θ et Θ comprises entre les limites o et 1. Or concevons que le plus grand et le plus petit des coefficients dont il s'agit correspondent respectivement aux systèmes de valeurs

$$\theta = \theta_0,\quad \pm\Theta = \Theta_0;\quad \theta = \theta_0 + \iota,\quad \pm\Theta = \Theta_0 + \iota';$$

toute quantité comprise entre ces coefficients, ou, ce qui revient au même, entre les quantités

$$f[x_0 + \theta_0(X - x_0),\quad y_0 + \Theta_0 A(X - x_0)],$$
$$f[x_0 + (\theta_0 + \iota)(X - x_0),\quad y_0 + (\Theta_0 + \iota') A(X - x_0)],$$

sera évidemment une valeur particulière de l'expression

$$f[x_0 + (\theta_0 + \iota\zeta)(X - x_0),\quad y_0 + (\Theta_0 + \iota'\zeta) A(X - x_0)],$$

correspondante à une valeur de ζ comprise entre les limites o et 1, et par conséquent à une valeur particulière de l'expression

$$f[x_0 + \theta(X - x_0),\quad y_0 \pm \Theta A(X - x_0)],$$

correspondante à des valeurs de θ et de Θ comprises entre les mêmes limites. Donc, puisque la différence $Y - y_0$ est équivalente au produit de $X - x_0$ par une moyenne de cette espèce, on pourra poser

$$Y - y_0 = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0),\quad y_0 \pm \Theta A(X - x_0)];$$

et par conséquent

$$Y = y_0 + (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0), y_0 \pm \Theta A (X - x_0)],$$

θ et Θ désignant deux nombres inférieurs à l'unité.

Corollaire 1er. Si l'on supposait tous les élémens de la différence $X - x_0$, c'est-à-dire les binômes $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots, X - x_{n-1}$ réduits à un seul qui serait cette différence elle-même, on aurait simplement

$$Y - y_0 = (X - x_0) f(x_0, y_0).$$

En comparant cette équation à celle qui précède, on reconnaît que la division de $X - x_0$ en éléments, a pour effet de modifier le second facteur du produit qui représente la valeur de $Y - y_0$ en y faisant croître les quantités x_0, y_0 de manière que les valeurs numériques de leurs accroissements soient inférieures d'une part à la valeur numérique du premier facteur, de l'autre à cette valeur numérique multipliée par la constante A.

Corollaire 2me. Soit m un nombre entier inférieur à n, et faisons $x_m = \xi$, $y_m = \eta$, on obtiendra

$$Y - \eta = (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi), \eta \pm \Theta A (X - \xi)].$$

160. Après avoir reconnu la forme de Y, déterminons de quelle manière cette quantité varie avec y_0, ou calculons l'accroissement ϵ_n de Y, correspondant à un accroissement ϵ_0 de y_0. Désignons par $H = \pm(X - x_0)$ la valeur numérique de la différence $X - x_0$. Supposons d'ailleurs que pour toutes les valeurs de x renfermées dans les limites x_0, X, la fonction dérivée $\frac{df(x, y)}{dy}$ reste continue par rapport aux variables x, y, et demeure comprise entre les limites $\pm$ C, C représentant une quantité positive. Cela posé, soit

$$\varphi(x, y)dx + \chi(x, y)dy$$

la différentielle totale de la fonction $f(x, y)$, en sorte qu'on ait identiquement

$$\frac{df(x, y)}{dx} = \varphi(x, y), \quad \frac{df(x, y)}{dy} = \chi(x, y);$$

soient de plus 6_1, 6_2,..., 6_n les accroissements respectifs que prennent y_1, y_2,..., Y lorsqu'on attribue à y_0 l'accroissement 6_0, et représentons par θ, Θ_0, Θ_1,...,Θ_{n-1} des nombres inférieurs à l'unité.

L'équation $y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$ devant subsister encore quand on y fera croître y_0 de 6_0, et y_1 de 6_1, on en conclura

$$y_1 + 6_1 - (y_0 + 6_0) = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0 + 6_0),$$

et par suite

$$6_1 - 6_0 = (x_1 - x_0)[f(x_0, y_0 + 6_0) - f(x_0, y_0)];$$

on aura d'ailleurs, en vertu d'une formule connue et de l'hypothèse admise,

$$\frac{f(x_0, y_0 + 6_0) - f(x_0, y_0)}{6_0} = \chi(x_0, y_0 \pm \theta 6_0) = \pm \Theta_0 C,$$

$$f(x_0, y_0 + 6_0) - f(x_0, y_0) = \pm \Theta_0 6_0 C,$$

et par conséquent

$$6_1 = 6_0 [1 \pm \Theta_0 C(x_1 - x_0)],$$

on trouvera de même

$$6_2 = 6_1 [1 \pm \Theta_1 C(x_2 - x_1)],$$

....

$$6_n = 6_{n-1} [1 \pm \Theta_{n-1} C(X - x_{n-1})],$$

$$6_n = 6_0 [1 \pm \Theta_0 C(x_1 - x_0)][1 \pm \Theta_1 C(x_2 - x_1)] \ldots [1 \pm \Theta_{n-1} C(X - x_{n-1})].$$

Or, si la différence $X - x_0$ est positive, la valeur numérique du binôme $1 \pm \Theta_0 C(x_1 - x_0)$ sera inférieure à la

somme $1 + C(x_1 - x_0)$ et par suite à l'exponentielle

$$e^{C(x_1 - x_0)} = 1 + C(x_1 - x_0) + \frac{C^2(x_1 - x_0)^2}{1.2} + \text{etc.}$$

Par la même raison, les valeurs numériques des binômes

$$1 \pm \Theta_1 C(x_2 - x_1), \ldots, \quad 1 \pm \Theta_{n-1} C(X - x_{n-1}),$$

seront respectivement inférieures aux exponentielles

$$e^{C(x_2 - x_1)}, \ldots, \quad e^{C(X - x_{n-1})};$$

donc le produit de tous les binômes qui entrent dans la valeur de 6_n aura une valeur numérique inférieure au produit de toutes les exponentielles, c'est-à-dire à $e^{C(X - x_0)}$, et se réduit par conséquent à une expression de la forme

$$\pm \Theta e^{C(X - x_0)},$$

Θ représentant toujours un nombre compris entre les limites 0 et 1. Il faudrait évidemment remplacer cette expression par la suivante,

$$\pm \Theta e^{C(x_0 - X)},$$

si la différence $X - x_0$ devenait négative. Cela posé, on aura

$$6_n = \pm \Theta 6_0 e^{\pm C(X - x_0)} = \pm \Theta 6_0 e^{CH}.$$

Voilà donc l'accroissement 6_n de Y, correspondant à l'accroissement 6_0 de y_0. Si l'on fait, pour abréger, $K = e^{CH}$, K sera une constante positive et finie, et l'on aura simplement

$$6_n = \pm \Theta K 6_0.$$

Corollaire 1er. Lorsque les éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, de la différence $X - x_0$, obtiennent tous des valeurs nu-

mériques inférieures à $\frac{1}{C}$, les facteurs

$$1 \pm \Theta_0 C(x_1 - x_0), \quad 1 \pm \Theta_1 C(x_2 - x_1), \ldots,$$

sont tous positifs, et l'on a nécessairement

$$\mathcal{E}_n = \Theta K \mathcal{E}_0.$$

Corollaire 2[me]. La valeur de $\mathcal{E}_n = \pm \Theta K \mathcal{E}_0$ devient infiniment petite en même temps que $\mathcal{E}_0$; donc, à un accroissement infiniment petit de la quantité y_0, correspond toujours un accroissement infiniment petit de la quantité Y, et par conséquent la seconde de ces deux quantités est une fonction continue de la première.

Corollaire 3[me]. Si l'on considère seulement les équations

$$\begin{aligned} y_{m+1} - y_m &= (x_{m+1} - x_m) f(x_m, y_m), \\ y_{m+2} - y_{m+1} &= (x_{m+2} - x_{m+1}) f(x_{m+1}, y_{m+1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y - y_{n-1} &= (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}), \end{aligned}$$

elles suffiront pour déterminer Y en fonction des quantités x_m, $x_{m+1}, \ldots$, x_{n-1}, X, y_m, et l'on prouvera encore que si l'on attribue à y_m un certain accroissement $\mathcal{E}_m$, l'accroissement correspondant de Y sera de la forme

$$\pm \Theta \mathcal{E}_m e^{\pm C(X - x_m)}.$$

Donc ce dernier accroissement aura une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$\mathcal{E}_m e^{\pm C(X - x_m)},$$

et, à plus forte raison, à celle du produit

$$\mathcal{E}_m e^{\pm C(X - x_0)} = K \mathcal{E}_m.$$

161. La quantité Y dépend évidemment, 1° des valeurs

extrêmes de x représentées par x_0, X ; 2° de la quantité y_0 ; 3° du nombre n et des valeurs mêmes des éléments dans lesquels on a divisé la différence $X - x_0$, ou, en d'autres termes, du mode de division adopté. Mais il est facile de montrer que, si l'on fait décroître à l'infini les valeurs numériques des éléments de la différence $X - x_0$, la valeur de Y dépendra uniquement des trois quantités x_0, X et y_0. Pour le prouver, il suffit de faire voir que si le nombre n devient très-considérable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de Y qu'une influence insensible ; or c'est ce que l'on peut démontrer comme il suit.

Lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ se réduisent à un seul qui coïncide avec cette différence elle-même, la valeur de Y est simplement déterminée par l'équation

$$Y - y_0 = (X - x_0) f(x_0, y_0).$$

Lorsqu'au contraire la différence $X - x_0$ est partagée en n éléments $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ..., $X - x_{n-1}$, on a

$$Y - y_0 = (X - x_0) f[x_0 + \theta_1 (X - x_0), \ y_0 \pm \Theta A (X - x_0)].$$

Pour passer à un second mode de division, il suffit de subdiviser chacun des éléments du premier en nouveaux éléments. Or on peut calculer d'une manière approchée le degré d'influence que chaque subdivision aura sur la valeur de Y. En effet, lorsqu'on partagera, par exemple, l'élément $x_1 - x_0$ en plusieurs autres, l'équation

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0)$$

se trouvera remplacée par plusieurs équations de la même forme ; mais, en procédant comme nous l'avons déjà fait, on trouvera

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_1 (x_1 - x_0), \ y_0 \pm \Theta_1 A (x_1 - x_0)],$$

θ_1, Θ_1 désignant deux nombres inférieurs à l'unité. En

posant

$$f[x_0 + \theta_1 (x_1 - x_0), \quad y_0 \pm \Theta_1 A(x_1 - x_0)] = f(x_0, y_0) \pm \varepsilon_0,$$

on aura

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0).$$

Avant la subdivision de l'élément $x_1 - x_0$, on avait

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0).$$

Cette subdivision fait donc croître y_1 du produit

$$\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0).$$

Si d'ailleurs les autres éléments de la différence $X - x_0$, conservent leurs valeurs primitives, tandis que la quantité y_1 reçoit l'accroissement $\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0)$, Y, en vertu de ce que nous avons dit, prendra un autre accroissement de la forme

$$\pm \Theta K \varepsilon_0 (x_1 - x_0).$$

Donc l'accroissement de Y produit par la seule subdivision de l'élément $x_1 - x_0$ aura une valeur numérique inférieure à celle de la quantité

$$\pm K \varepsilon_0 (x_1 - x_0).$$

On prouverait de la même manière que l'accroissement de Y, produit par la subdivision de l'élément $x_{m+1} - x_m$, aurait une valeur numérique inférieure à celle de la quantité

$$\pm K \varepsilon_m (x_{m+1} - x_m),$$

le nombre ε_m étant déterminé par une équation de la forme

$$\pm \varepsilon_m = f[x_m + \theta (x_{m+1} - x_m), \quad y_m \pm \Theta A (x_{m+1} - x_m)] - f(x_m, y_m).$$

Donc, si l'on subdivise l'un après l'autre tous les éléments, Y prendra une suite d'accroissements dont la

somme est inférieure à

$$K\varepsilon_0(x_1-x_0)+K\varepsilon_1(x_2-x_1)+\ldots+K\varepsilon_{n-1}(X-x_{n-1})=K\varepsilon(X-x_0),$$

ε désignant une moyenne entre les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ Si les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, etc., obtiennent des valeurs infiniment petites, on pourra en dire autant des quantités $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, ainsi que de l'expression

$$K\varepsilon(X - x_0);$$

et par conséquent on n'altère pas sensiblement la valeur de Y, correspondante à un mode de division dans lequel les éléments de la différence $X - x_0$ ont des valeurs numériques très-petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres.

Concevons à présent que l'on considère à la fois deux modes de division, tels que les éléments du second ne soient plus des subdivisions des éléments du premier. On pourra comparer ces deux modes à un troisième tellement choisi, que chaque élément, soit du premier, soit du second, se trouve formé par la réunion de plusieurs éléments du troisième. Pour que cette condition soit remplie, il suffira que toutes les valeurs de x, interposées dans les deux premiers modes, soient employées dans le troisième; et on prouvera que l'on altère très-peu la valeur de Y en passant du premier ou du second mode au troisième, et par conséquent en passant du premier au second. Donc, lorsque les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, le mode de subdivision n'a plus, sur la valeur de Y, qu'une influence insensible, et si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments en augmentant leur nombre, la valeur de Y convergera vers une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x, y)$, des valeurs

extrêmes x_0, X, attribuées à la variable x, et de la quantité y_0.

Corollaire 1er. Comme la limite vers laquelle converge y, tandis que les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, dépend uniquement des trois quantités x_0, X, y_0, nous désignerons cette limite par la notation $F(x_0, X, y_0)$, que nous réduirons même à l'une des suivantes $F(X, y_0)$, $F(X)$, quand nous nous proposerons de faire varier les deux seules quantités X, y_0, ou la seule quantité X.

162. Il est facile de démontrer maintenant qu'il existe toujours une fonction de x propre à vérifier l'équation différentielle $dy = f(x, y)\,dx$, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire y_0, dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0. En effet, désignons par $F(x)$ ce que devient $F(X)$ quand on y remplace X par x; puisque $F(X)$ est ce que devient Y quand les éléments de la différence $X - x_0$ deviennent infiniment petits, de l'équation

$$Y - \eta = (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi), \quad \eta \pm \Theta A(X - \xi)]$$

on tirera

$$F(X) - F(\xi) = (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi), \ F(\xi) \pm \Theta A(X - \xi)],$$

et en faisant

$$\xi = x, \quad X = x + h,$$

x et $x + h$ étant renfermés entre les limites x_0, X, on aura à la fois

$$F(x) = y_0 + (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0), \quad y_0 \pm \Theta A(x - x_0)],$$
$$F(x + h) - F(x) = h f[x + \theta h, \quad F(x) \pm \Theta A h].$$

Or il est facile de voir, 1° que pour $x = x_0$, $F(x)$ se réduit à y_0; 2° que si l'accroissement h devient infi-

niment petit, l'accroissement correspondant de la fonction $F(x)$, savoir, $F(x+h)-F(x)$, sera lui-même une quantité infiniment petite; 3° que de cette équation, divisée par h, on tirera

$$F'(x)=f[x, F(x)];$$

ce qui exprime que la fonction $F(x)$ vérifie l'équation différentielle $dy=f(x, y)\,dx$.

Donc enfin, lorsque la fonction $f(x, y)$ et la dérivée $\frac{df(x, y)}{dy}$ restent finies et continues entre les limites x_0, X, il existe une fonction de x propre à vérifier l'équation différentielle $dy=f(x, y)\,dx$, et de plus à prendre une valeur particulière, mais arbitraire y_0, dans le cas où l'on attribue à la variable x une valeur donnée x_0.

Corollaire. Si l'on désignait la limite de Y par la notation $F(x, y_0)$, la fonction y se présenterait sous la forme $y=F(x, y_0)$ et serait l'intégrale générale de l'équation proposée, puisque y_0 est une constante arbitraire. Ajoutons que cette intégrale est, comme Y, une fonction continue de y_0.



VINGT-SEPTIÈME LEÇON.

Application de la méthode exposée dans la Leçon précédente à l'intégration d'une équation différentielle quelconque du premier ordre entre deux variables x, y.

---

163. Nous avons supposé jusqu'ici que les deux fonctions $f(x, y)$ et $\chi(x, y) = \frac{df(x, y)}{dy}$ demeuraient finies et continues, quelle que fût y pour toutes les valeurs renfermées entre les quantités x_0, X; mais il est facile de démontrer que les propriétés énoncées dans la leçon précédente subsisteront encore toutes les fois que ces fonctions seront finies et continues par rapport aux variables x, y dans le voisinage du système de valeurs particulières $x = x_0$, $y = y_0$, pourvu que l'on choisisse convenablement la quantité X. En effet, concevons que les expressions $f(x_0, y_0)$, $\chi(x_0, y_0)$ étant des quantités finies, on désigne par A, C deux nombres supérieurs à leurs valeurs numériques, et par a une quantité positive ou négative choisie de telle manière que pour des valeurs de x renfermées entre les limites x_0, $x_0 + a$, et pour des valeurs de y renfermées entre les limites $y_0 - \mathrm{A}a$, $y_0 + \mathrm{A}a$, les deux fonctions $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ restent continues par rapport aux variables x, y, et demeurent comprises, la première entre les limites $-$ A, $+$ A, la seconde entre les limites $-$ C, $+$ C; les propriétés mises en évidence dans la leçon précédente sub-

subsistera encore si l'on a pris pour X une moyenne entre les deux quantités x_0 et $x_0 + a$. Pour le démontrer, il suffit de faire voir que, dans l'hypothèse admise, les quantités $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$, déterminées par les équations

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 - y_1 = (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$Y - y_{n-1} = (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

étant toutes comprises entre les limites $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$, les fonctions $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ resteront finies et continues pour toutes les valeurs $y_1, y_2, \ldots, Y$ correspondantes à des valeurs de x comprises entre x_0 et $x_0 + a$. Or, si l'on ajoute entre elles celles de ces équations qui renferment les quantités $y_0, y_1, \ldots, y_m$, on obtiendra la formule

$$y_m - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) \ldots + (x_m - x_{m-1}) f(x_{m-1}, y_{m-1}),$$

dont le second membre est équivalent au produit de la différence $x_m - x_0$ par une moyenne entre les coefficients

$$f(x_0, y_0),\ f(x_1, y_1), \ldots,\ f(x_{m-1}, y_{m-1}).$$

De plus, la différence $x_m - x_0$ ayant une valeur numérique inférieure à celle de $X - x_0$, et par conséquent inférieure à a, il est clair que la valeur numérique de y_m sera comprise entre les limites $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$. Si chacune des expressions

$$f(x_0, y_0),\ f(x_1, y_1), \ldots,\ f(x_{m-1}, y_{m-1}),$$

a une valeur numérique inférieure à A, ce qui arrivera nécessairement si les quantités $y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}$ se trouvent elles-mêmes renfermées entre les limites $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$. Donc, puisque cette condition se vérifie à l'égard de y_0, elle sera pareillement satisfaite

à l'égard de y_1 : étant vérifiée pour y_0 et y_1, elle sera encore satisfaite à l'égard de $y_2, \ldots$, et ainsi de suite. Enfin elle se vérifiera pour y_m, m désignant un nombre entier égal ou inférieur à n, et par conséquent pour tous les termes de la suite $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, Y$.

Corollaire 1er. Soient θ et Θ deux nombres qui varient entre les limites 0 et 1; et indiquons par la caractéristique M une moyenne entre plusieurs quantités données. Comme le nombre désigné par C peut être pris arbitrairement pourvu qu'il surpasse la valeur numérique de $\chi(x_0, y_0)$, il est clair que la quantité a deviendra propre à vérifier les conditions du théorème précédent, si l'on a choisi a et C de telle manière que les deux fonctions

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 \pm \Theta A a),\quad \chi(x_0 + \theta a,\ y_0 \pm \Theta A a),$$

restent continues entre les limites

$$\theta = 0,\ \theta = 1;\quad \Theta = 0,\ \Theta = 1,$$

et que l'on ait toujours entre ces limites

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 \pm \Theta A a) = M(-A, +A).$$

Corollaire 2me. Supposons que parmi les valeurs de la quantité a, pour lesquelles les conditions énoncées dans le corollaire 1er peuvent être remplies, on choisisse celle qui est la plus grande, abstraction faite du signe : dans cette hypothèse, l'équation de la leçon précédente

$$y = F(x),\quad \text{ou}\quad y = F(x, y_0),$$

fournira une intégrale particulière de l'équation

$$dy = f(x, y)dx,$$

pourvu qu'on assujettisse la variable x à demeurer comprise entre les limites x_0 et $x_0 + a$.

Corollaire 3me. La quantité a étant déterminée comme

on vient de le dire, si, dans l'équation $y = F(x, y_0)$ on remplace y_0 par une constante arbitraire C, la formule $y = F(x, C)$ représentera l'intégrale générale de l'équation $dy = f(x, y)\,dx$, du moins pour certaines valeurs de x comprises entre certaines limites qui dépendront elles-mêmes de la valeur attribuée à la constante arbitraire. Concevons en effet que l'on désigne par α une quantité affectée du même signe que a, mais douée d'une valeur numérique moindre; soit de plus ε un nombre inférieur à l'unité, et supposons

$$C = y_0 \pm \varepsilon A\alpha = M(y_0 - A\alpha,\ y_0 + A\alpha).$$

Comme on aura évidemment

$$y_0 - Aa = C - A(a \pm \varepsilon\alpha), \quad y_0 + Aa = C + A(a \mp \varepsilon\alpha),$$

on en conclura que les deux quantités $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$ comprennent entre elles les deux suivantes, $C - A(a - \alpha)$, $C + A(a - \alpha)$, et l'on prouvera, en raisonnant comme ci-dessus, que la valeur $y = F(x, C)$ est une fonction continue de x et vérifie l'équation $dy = f(x, y)\,dx$, tant que la constante C demeure comprise entre les limites $y_0 - A\alpha$, $y_0 + A\alpha$, et la variable x entre les limites x_0 et $x_0 + (a - \alpha)$.

On démontrerait de la même manière la proposition suivante. Supposons que les expressions

$$f(x_0, y_0), \quad \chi(x_0, y_0),$$

ayant des valeurs finies, on choisisse le nombre A et la quantité a, de telle sorte que :

1°. Si $\chi(x_0, y_0)$ est positif ou nul, les deux fonctions

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 + \Theta A a), \quad \chi(x_0 + \theta a,\ y_0 + \Theta A a),$$

restant continues entre les limites

$$\theta = 0,\ \theta = 1, \quad \Theta = 0,\ \Theta = 1,$$

on ait toujours entre ces limites

$$f(x_0+\theta a,\ y_0+\Theta A a)=M(0,\ A);$$

2°. Si $\chi(x_0, y_0)$ est négatif ou nul, les deux fonctions

$$f(x_0+\theta a,\ y_0-\Theta A a),\quad \chi(x_0+\theta a,\ y_0-\Theta A a),$$

restant continues entre les limites

$$\theta=0,\ \theta=1,\quad \Theta=0,\ \Theta=1,$$

on ait toujours, entre ces limites,

$$f(x_0+\theta a,\quad y_0-\Theta A a)=M(0,\ -A),$$

les théorèmes de la leçon précédente subsisteront entre les limites x_0, x_0+a.

164. Parmi les valeurs de a qui remplissent les conditions énoncées, il est avantageux de choisir celle qui est la plus grande, abstraction faite du signe. Pour montrer par un exemple comment on peut déterminer cette valeur, supposons que l'équation différentielle donnée soit

$$dy=\operatorname{tang}(x+y)\,dx,$$

et que les quantités x_0, y_0 s'évanouissent. Pour que l'équation

$$f(x_0+\theta a,\ y_0+\Theta A a)=\operatorname{tang}(\theta a+\Theta A a)=M(0,\ A)$$

soit toujours vraie pour des valeurs positives de a, tandis que θ et Θ varient entre les limites 0 et 1, il est nécessaire que l'arc $a+Aa$ reste compris entre les limites 0, $\frac{\pi}{2}$, et que l'on ait $\operatorname{tang}(a+Aa)=M(0,\ A)$. Pour déduire de cette dernière équation la plus grande valeur possible de l'arc a, l'arc $a+Aa$ demeurant inférieur à $\frac{\pi}{2}$, il suffit, 1° de remplacer le second membre $M(0,\ A)$

par A ; 2° de joindre à la formule $\tang(a + Aa) = A$, ou $a = \frac{\operatorname{arc\,tang} A}{1 + A}$, celle qui fournit le maximum de a considéré comme fonction de A, savoir,

$$\frac{da}{dA} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{arc\,tang} A}{1 + A} = \frac{1}{1 + A^2};$$

or on satisfait aux deux équations ainsi obtenues en prenant

$$a = 1,229\ldots, \quad A = 0,3983.$$

Ainsi, dans l'hypothèse admise, la quantité positive $a = 1,229\ldots$ est la plus grande des valeurs de a propres à vérifier la formule

$$f(x_0 + \theta a, \quad y_0 + \Theta Aa) = M(0, A).$$

On prouverait de même que la quantité négative

$$a = -\ 1,229\ldots$$

est la plus grande, abstraction faite du signe, de celles qui sont propres à vérifier la formule

$$f(x_0 + \theta a, \quad y_0 - \Theta Aa) = M(0, -\ A).$$

On en conclurait que la méthode d'intégration exposée dans la leçon précédente fournira la valeur générale de y qui satisfait à l'équation

$$dy = \tang(x + y)\,dx,$$

et s'évanouit avec la variable x, du moins tant que cette variable restera comprise entre les limites

$$a = -\ 1,229\ldots, \quad a = 1,229\ldots$$

Pour l'équation $dy = \tang(x^2 + y^2)dx$, en supposant toujours $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, on trouverait que la plus grande valeur de a^2 serait déterminée par le système des

deux équations

$$a^2 = \frac{\text{arc tang A}}{1 + A^2}, \quad \text{arc tang A} = \frac{1}{2A},$$

desquelles on conclurait

$$A = 0,7654\ldots, \quad a^2 = 0,9653, \quad a = \pm 0,9824\ldots,$$

et la méthode exposée fournirait la valeur de y qui vérifie l'équation

$$dy = \text{tang}(x^2 + y^2)dx,$$

et s'évanouit avec x, tant que la variable x resterait comprise entre les limites

$$-0,9824\ldots, \quad +0,9824.$$

Considérons encore l'équation différentielle

$$dy = \frac{dx}{x + y},$$

et supposons $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, on aura

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 + \Theta A a) = \frac{1}{1 + \theta a + \Theta A a} = M(0,\ A),$$

et cette équation sera toujours vraie entre les limites $\theta = 0$, $\theta = 1$, $\Theta = 0$, $\Theta = 1$, si l'on prend $A = 1$, et si l'on attribue à la quantité a une valeur positive quelconque. Par suite, la plus grande des valeurs positives de a sera $a = \infty$, et si l'on désigne par $y = F(x)$ celle des intégrales particulières de l'équation

$$dy = \frac{dx}{x + y}$$

qui s'évanouit pour $x = 1$, la méthode exposée déterminera la valeur de $F(x)$ tant que la variable x sera con-

prise entre les limites $x = 1$, $x = \infty$. L'équation

$$\frac{1}{1 + \theta a + \Theta A a} = M(0, A)$$

sera encore satisfaite si, A étant un nombre supérieur à l'unité, on attribue à a une valeur négative comprise entre o et $-\frac{A-1}{A(A+1)}$; or, parmi les valeurs négatives de a que fournit l'équation $a = -\frac{A-1}{A(A+1)}$, celle qui est la plus grande, abstraction faite du signe, se trouve déterminée par la formule

$$\frac{da}{dA} = 0, \quad \text{ou} \quad A^2 - 2A = 1,$$

de laquelle on tire, A devant être supérieur à l'unité,

$$A = 1 + \sqrt{2}, \quad a = -(3 - 2\sqrt{2}) = -0,1715.$$

La méthode d'intégration suffira donc encore pour fixer la valeur de $F(x)$ tandis qu'on fera varier x entre les limites o et $-0,1715$.

165. Il est essentiel d'observer que les quantités $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, Y, déterminées comme nous l'avons dit, resteront comprises entre les limites $y_0 + Aa$, $y_0 - Aa$, et formeront, ou une série croissante, ou une série décroissante, toutes les fois que X sera renfermé entre x_0 et $x_0 + a$, les quantités a et A étant choisies de manière à vérifier les conditions énoncées ci-dessus. Il est aisé d'en conclure que, dans le cas dont il s'agit, la fonction $y = F(x)$ croîtra ou décroîtra toujours depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, sans pouvoir dépasser la limite $y_0 + Aa$, ou $y_0 - Aa$. Concevons maintenant que, a satisfaisant toujours aux mêmes conditions, la quantité X varie entre les limites x_0, $x_0 + a$, et s'approche indéfiniment de cette

dernière limite. La valeur de $y = F(X)$ s'approchera elle-même indéfiniment d'une certaine limite qu'on pourra désigner par $F(x_0 + a)$, et qui sera comprise entre les deux quantités $y_0 - Aa$, $y_0 + Aa$. On prouvera dès lors, par des raisonnements analogues à ceux dont nous avons déjà fait usage, que les théorèmes de la leçon précédente subsisteront non-seulement lorsque la quantité X variera entre les limites x_0, $x_0 + a$, mais encore tandis que cette quantité s'approchera indéfiniment d'une nouvelle limite $x_0 + a_1$. Par suite, on pourra calculer, avec tel degré d'approximation qu'on voudra, les valeurs de F(X) correspondantes à des valeurs de X comprises entre x_0 et $x_0 + a_1$. Si d'ailleurs les fonctions $f(x, y)$, $\chi(x, y)$ restent continues dans le voisinage du système des valeurs particulières

$$x = x_0 + a_1, \quad y = F(x_0 + a_1),$$

on déterminera encore une valeur de x située au delà de la limite $x_0 + a_1$, et vers laquelle on pourra faire converger la quantité X dans la fonction F(X). Désignons par $x_0 + a_2$ cette nouvelle limite, et continuons de même; les quantités

$$x_0 + a, \quad x_0 + a_1, \quad x_0 + a_2, \quad \ldots,$$

formeront une série croissante ou décroissante, et leurs valeurs numériques finiront par surpasser tout nombre donné, ou par s'approcher indéfiniment d'une certaine limite. Dans le premier cas, la quantité X pourra croître et décroître indéfiniment, de manière à devenir supérieure ou inférieure à toute quantité donnée. Dans le second cas, la quantité X pourra s'approcher indéfiniment de la limite vers laquelle convergeront les différents termes $x_0 + a_1$, $x_0 + a_2, \ldots$ Soit $\mathcal{X}$ cette même limite et $F(\mathcal{X})$ la valeur correspondante de F(X), pour

qu'on ne puisse plus faire passer la quantité X au delà de la limite X dans la fonction $F(X)$, il sera nécessaire, ou que la quantité $F(X)$ soit infinie, ou que l'une des fonctions $f[x, F(x)]$, $\chi[x, F(x)]$ devienne infinie pour la valeur particulière $x = X$, ou enfin que l'une de ces fonctions devienne discontinue dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit.

166. Afin de montrer l'application de ces principes généraux à un exemple, concevons que $F(x)$ représente celle des intégrales particulières de l'équation $dy = \frac{dx}{x+y}$ qui s'évanouit pour $x = 1$; et cherchons les valeurs qu'on devra, dans ce cas, attribuer aux constantes a, a_1, a_2,..., en les supposant négatives, et les plus grandes possibles (abstraction faite du signe). Ces valeurs seront propres à vérifier des équations de la forme

$$\frac{1}{1+\theta a+\Theta A a} = M(0, A),$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{x_0 + F(x_0) + (\theta + \Theta A)a} = M(0, A),$$

$$\frac{1}{x_0 + a + F(x_0 + a) + (\theta + \Theta A_1)(a_1 - a)} = M(0, A_1),$$

$$\frac{1}{x_0 + a_1 + F(x_0 + a_1) + (\theta + \Theta A_2)(a_2 - a_1)} = M(0, A_2), \text{ etc.},$$

tandis que les nombres θ et Θ resteront compris entre les limites 0 et 1. Or on satisfait à ces conditions en prenant

$$a = -\frac{A[x_0 + F(x_0)] - 1}{A(A+1)},$$

$$a_1 - a = -\frac{A_1[x_0 + a + F(x_0 + a)] - 1}{A_1(A_1 + 1)}.$$

$$a_2 - a_1 = -\frac{A_2[x_0+a_1+F(x_0+a_1)]-1}{A_2(A_2+1)},\ldots,$$

et plus généralement

$$a_m - a_{m-1} = -\frac{A_m[x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})]-1}{A_m(A_m+1)}.$$

Ajoutons que la valeur de a_m deviendra la plus grande possible, abstraction faite du signe, si l'on choisit A_m de manière à vérifier l'équation

$$A_m^2 - \frac{2A_m+1}{x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})} = 0,$$

et si l'on prend en conséquence

$$A_m = \frac{1+\sqrt{1+x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})}}{x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})},$$

$$a_m = -2-x_0-F(x_0+a_{m-1})+2\sqrt{1+x_0+a_{m-1}+F(x_0+a_{m-1})},$$

comme on a d'ailleurs, par hypothèse, $x_0=1$, $F(x_0)=0$, on aura successivement

$$a_m = -3-F(1+a_{m-1})+2\sqrt{2+a_{m-1}+F(1+a_{m-1})},$$

et l'on en tirera simplement

$$a = -3+2\sqrt{2},$$

$$a_1 = -3+F(1+a)+2\sqrt{2+a+F(1+a)},\text{ etc.}$$

Si, à l'aide de ces dernières équations et de la méthode exposée dans la leçon précédente, on détermine l'une après l'autre les quantités $1+a$, $1+a_1$, $1+a_2,\ldots\ldots$, qui remplacent x_0+a, x_0+a_1, $x_0+a_2,\ldots$, on obtiendra une série de termes qui décroîtront sans cesse, et qui convergeront vers une certaine limite. Désignons par X cette limite; on aura sensiblement, pour de très-grandes valeurs de m,

$$1+a_m = 1+a_{m-1} = X,$$

et par suite

$$2+X+F(X) = 2\sqrt{1+X+F(X)},$$

ou

$$X + F(X) = 0,$$

donc la valeur particulière $x = X$ rendra infinie la fonction

$$f[x, F(x)] = \frac{1}{x + F(x)},$$

ce qui s'accorde avec la remarque générale que nous avons faite ci-dessus.

On ne doit pas s'étonner de voir que dans certains cas la méthode d'intégration ne fournisse le moyen de calculer des quantités réelles propres à représenter les valeurs successives d'une intégrale particulière d'une équation différentielle donnée, qu'autant qu'on suppose les valeurs correspondantes de la variable indépendante x renfermées entre certaines limites. En effet, parmi les équations différentielles qui peuvent s'intégrer par des méthodes rigoureuses, il en existe beaucoup dont les intégrales particulières ne sauraient être étendues à des valeurs quelconques de la variable x, en demeurant toujours réelles. Telle est, par exemple, l'équation

$$dy = \frac{dx}{x+y}.$$

Si, après l'avoir présentée sous la forme

$$\frac{dx + dy}{x + y + 1} = dy,$$

on intègre ses deux membres en assujettissant y à s'évanouir pour $x = 1$, on trouvera

$$l(x + y + 1) - l2 = y,$$

et par suite

$$x = 2e^y - y - 1.$$

Or il est aisé de voir que le second membre de cette dernière équation admet une valeur minimum déterminée par la formule $2e^y = 1$ de laquelle on tire

$$y = -l2 = -0,6931\ldots,$$

et par suite

$$x = l2 = 0,6931\ldots$$

Donc si l'on désigne par $y = F(x)$ l'intégrale particulière que fournit l'équation

$$x = 2e^y - y - 1,$$

cette intégrale ne pourra pas s'étendre, sans cesser d'être réelle, à des valeurs de x plus petites que la limite $x = l2$, à laquelle correspondent une valeur nulle de

$$x + y = x + F(x),$$

et une valeur infinie de

$$f(x, y) = \frac{1}{x + F(x)}\cdots$$

Ces considérations directes nous ramènent donc aux conclusions précédemment établies.



VINGT-HUITIÈME LEÇON.

Limite des erreurs que l'on peut commettre en se servant de la méthode exposée dans les leçons précédentes pour le calcul numérique des intégrales particulières d'une équation différentielle du premier ordre.

167. La fonction y étant assujettie à vérifier l'équation différentielle $dy = f(x, y)\,dx$, et à prendre pour $x = x_0$ la valeur particulière y_0, si l'on demande, non pas l'intégrale générale, mais une nouvelle valeur particulière de y, par exemple celle qui correspond à $x = \mathrm{X}$; cette valeur différera très-peu de la quantité Y, déterminée par les équations

$$\begin{aligned}
y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),\\
y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathrm{Y} - y_{n-1} &= (\mathrm{X} - x_{n-1}) f(x_{n-1}, y_{n-1}),
\end{aligned}$$

pourvu que l'on attribue aux éléments de la différence $\mathrm{X} - x_0$, c'est-à-dire aux quantités $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$, $\mathrm{X} - x_{n-1}$, de très-petites valeurs numériques, et si l'on a d'ailleurs

$$\mathrm{X} = \mathrm{M}(x_0, x_0 + a),$$

la quantité a étant choisie de manière à remplir les conditions énoncées dans la leçon précédente. De plus, comme pour passer de la quantité Y à la valeur cherchée

de y, il suffira de subdiviser les différences $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1, \ldots$ en éléments infiniment petits, il est clair que si l'on remplace cette valeur par Y, l'erreur commise en plus ou en moins sera représentée (nº 161) par une expression de la forme

$$\pm\, \Theta K \varepsilon\, (X - x_0):$$

cette erreur sera donc inférieure à $KH\varepsilon$, H désignant la valeur numérique de $X - x_0$, K l'exponentielle e^{CH}, et ε une moyenne entre les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$, déterminée par des équations de la forme

$$\pm\varepsilon_m = f[x_m + \theta(x_{m+1} - x_m),\ y_m \pm \Theta A(x_{m+1} - x_m)] - f(x_m,\ y_m).$$

Cela posé, concevons que chacun des éléments de la différence $X - x_0$ soit renfermé entre les limites $\pm h$, h étant une quantité positive. Les nombres $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ ne surpasseront jamais la plus grande valeur numérique que puisse recevoir la quantité

$$f[x \pm \theta h,\quad y \pm \Theta A h] - f(x, y),$$

tandis que l'on fait varier x et $x \pm \theta h$ entre les limites x_0, X; y et $y \pm \Theta A h$ entre les limites $y_0, y_0 \pm \Theta A a$; enfin θ et Θ entre les limites 0 et 1. Donc, si l'on nomme D cette plus grande valeur, ε restera toujours inférieur à D et l'erreur commise au produit KHD.

Ajoutons, 1° que le produit θh devra être affecté du signe + ou du signe —, suivant que la différence $X - x_0$ sera positive ou négative; 2° que le double signe placé devant le produit $\Theta A h$ devra être réduit au signe + ou au signe —, suivant que la quantité a vérifiera la première ou la seconde des équations

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 + \Theta A a) = M(0,\ A),$$
$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 - \Theta A a) = M(0 - A).$$

168. Il est très-facile d'obtenir un nombre plus grand que D quand, pour toutes les valeurs des variables x, y comprises entre les limites x_0, x_0+a, $y_0-\mathrm{A}a$, $y_0+\mathrm{A}a$, la fonction $\varphi(x, y)=\frac{df(x,y)}{dx}$ reste finie et continue aussi bien que les fonctions $f(x, y)$ et $\chi(x, y)$. Admettons en effet cette supposition et désignons par B, C deux nombres égaux ou supérieurs aux plus grandes valeurs numériques que puissent obtenir les fonctions $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$, tandis que x et y varient entre les limites dont il s'agit. La dérivée de la fonction

$$f(x\pm\theta h,\quad y\pm\Theta \mathrm{A}h)-f(x,\ y)$$

par rapport à h, savoir,

$$\pm\theta\varphi(x\pm\theta h,\ y\pm\Theta\mathrm{A}h)\pm\Theta\mathrm{A}\chi(x\pm\theta h,\ y\pm\Theta\mathrm{A}h),$$

aura évidemment une valeur numérique inférieure à la somme B + AC, et l'on doit en dire autant de toute expression dans laquelle se changerait cette dérivée si l'on y multipliait le nombre h par un coefficient plus petit que l'unité. Or, en vertu de l'équation

$$\frac{\mathrm{F}(h)-f(\mathrm{o})}{h}=\mathrm{F}'(\theta h),$$

le rapport $\frac{f(x\pm\theta h,\ y\pm\Theta\mathrm{A}h)-f(x,y)}{h}$ est égal à une expression de cette nature; donc la plus grande valeur numérique de ce rapport ou la fraction $\frac{\mathrm{D}}{h}$ sera inférieure elle-même à la somme B + AC, et le nombre D ne pourra pas surpasser le produit $(\mathrm{B}+\mathrm{AC})h$. On trouvera dès lors, pour limite de l'erreur commise, $(\mathrm{B}+\mathrm{AC})\mathrm{KH}h$ ou $(\mathrm{B}+\mathrm{AC})\mathrm{H}e^{\mathrm{CH}}h$. En supposant toujours que la quan-

tité a vérifie l'une des deux équations

$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 + \Theta A a) = M(o,\ A),$$
$$f(x_0 + \theta a,\ y_0 - \Theta A) = M(o - A),$$

on pourra prendre pour B et C les plus grandes valeurs numériques que reçoivent les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\chi(x, y)$, tandis qu'on y fait varier x entre les limites x_0, $x_0 + a$, et y entre les limites y_0, $y_0 + Aa$, ou y_0 et $y_0 - Aa$.

Si la fonction $\varphi(x, y)$ devenait infinie pour $x = x_0$, la quantité B étant alors infinie, on ne pourrait plus, à l'aide de l'expression qui précède, évaluer l'erreur commise, quelque petite que fût d'ailleurs la différence $X - x_0$; mais, dans ce cas même, il sera ordinairement facile de déterminer un nombre supérieur à D, par la méthode que nous allons indiquer.

Si, après avoir remplacé h par t dans l'expression

$$\pm\, \theta\varphi(x \pm \theta h,\ y \pm \Theta A h) \pm \Theta A \chi(x \pm \theta h,\ y \pm \Theta A h),$$

et multiplié cette expression par dt, on intègre le produit entre les limites $t = o$, $t = h$, l'intégrale qui en résultera,

$$\int_0^h [\pm\theta\varphi(x \pm \theta t,\ y \pm \Theta A t) \pm \Theta A \chi(x \pm \theta t,\ y \pm \Theta A t]\, dt,$$

sera précisément équivalente à

$$f(x \pm \theta h,\ y \pm \Theta A h) - f(x,\ y),$$

θ et Θ étant pris avec le signe + ou avec le signe —, suivant que l'une ou l'autre des conditions dont nous avons déjà parlé sera satisfaite. Soient maintenant $\mathrm{f}(t)$ la fonction comprise sous le signe $\int$ dans l'intégrale, et T une autre fonction de t qui reste constamment positive et supérieure à la valeur numérique de $\mathrm{f}(t)$ entre les limites $t = o$, $t = h$. Comme entre ces limites les deux binômes

$\frac{\mu\theta}{(\theta t)^{1-\mu}} = \mu\theta^{\mu}t^{\mu-1}$, à laquelle on peut substituer le produit $\mu t^{\mu-1}$. En conséquence, on pourra prendre

$$\mathrm{T} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{AC}_1 + (\mathrm{B}_2 + \mathrm{AC}_2)\mathrm{H}^{\mu} + \mu\mathrm{A}_2 t^{\mu-1},$$

et l'on en conclura

$$\int_0^h \mathrm{T}dt = [\mathrm{B}_1 + \mathrm{AC}_1 + (\mathrm{B}_2 + \mathrm{AC}_2)\mathrm{H}^{\mu}]h + \mathrm{A}_2 h^{\mu}.$$

Si l'on avait supposé

$$f(x, y) = f_1(x, y) + (x - x_0)\,\mathrm{l}(x - x_0) f_2(x, y),$$

on aurait trouvé

$$\varphi(x, y) = \varphi_1(x, y) + (x - x_0)\,\mathrm{l}(x - x_0)\varphi_2(x, y) + [1 + \mathrm{l}(x - x_0)] f_2(x, y),$$
$$\chi(x, y) = \chi_1(x, y) + (x - x_0)\,\mathrm{l}(x - x_0)\chi_2(x, y),$$

et en raisonnant comme ci-dessus, on serait parvenu, pour de très-petites valeurs du nombre h, aux équations

$$\mathrm{T} = \mathrm{B}_1 + \mathrm{AC}_1 + (\mathrm{B}_2 + \mathrm{AC}_2)\mathrm{H}^{\mu} + \mathrm{A}_2(1 + \mathrm{l}\,h),$$
$$\int_0^h \mathrm{T}dt = [\mathrm{B}_1 + \mathrm{AC}_1 + (\mathrm{B}_2 + \mathrm{AC}_2)\mathrm{H}^{\mu}]h + \mathrm{A}_2 h\,\mathrm{l}h.$$

Supposons enfin

$$f(x, y) = uf_1(x, y) + vf_2(x, y) + wf_3(x, y) + \text{etc.},$$

$f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $f_3(x, y)$,... étant des fonctions nouvelles qui conservent, ainsi que leurs dérivées du premier ordre, des valeurs finies pour $y = x_0$, et u, v, w,...., désignant des fonctions de la seule variable x. Si l'on représente par u, v, w les plus grandes valeurs numériques que puissent acquérir u, v, w, entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$; par $\mathrm{f}_1(t)$, $\mathrm{f}_2(t)$, $\mathrm{f}_3(t)$,..... ce que deviennent u, v, w,... quand on y remplace x par

$x \pm \theta t$, et par T_1, T_2, T_3,..... des fonctions positives de t qui, entre les limites $t = 0$, $t = h$, surpassent constamment les valeurs numériques de $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$,..., on trouvera, en conservant d'ailleurs des notations semblables à celles dont nous avons déjà fait usage,

$$T = (B_1 + AC_1)U + (B_2 + AC_2)V + \ldots + A_1T_1 + A_2T_2 + \ldots,$$

et par suite

$$\int_0^h T dt = [(B_1 + AC_1)U + (B_2 + AC_2\ldots)V]h$$
$$+ A_1 \int_0^h T_1 dt + A_2 \int_0^h T_2 dt + \ldots$$

Si l'on fait en particulier

$$u = x^\lambda, \quad v = y^\mu, \quad w = z^\nu, \ldots,$$

λ, μ, ν étant des nombres inférieurs à l'unité, on aura

$$\int_0^h T dt = [(B_1 + AC_1)H^\lambda + (B_2 + AC_2)H^\mu \ldots]h + A_1 h^\lambda + A_2 h^\mu + \ldots$$

170. Concevons maintenant qu'on se propose de calculer la valeur de y correspondante à $x = X$ avec un degré donné d'approximation, par exemple, de manière que l'erreur commise soit inférieure à une unité décimale de l'ordre m, c'est-à-dire à $\left(\frac{1}{10}\right)^m$. Pour y parvenir, il suffira d'attribuer au nombre h une valeur telle que l'expression KHD ne surpasse pas $\left(\frac{1}{10}\right)^m$, et par conséquent telle que l'on ait

$$D < \frac{e^{-CH}}{(10)^m H};$$

puis de prendre pour éléments de la différence $X - x_0$ des quantités qui soient inférieures, abstraction faite du signe,

à ce même nombre. Dans le cas où il sera permis de substituer au nombre D l'expression $(B+AC)h$, on vérifiera l'inégalité qui précède, en supposant $h < \frac{e^{-CH}}{(10)^m(B+AC)H}$.

171. Pour faire mieux comprendre les principes que nous venons d'établir, appliquons-les à quelques exemples; et d'abord supposons que la variable y doive vérifier l'équation différentielle

$$dy = \cos\frac{x+y}{5}\,dx.$$

Comme on aura

$$f(x, y) = \cos\frac{x+y}{5}, \quad \varphi(x, y) = \chi(x, y) = -\tfrac{1}{5}\sin\frac{x+y}{5},$$

il est clair que les trois fonctions

$$f(x, y), \quad \varphi(x, y), \quad \chi(x, y),$$

resteront finies et continues pour des valeurs quelconques des variables x, y. De plus, les valeurs numériques de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées étant toujours égales ou inférieures aux deux nombres 1 et $\frac{1}{5}$, on pourra prendre $A = 1$, $B = C = \frac{1}{5}$, quelles que soient d'ailleurs les quantités représentées par x_0, X et y_0. Cela posé, on conclura que, pour réduire au-dessous de $\frac{1}{(10)^m}$ l'erreur commise dans le calcul d'une valeur particulière de y, il suffira de choisir h de manière que l'on ait

$$h < \frac{5}{2(10)^m H} e^{-\frac{H}{5}}.$$

Concevons, pour fixer les idées, qu'on assujettisse la variable y à s'évanouir avec x, et que l'on veuille obtenir, à un dixième près, la valeur de y correspondante à

$x = 1$, on aura dans ce cas

$$m = 1,\ x_0 = 0,\ y_0 = 0,\ X = 1,\ X - x_0 = H = 1,$$
$$h < \tfrac{1}{4}(2,71828\ldots)^{-\frac{1}{2}} = 0,2046\ldots,$$

et l'on pourra affirmer que l'erreur commise sera inférieure à $\frac{1}{10}$ si chacun des éléments de la différence $X - x_0$ est inférieure à $0,2046\ldots.$ Cette condition sera remplie si l'on partage $X - x_0 = 1$ en cinq éléments dont chacun soit égal à $0,2$. Faisons, en conséquence,

$$x_1 = 0,2,\quad x_2 = 0,4,\quad x_3 = 0,6,\quad x_4 = 0,8,\ldots;$$

les formules établies ci-dessus nous donneront

$$y_1 = 0,2, \qquad \frac{x_1 + y_1}{5} = 0,08 = (0,0509\ldots)\frac{\pi}{2},$$
$$y_2 = 0,2 + 0,2\cos(5^\circ,09) = 0,399\ldots, \qquad \frac{x_2 + y_2}{5} = 0,1598 = (0,1017\ldots)\frac{\pi}{2},$$
$$y_3 = 0,399\ldots + 0,2\cos(10^\circ,17) = 0,596\ldots, \qquad \frac{x_3 + y_3}{5} = 0,2393\ldots = (0,1523\ldots)\frac{\pi}{2},$$
$$y_4 = 0,596\ldots + 0,2\cos(15^\circ,23) = 0,791\ldots, \qquad \frac{x_4 + y_4}{5} = 0,3181\ldots = (0,2025\ldots)\frac{\pi}{2},$$
$$Y = 0,791\ldots + 0,2\cos(20^\circ,25) = 0,980.$$

Donc la valeur cherchée de y différera très-peu du nombre $0,980\ldots$, et si on la suppose égale à ce nombre, l'erreur commise sera au-dessous d'un dixième. Il est facile de vérifier cette conclusion. En effet, on tire de l'équation $dy = \cos\frac{x+y}{5}dx$

$$dy + dx = 2\cos^2\frac{x+y}{10}\,dx,\quad \frac{dx}{5} = \frac{\frac{x+y}{10}}{\cos^2\frac{x+y}{1}};$$

puis, en intégrant les deux membres de manière que y

s'évanouisse avec x,

$$\frac{x}{5}=\operatorname{tang}\frac{x+y}{10},\quad y=-x+10\operatorname{arc\,tang}\frac{x}{5}.$$

Si maintenant on pose $x=1$, on trouvera

$$y=10\operatorname{arc\,tang}\tfrac{1}{5}-1=0,973952\ldots$$

Par conséquent, l'erreur que l'on commettrait en prenant $0,980\ldots$ pour valeur approchée de y serait inférieure à $\frac{1}{10}$ et même à $\frac{1}{100}$.

Si l'on considère l'équation

$$dy=\frac{dx}{1+x^2+y^2},$$

on aura

$$f(x,\ y)=\frac{1}{1+x^2+y^2},$$
$$\varphi(x,\ y)=-\frac{2x}{(1+x^2+y^2)^2},$$
$$\chi(x,\ y)=-\frac{2y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Or les valeurs maxima des rapports $\frac{1}{1+x^2}$, $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ étant représentées par les deux nombres 1 et $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, il est clair que ces deux nombres seront toujours supérieurs, le premier à la valeur numérique de la fonction $f(x,\ y)$, le second aux valeurs numériques des deux fonctions dérivées $\varphi(x,\ y)$, $\chi(x,\ y)$; on pourra donc prendre

$$A=1,\quad B=C=\frac{3\sqrt{3}}{8},\quad B+AC=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

quelles que soient d'ailleurs les quantités x_0, X et y_0; on

en conclura que, pour réduire au-dessous de $\frac{1}{(10)^m}$ l'erreur commise dans le calcul d'une valeur particulière de y, il suffira de choisir h de manière à vérifier la formule

$$h < \frac{4\sqrt{3}}{9(10)^m H} e^{-\frac{4}{3}H\sqrt{3}}.$$

On doit remarquer que l'équation $dy = \frac{dx}{1 + x^2 + y^2}$ est du nombre de celles que l'on ne sait pas intégrer par des méthodes rigoureuses.

Considérons encore l'équation différentielle

$$dy = \operatorname{tang}(x^2 + y^2)dx,$$

et supposons que la fonction y doive s'évanouir avec x : on pourra, par la méthode qui précède, calculer les valeurs particulières de y qui correspondent à des valeurs de x renfermées entre les limites

$$y_0 = 0, \quad Y = \pm\, 0{,}7519.$$

Par suite, les valeurs numériques des deux fonctions

$$\varphi(x, y) = 2x[1 + \operatorname{tang}^2(x^2 + y^2)],$$

et

$$\chi(x, y) = 2y[1 + \operatorname{tang}^2(x^2 + y^2)]$$

ne surpasseront pas les nombres

$$B = 3{,}1157,\ldots, \quad \text{et} \quad C = 2{,}3847\ldots$$

Cela posé, on conclura que l'erreur commise dans le calcul d'une valeur particulière de y sera inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^m$ si l'on prend

$$h < \frac{0{,}2023\ldots e^{-2{,}3847\ldots H}}{(10)^m H}.$$

Considérons enfin l'équation différentielle

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})dx,$$

et supposons que, la fonction y devant se réduire à l'unité pour $x = 0$, on veuille calculer les valeurs de y correspondantes à des valeurs positives de x. Dans cette hypothèse, la formule

$$f(x_0 + \theta a, \quad y_0 + \Theta A a) = M(0, A)$$

donnera

$$\theta a^{\frac{1}{2}} + (1 + \Theta A a)^{\frac{1}{2}} = M(0, A),$$

et l'on y satisfera quel que soit A, pourvu que l'on détermine la quantité positive a par le moyen de l'équation

$$a^{\frac{1}{2}} + (1 + Aa)^{\frac{1}{2}} = A.$$

Cette condition étant remplie, il est clair que si l'on prend $X = a$ ou $X < a$, la valeur de y correspondante à $x = X$ se trouvera comprise entre les limites 1, $1 + Aa$ et la valeur de la fonction $\chi(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ entre les limites 0 et $\frac{1}{2}$. Cela posé, les quantités désignées par B_1, C_1, B_2, C_2 dans la formule

$$[B_1 + AC_1 + (B_2 + AC_2)H^{\mu}]h + Ah^{\mu} < \frac{e^{-CH}}{(10)^m H}$$

se réduiront à

$$B_1 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{2}, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 0,$$

et l'on tirera de cette formule

$$\frac{1}{2}h + h^{\frac{1}{2}} < \frac{e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(h^{\frac{1}{2}} + 1)^2 < \frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH} + 1,$$

et par suite

$$h^{\frac{1}{2}} + 1 < \left[\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH} + 1\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$h < 2 + \frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH} - 2\left[\frac{2e^{-\frac{1}{2}H}}{(10)^m AH} + 1\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose $a = X = H$, l'équation

$$a^{\frac{1}{2}} + (1 + Aa)^{\frac{1}{2}} = A$$

deviendra

$$H^{\frac{1}{2}} + (1 + AH)^{\frac{1}{2}} = A,$$

ou

$$\left[(1 + AH)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}H\right]^{\frac{1}{2}} = 1 + H^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}H^2,$$

et l'on en conclura, en extrayant les racines positives des deux membres,

$$(1 + AH)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}H = \left[1 + H^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}H^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$A = \tfrac{1}{2}H + H^{\frac{1}{2}} + (1 + H^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{4}H^2)^{\frac{1}{2}};$$

à l'aide de cette valeur de A, on obtiendra la condition à laquelle il suffit d'assujettir le nombre h pour que l'erreur commise sur la valeur de y correspondante à $x = X = H$ ne dépasse pas $(\frac{1}{10})^m$.

172. La méthode que nous venons d'exposer a l'avantage de démontrer que y_n converge vers une limite fixe lorsque x croît indéfiniment, et qu'il y a une fonction y qui satisfait à l'équation différentielle. Si l'on admettait à

priori que la fonction y existe, l'erreur commise peut être réduite à moitié. En effet, la valeur de y correspondant à x_{n+1} peut être mise sous la forme

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h + f'(x_n + \theta h, y_n \pm \theta A h)\frac{\Delta x^2}{2};$$

or la valeur approchée de y, d'après la méthode, est donnée par l'équation

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)h.$$

Ainsi la seule sous-division à l'infini de la différence $x_{n+1} - x_n$ fait varier y_n de la quantité

$$f'(x + \theta h, y \pm \theta A h)\frac{h^2}{2},$$

qui est inférieure à $(B + AC)\frac{h^2}{2}$: c'est la moitié de ce qu'on avait adopté par la marche précédente ; on peut donc poser en général, en désignant l'erreur par e,

$$e < \frac{B + AC}{2}\left[\frac{(1 + Ch)^2 - 1}{C}\right]h.$$

173. On peut, à l'aide d'autres méthodes, effectuer, par approximation, l'intégration des équations différentielles du premier ordre. Ces nouvelles méthodes méritent même la préférence, parce qu'elles resserrent les limites entre lesquelles les valeurs des inconnues se trouvent comprises. Concevons toujours que, la fonction y étant assujettie, 1° à vérifier l'équation différentielle

$$dy = f(x, y)dx;$$

2° à prendre la valeur particulière y_0 pour $x = x_0$, on demande une autre valeur particulière de y, savoir, celle qui correspond à $x = X$. Supposons d'ailleurs que

X soit renfermé entre les limites x_0, $x_0 + a$; enfin désignons par $y = F(x)$ la fonction inconnue de x propre à remplir les deux conditions ci-dessus énoncées. Cette fonction, ainsi qu'on l'a déjà remarqué, croîtra ou décroîtra toujours depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$ sans pouvoir dépasser la limite $y_0 + Aa$, ou $y_0 - Aa$. De plus, comme on aura

$$dF(x) = f[x, F(x)]\, dx,$$

on en conclura, en intégrant,

$$F(X) - F(x_0) = \int_{x_0}^{X} f[x, F(x)]\, dx.$$

L'intégrale du second membre est équivalente à la différence $X - x_0$ multipliée par une moyenne entre les diverses valeurs que reçoit la fonction $f[x, F(x)]$, tandis que l'on fait varier x entre les limites x_0, X, ou, ce qui revient au même, par une moyenne entre les diverses valeurs que reçoit la fonction $f(x, y)$, tandis que l'on fait varier x entre les limites x_0, X, et y entre les limites $F(x_0)$, $F(X)$; comme cette moyenne peut être représentée par une expression de la forme

$$f[x_0 + \theta(X - x_0), \quad F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)]],$$

θ et Θ désignant deux nombres inférieurs à l'unité, on aura, en écrivant y_0 au lieu de $F(x_0)$,

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \theta(X - x_0), y_0 + \Theta[F(X) - F(x_0)\}.$$

Cette équation, sans donner la valeur exacte de la quantité inconnue F(X), fournit le moyen de substituer aux limites y_0, $y_0 \pm Aa$, d'autres limites souvent très-rapprochées entre lesquelles cette quantité se trouve comprise. Admettons, par exemple, que la fonction $F(x)$

étant assujettie, 1° à vérifier l'équation différentielle

$$dy = \cos\frac{x+y}{5}dx;$$

2° à s'évanouir avec x; on demande la valeur de $F(x)$ correspondante à $x = 1$: on aura

$$F(1) = \cos\left[\frac{\theta + \Theta F(1)}{5}\right].$$

Les nombres θ et Θ devant rester compris entre les limites 0 et 1, on reconnaîtra facilement que la valeur de $F(1)$ est positive, qu'elle diminue tandis que l'on fait croître les nombres θ et Θ, enfin qu'elle est comprise entre les valeurs de Y fournies par les équations

$$Y = \cos 0, \quad Y = \cos\left(\frac{1+Y}{5}\right).$$

La première de ces équations donne immédiatement

$$F(1) = 1;$$

quant à la seconde, on la résoudra facilement, et l'on trouvera

$$Y = 0,926.$$

La demi-somme de ces quantités, savoir 0,963..., est donc, à moins d'un dixième, la valeur cherchée de l'inconnue $F(1)$.

Si dans le calcul de $F(X)$ on veut augmenter le degré de l'approximation, il suffira de substituer à l'équation

$$F(X)-y_0=(X-x_0)f\{x_0+\theta(X-x_0),\, y_0+\Theta[F(X)-F(x_0)]\}$$

un système d'équations de même forme. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

Si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, $n-1$ valeurs différentes comprises entre les limites x_0, X, on tirera

successivement de l'équation $dF(x) = f[x, F(x)]dx$,

$$\ldots - y_0 = (x_1 - x_0) f\{x_0 + \theta_0(x_1 - x_0),\ y_0 + \Theta_0[F(x_1) - y_0]\},$$

$$\ldots - F(x_1) = (x_2 - x_1) f\{x_1 + \theta_1(x_2 - x_1),\ F(x_1) + \Theta_1[F(x_2) - F(x_1)]\};$$

. . . .

$$\ldots - F(x_{n-1}) = (X - x_{n-1}) f\{x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1}), F(x_{n-1}) + \Theta_{n-1}[F(X) - F(x_{n-1})]\}.$$

En raisonnant sur la première de ces équations comme on l'a fait sur l'équation

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \theta(X - x_0),\ y_0 + \Theta[F(X) - F(x_0)]\},$$

on obtiendra facilement deux limites entre lesquelles sera renfermée la quantité $F(x_1)$; ces limites obtenues, on tirera de la seconde des équations, de nouvelles limites qui comprendront entre elles la quantité $F(x_2)$, et, continuant de la même manière, on finira par déduire de la dernière équation deux limites de la quantité cherchée $F(X)$.

Si l'on applique cette méthode générale à l'exemple déjà cité, et que l'on partage la différence $X - x_0 = 1$ en cinq éléments dont chacun soit égal à 0,2, on aura

$$F(0{,}2) = 0{,}2.\cos\left[\frac{0{,}2\theta_0 + \Theta_0 F(0{,}2)}{5}\right],$$

$$F(0{,}4) - F(0{,}2) = 0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}2 + F(0{,}2) + 0{,}2\theta_1 + \Theta_1[F(0{,}4) - F(0{,}2)]}{5}\right\},$$

$$F(0{,}6) - F(0{,}4) = 0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}4 + F(0{,}4) + 0{,}2\theta_2 + \Theta_2[F(0{,}6) - F(0{,}4)]}{5}\right\},$$

$$F(0{,}8) - F(0{,}6) = 0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}6 + F(0{,}6) + 0{,}2\theta_3 + \Theta_3[F(0{,}8) - F(0{,}6)]}{5}\right\},$$

$$F(1) - F(0{,}8) = 0{,}2.\cos\left\{\frac{0{,}8 + F(0{,}8) + 0{,}2.\theta_4 + \Theta_4[F(1) - F(0{,}8)]}{5}\right\}.$$

Comme les nombres $\theta_1, \theta_2, \ldots, \Theta_1, \Theta_2, \ldots$, sont tous inférieurs à l'unité, on s'assurera facilement que les valeurs des quantités $F(0{,}2)$, $F(0{,}4)$, $F(0{,}6)$, $F(0{,}8)$, $F(1)$,

fournies par les équations qui précèdent sont renfermées entre les valeurs de y_1, y_2, y_3, y_4, Y, données par les deux systèmes d'équations

$$y_1 = 0{,}2.\cos(0{,}2), \qquad y_1 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}2 + y_1}{5}\right),$$
$$y_2 - y_1 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}2 + y_1}{5}\right), \quad y_2 - y_1 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}4 + y_2}{5}\right),$$
$$y_3 - y_2 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}4 + y_2}{5}\right), \quad y_3 - y_2 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}6 + y_3}{5}\right),$$
$$y_4 - y_3 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}6 + y_3}{5}\right), \quad y_4 - y_3 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}8 + y_4}{5}\right),$$
$$Y - y_4 = 0{,}2.\cos\left(\frac{0{,}8 + y_4}{5}\right), \quad Y - y_4 = 0{,}2.\cos\left(\frac{1 + Y}{5}\right).$$

On tirera successivement du premier système

$$y_1 = 0{,}2, \quad y_2 = 0{,}39936, \quad y_3 = 0{,}59681,$$
$$y_4 = 0{,}79110, \quad Y = 0{,}98106;$$

du second

$$y_1 = 0{,}19936, \quad y_2 = 0{,}39682, \quad y_3 = 0{,}59117,$$
$$y_4 = 0{,}78125, \quad Y = 0{,}96598.$$

Si l'on prend la demi-somme des nombres 0,98106 *et* 0,96598, savoir 0,9735 pour valeur de l'inconnue F(1), l'erreur commise sera inférieure à la demi-différence

$$\frac{0{,}98106 - 0{,}96598}{2} = 0{,}008.$$

174. Reprenons encore l'équation

$$dy = f(x, y)\,dx,$$

et supposons que la fonction $f(x, y)$ croisse ou décroisse constamment, tandis qu'en attribuant à x une valeur fixe comprise entre les limites x_0, X, on fait varier y depuis $y = y_0$ jusqu'à $y = y_0 + Aa$.

Désignons d'ailleurs par $F(x, y) + C$ la valeur de l'intégrale indéfinie $\int f(x, y)\, dx$, dans laquelle la variable y est considérée comme constante : observons enfin que, dans le cas où trois fonctions de x représentées par u, v, w, vérifieront les conditions $v > u$ et $v < w$ pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = X$; la seconde des trois intégrales $\int u dx$, $\int v dx$, $\int w dx$ obtient une valeur moyenne entre celles de la première et de la troisième. Comme entre les limites dont il s'agit, la fonction $f[x, F(x)]$ reste constamment inférieure à l'une des expressions

$$f[x, F(X)], \quad f'[x, F(x_0)],$$

et constamment supérieure à l'autre, l'intégrale

$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(x) dx$$

aura une valeur moyenne entre celles des expressions

$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(X)]\, dx = F[X, F(X)] - F[x_0, F(X)],$$
$$\int_{x_0}^{X} f[x, F(x_0)]\, dx = F[X, F(x_0)] - F[x_0, F(x_0)],$$

d'où il résulte qu'elle pourra être représentée par une autre expression de la forme

$$\int_{x_0}^{X} f\{x, F(x_0) + \theta[F(X) - F(x_0)]\}\, dx$$
$$= F\{X, F(x_0) + \theta[F(X) - F(x_0)]\} - F\{x_0, F(x_0) + \Theta[F(X) - F(x_0)]\}.$$

Donc, l'équation

$$F(X) - y_0 = (X - x_0) f\{x_0 + \theta(X - x_0), \quad y_0 + \Theta[F(X) - y_0]\}$$

pourra être remplacée par la suivante

$$(a)\quad \begin{cases} F(X)-F(x_0)=F\{X,\ F(x_0)+\Theta[F(X)-F(x_0)]\} \\ \qquad\qquad -F\{x_0,\ F(x_0)+\Theta[F(X)-F(x_0)]\}; \end{cases}$$

on trouverait de même

$$(b)\begin{cases} F(x_1)-F(x_0)=F\{x_1,\ F(x_0)+\Theta_1[F(x_1)-F(x_0)]\} \\ \qquad\qquad -F\{x_0,\ F(x_0)+\Theta_1[F(x_1)-F(x_0)]\}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(X)-F(x_{n-1})=F\{X,\ F(x_{n-1})+\Theta_{n-1}[F(X)-F(x_{n-1})]\} \\ \qquad\qquad -F\{x_{n-1},\ F(x_{n-1})+\Theta_{n-1}[F(X)-F(x_{n-1})]\}. \end{cases}$$

à l'aide de ces équations on déterminera des limites souvent très-rapprochées entre lesquelles la valeur de $F(X)$ se trouvera comprise. Concevons, pour fixer les idées, que l'on considère de nouveau l'équation

$$dy = \cos\left(\frac{x+y}{5}\right)dx;$$

on aura, dans ce cas,

$$f(x,y) = \cos\left(\frac{x+y}{5}\right),$$
$$\int\cos\left(\frac{x+y}{5}\right)dx = 5\sin\left(\frac{x+y}{5}\right)+C;$$

on pourra prendre en conséquence

$$F(x,y) = 5\sin\left(\frac{x+y}{5}\right),$$

et l'on aura, en vertu de l'équation (a),

$$F(1) = 5\sin\frac{1+\Theta F(1)}{5} - 5\sin\frac{\Theta F(1)}{5},$$

ou, ce qui revient au même,

$$F(1) = 10\sin\tfrac{1}{10}\cos\frac{1+2\Theta F(1)}{10}.$$

Or, le nombre Θ devant toujours rester inférieur à l'unité, on reconnaîtra facilement que la valeur de $F(1)$, déterminée par l'équation qui précède, diminue à mesure que ce nombre augmente et demeure comprise entre les valeurs de Y fournies par les équations

$$Y = 10\sin\tfrac{1}{10}, \quad Y = \sin\tfrac{1}{10}\cos\left(\frac{1+2Y}{10}\right),$$

c'est-à-dire entre les quantités 0,9984,..., et 0,9564,... Si l'on prend la demi-somme de ces deux quantités, savoir 0,977 pour valeur de l'inconnue $F(1)$, l'erreur commise sera inférieure à la demi-différence

$$\frac{0{,}998 - 0{,}956}{2} = 0{,}021.$$

Si, au lieu de calculer directement $F(X)$ ou $F(1)$ par une seule équation, on voulait passer par les valeurs intermédiaires $F(0,2)$, $F(0,4)$,....., on aurait tiré des équations (*b*)

$$F(0{,}2) = 10\sin(0{,}02)\cos\left[\frac{0{,}2 + 2\Theta_0 F(0{,}2)}{10}\right],$$

$$F(0{,}4) - F(0{,}2) = 10\sin(0{,}02)\cos\left\{\frac{0{,}6 + 2F(0{,}2) + 2\Theta_1[F(0{,}4) - F(0{,}2)]}{10}\right\},$$

$$F(0{,}6) - F(0{,}4) = 10\sin(0{,}02)\cos\left\{\frac{1 + 2F(0{,}4) + 2\Theta_2[F(0{,}6) - F(0{,}4)]}{10}\right\},$$

$$F(0{,}8) - F(0{,}6) = 10\sin(0{,}02)\cos\left\{\frac{1{,}4 + 2F(0{,}6) + 2\Theta_3[F(0{,}8) - F(0{,}4)]}{10}\right\},$$

$$F(1) - F(0{,}8) = 10\sin(0{,}02)\cos\left\{\frac{1{,}8 + 2F(0{,}8) + 2\Theta_4[F(1) - F(0{,}8)]}{10}\right\}.$$

On s'assurera facilement que les valeurs de

$$F(0{,}2),\ F(0{,}4),\ F(0{,}6),\ F(0{,}8),\ F(1),$$

déterminées par ces équations, croissent tandis que les

nombres Θ_0, Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, diminuent et se trouvent, par suite, compris entre les valeurs de y_1, y_2, y_3, y_4, Y, fournies par les deux systèmes d'équations

$$\begin{array}{ll}
y_1 = 10\sin(0,02)\cos 0,02), & y_1 = 10\sin(0,02)\cos(0,02 + \ldots \\
y_2 - y_1 = 10\sin(0,02)\cos(0,06 + 0,2y_1), & y_2 - y_1 = 10\sin(0,02)\cos(0,06 - \ldots \\
y_3 - y_2 = 10\sin(0,02)\cos(0,10 + 0,2y_2), & y_3 - y_2 = 10\sin(0,02)\cos(0,10 - \ldots \\
y_4 - y_3 = 10\sin(0,02)\cos(0,14 + 0,2y_3), & y_4 - y_3 = 10\sin(0,02)\cos(0,14 + \ldots \\
Y - y_4 = 10\sin(0,02)\cos(0,18 + 0,2y_4), & Y - y_4 = 10\sin(0,02)\cos(0,18 - \ldots
\end{array}$$

Le premier système donne

$$y_1 = 0,19994,\ldots,\quad y_2 = 0,39892,\ldots,\quad y_3 = 0,59568,\ldots,$$
$$y_4 = 0,78899,\ldots,\quad Y = 0,97765,\ldots;$$

le second

$$y_1 = 0,19962,\ldots,\quad y_2 = 0,39766,\ldots,\quad y_3 = 0,59289,\ldots,$$
$$y_4 = 0,78413,\ldots,\quad Y = 0,97029,\ldots,$$

et en prenant la demi-somme des valeurs de Y, on obtiendra, pour valeur approchée de F(1), le nombre 0,9739,..., avec la certitude que l'erreur ne surpassera pas la demi-différence

$$\frac{0,97765 - 0,97029}{2} = 0,0036.$$

L'emploi des nouvelles formules a notablement diminué les limites des erreurs commises. En effet, cette limite, qui était d'abord $\frac{1}{11}$, a été successivement réduite à 0,008, 0,0036...

Pour montrer une nouvelle application des dernières formules, considérons l'équation différentielle

$$dy = (x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})\,dx,$$

et supposons que, l'inconnue $y = F(x)$ étant assujettie à s'évanouir avec x, on demande la valeur de y corres-

pondante à $x = 1$. Comme la fonction dérivée

$$F'(x) = \frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} + [F(x)]^{\frac{1}{2}}$$

sera positive tant qu'elle conservera une valeur réelle, on peut assurer que la fonction $F(x)$ sera toujours croissante avec x. De plus, il est clair que si l'on fait croître y sans faire varier x, la fonction $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}$ croîtra elle-même. Cela posé, l'équation (a) donnera

$$F(1) = \tfrac{2}{3} + [\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left\{[\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\Theta\right\}^2 = \tfrac{2}{3}\Theta + \tfrac{1}{4}\Theta^2;$$

puis, en extrayant les racines positives des deux membres, et observant que la quantité $\sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2}{3}\Theta}$, supérieure à $\frac{1}{2}\Theta$, ne peut devenir égale à $\frac{1}{2}\Theta - [\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}}$, on trouvera

$$[\Theta F(1)]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\Theta = \sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2}{3}\Theta}, \quad F(1) = \frac{\Theta}{2} + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{\Theta^2}{4} + \frac{2\Theta}{3}}.$$

Or, le nombre Θ devant être compris entre les limites 0 et 1, la valeur de $F(1)$ déduite de l'équation qui précède, restera elle-même comprise entre les limites correspondantes

$$\frac{2}{3} = 0{,}666 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}} = \frac{7}{6} + \sqrt{\frac{11}{12}} = 2{,}1240\ldots$$

Pour resserrer les limites de $F(1)$, il suffira de substituer les équations (b) à l'équation (a). Si, pour fixer les idées, on partage la différence $X - x_0 = 1$ en 10 éléments dont chacun soit égal à 0,1, on tirera des équations (b) les valeurs des quantités

$$F(0{,}1),\quad F(0{,}2),\quad F(0{,}3),\ldots,\quad F(0{,}9),\quad F(1),$$

et l'on reconnaîtra facilement qu'elles sont comprises entre les valeurs de y_1, $y_2, \ldots$, y_9, Y, fournies par les deux systèmes

$$y_1 = \tfrac{2}{3}(0,1)^{\frac{3}{2}}, \quad y_2 - y_1 = \tfrac{2}{3}\left[(0,2)^{\frac{3}{2}} - (0,1)^{\frac{3}{2}}\right] + 0,1\sqrt{y_1}, \ldots,$$

$$Y - y_9 = \tfrac{2}{3}\left[1 - (0,9)^{\frac{3}{2}}\right] + 0,1\sqrt{y_9},$$

$$y_1 = 0,005 + \tfrac{2}{3}\left[(0,1)^{\frac{3}{2}}\right] + 0,1\sqrt{0,0025 + \tfrac{2}{3}(0,1)},$$

$$y_2 - y_1 = 0,005 + \tfrac{2}{3}\left[(0,2)^{\frac{3}{2}} - (0,1)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$+ 0,1\sqrt{0,0025 + y_1 + \tfrac{2}{3}\left[(0,2)^{\frac{3}{2}} - (0,1)^{\frac{3}{2}}\right]},$$

. . . .

$$Y - y_9 = 0,005 + \tfrac{2}{3}\left[1 - (0,9)^{\frac{3}{2}}\right]$$
$$+ 0,1\sqrt{0,0025 + y_3 + \tfrac{2}{3}\left[1 - (0,9)^{\frac{3}{2}}\right]},$$

ou, ce qui revient au même, entre les valeurs

$y_1 = 0,02108$, $y_2 = 0,07413$, $y_3 = 0,15127$, $y_4 = 0,14297$,
$y_5 = 0,36624$, $y_6 = 0,50089$, $y_7 = 0,65226$, $y_8 = 0,80961$,
$y_9 = 0,99175$, $Y = 1,18879$,

et

$y_1 = 0,04143$, $y_2 = 0,17368$, $y_3 = 0,20935$, $y_4 = 0,32551$,
$y_5 = 0,46041$, $y_6 = 0,61275$, $y_7 = 0,78176$, $y_8 = 0,96667$,
$y_9 = 1,16688$, $Y = 1,37687$.

Si l'on prend pour valeur approchée de F(1) la demi-somme entre les valeurs précédentes de y, savoir, 1,28..., l'erreur commise sera inférieure à la demi-différence 0,09. Ainsi l'emploi des équations (b) avec la division de la différence $X - x_0$ en dix éléments a suffi pour déterminer, à moins d'un dixième près, l'une des intégrales particulières de l'équation

$$dy = \left(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}\right)dx,$$

dont l'intégrale générale en termes finis ne peut se déduire d'aucune des méthodes connues.

VINGT-NEUVIÈME LEÇON.

Revue de toutes les intégrales particulières ou singulières qui peuvent appartenir à une équation différentielle du premier ordre. — Propriétés de quelques-unes de ces intégrales.

---

176. Toutes les fois que les deux fonctions $f(x, y)$ et $\chi(x, y) = D_y f(x, y)$ restent finies et continues dans le voisinage des valeurs particulières $x = x_0$, $y = y_0$, les méthodes exposées dans les précédentes leçons fournissent une valeur de y en x, savoir, $y = F(x)$, laquelle étant fonction continue de x, au moins entre certaines limites, l'une inférieure, l'autre supérieure à x_0, satisfait à la double condition de vérifier l'équation différentielle $dy = f(x, y)dx$, et de se réduire à y_0 pour $x = x_0$. Cette valeur de y est une intégrale particulière de l'équation proposée et elle est de plus, dans l'hypothèse admise, la seule fonction continue de x qui puisse remplir à la fois les deux conditions énoncées. Effectivement, si une autre fonction $F(x) + \varphi(x)$ jouissait des mêmes propriétés, on aurait non-seulement

$$F'(x) = f[x, F(x)], \quad F(x_0) = y_0,$$

mais encore $F(x_0) + \varphi(x_0) = y_0$, $\varphi(x_0) = 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) + \varphi'(x) &= f[x, F(x) + \varphi(x)] \\ &= f[x, F(x)] + \varphi(x)\chi[x, F(x) + \theta\varphi(x)], \end{aligned}$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité, et par suite

$$1 = \frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} \chi[x, F(x) + \theta\varphi(x)], \quad \varphi(x_0) = 0.$$

D'ailleurs, si après avoir posé $x = x_0 + i$ on attribue à la quantité i une valeur infiniment petite, ou, ce qui revient au même, si l'on fait converger x vers la limite x_0, la fraction $\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\varphi(x_0 + i)}{\varphi'(x_0 + i)}$ finira par obtenir, comme son numérateur, des valeurs sensiblement nulles, tandis que la fonction $\chi[x, F(x) + \theta\varphi(x)]$ convergera vers la limite $\chi(x_0, y_0)$; on aurait donc

$$1 = 0 \times \chi(x_0, y_0),$$

ou

$$\chi(x_0, y_0) = \infty,$$

ce qui ne saurait s'accorder avec l'hypothèse admise.

177. On peut cependant, même dans cette hypothèse, concevoir diverses fonctions de x qui, étant également propres à remplir les conditions énoncées, coïncident dans le voisinage de la valeur particulière $x = x_0$, et divergent pour certaines valeurs de x sensiblement différentes de x_0. Il peut même arriver que plusieurs de ces fonctions restent continues pour toutes les valeurs de x. Ainsi, par exemple, si l'on assujettit la variable y, 1° à vérifier l'équation différentielle $(x+1)dy-(y+1)dx=0$; 2° à s'évanouir avec x, les deux fonctions continues

$$y = x, \quad y = \tfrac{1}{2}\left[x - 1 + \sqrt{(x+1)^2}\right]$$

satisferont l'une et l'autre aux conditions prescrites. Comme le radical $\sqrt{(x+1)^2}$ est censé représenter, dans tous les cas, une quantité positive, il est clair que la seconde valeur de y coïncide avec la première tant que l'on

suppose $x+1$ positif, et se réduit à $y=-1$ dans le cas où $x+1$ devient négatif.

Lorsqu'on permet à la variable y, considérée comme fonction de x, de varier d'une manière brusque pour certaines valeurs de x, il devient facile de la faire coïncider successivement avec plusieurs intégrales particulières. Soient en effet

$$y=F_0(x),\quad y=F_1(x),\ldots,\quad y=F_m(x),$$

plusieurs intégrales de cette espèce. Si l'on veut que y coïncide avec la première de ces intégrales, depuis $x=-\infty$ jusqu'à $x=x_1$; avec la seconde depuis $x=x_1$ jusqu'à $x=x_2,\ldots$; enfin avec la dernière, depuis $x=x_m$ jusqu'à $x=+\infty$, il suffira de supposer

$$y=\frac{F_0(x)+F_m(x)}{2}+\frac{F_1(x)-F(x_0)}{2}\,\frac{x-x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}}+\ldots$$
$$+\frac{F_m(x)-F_{m-1}(x)}{2}\,\frac{x-x_m}{\sqrt{(x-x_m)^2}}.$$

On pourrait admettre que les fonctions $F_0(x)$, $F_1(x)$,... représentent, les unes des intégrales particulières, les autres des intégrales singulières de l'équation

$$dy=f(x,\ y)dx,$$

auquel cas la valeur précédente de y coïnciderait successivement avec des intégrales de ces deux espèces. Ainsi, par exemple, étant proposée l'équation différentielle

$$dy=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx,$$

on reconnaîtra sans peine que la fonction

$$y=\tfrac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2}\right)$$

coïncide, pour toutes les valeurs positives de x, avec

l'intégrale particulière $y = x$, et pour toutes les valeurs négatives de x avec l'intégrale singulière $y = 0$.

Dans le cas où les fonctions $F_0(x)$, $F_1(x)$,... représentent des intégrales particulières, la fonction

$$y = \frac{F_0(x) + F_m(x)}{2} + \frac{F_1(x) - F_0(x)}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}} + \ldots$$

doit être censée comprise dans l'intégrale générale de laquelle on la déduit, en attribuant à la constante arbitraire une valeur plus étendue. Soient en effet

$$y = F(x, C)$$

l'intégrale générale de l'équation $dy = f(x, y)dx$, et C_0, C_1, C_2, ..., C_m les valeurs particulières de la constante arbitraire C qui font coïncider cette intégrale générale avec les formules $y = F_0(x)$, $y = F_1(x)$, ... Pour réduire l'équation $y = F(x, C)$ à la formule

$$y = \frac{F_1(x) + F_m(x)}{2} + \frac{F_1(x) - F_0(x)}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}} + \ldots,$$

il suffira de prendre

$$C = \frac{C_0 + C_m}{2} + \frac{C_1 - C_0}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x-x_1)^2}} \ldots + \frac{C_m - C_{m-1}}{2} \frac{x - x_m}{\sqrt{(x-x_m)^2}}.$$

178. Soit maintenant $y = F(x)$ une fonction quelconque de x propre à vérifier l'équation $dy = f(x, y)dx$. Si chacune des fonctions $f[x, F(x)]$, $\chi[x, F(x)]$ reste finie et continue pour toutes les valeurs possibles de x, ou du moins pour toutes les valeurs comprises entre certaines limites, on pourra prendre à volonté l'une de ces valeurs pour celle que nous avons représentée par x_0, et, en conséquence, $y = F(x)$ coïncidera, au moins pour des valeurs de x comprises entre certaines

limites, avec l'une des intégrales particulières que nous avons déjà considérées. Donc $y = F(x)$ ne pourrait être une intégrale singulière ou une intégrale particulière toujours distincte de celles dont nous venons de parler que dans le cas où l'une des deux fonctions

$$F'(x) = f[x, F(x)], \quad \chi[x, F(x)]$$

cesserait d'être finie ou continue pour toutes les valeurs possibles de la variable x. Or cette condition ne peut être remplie que dans le cas où ces fonctions deviennent constamment infinies ou indéterminées; et comme la fonction $F'(x) = f[x, F(x)]$ ne saurait être constamment infinie sans qu'il en fût de même de $F(x)$, nous devons conclure que si l'intégrale $y = F(x)$ est toujours distincte de celles que l'on a considérées dans les dernières leçons, et si l'on n'a pas $F(x) = \pm \infty$, quel que soit x, la fonction $F(x)$ vérifiera, pour toutes les valeurs de x, l'une des conditions

$$f(x, y) = \frac{0}{0}, \quad \chi[x, F(x)] = \frac{0}{0}, \quad \chi[x, F(x)] = \frac{1}{0};$$

en d'autres termes, l'intégrale $y = F(x)$ vérifiera l'une des équations

$$f(x, y) = \frac{0}{0}, \quad \chi(x, y) = \frac{0}{0}, \quad \frac{1}{\chi(x, y)} = 0.$$

Si l'intégrale $F(x)$ ne devait demeurer entièrement distincte de toutes celles que nous avons considérées dans les dernières leçons qu'autant que la valeur de x resterait comprise entre certaines limites, on pourrait encore affirmer que cette intégrale vérifie l'une de ces trois équations, mais seulement pour des valeurs de x_0 renfermées entre les limites dont il s'agit.

Si l'on applique ces principes généraux aux deux

équations différentielles

$$dy = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dy, \quad dy = y\,\mathrm{l}y\,dx,$$

on trouvera successivement

$$f(x,\ y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \chi(x,\ y) = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\,y^{\frac{1}{2}}},$$
$$f(x,\ y) = y\,\mathrm{l}y, \quad \chi(x,\ y) = 1 + \mathrm{l}y.$$

Les quatre fonctions qui précèdent ne deviennent indéterminées pour aucune valeur de la variable y considérée comme une fonction de x, mais la seconde et la quatrième deviennent infinies, et par conséquent l'équation $\frac{1}{\chi(x,\ y)} = 0$ se trouve vérifiée quand on attribue à cette variable la valeur $y = 0$, laquelle est une intégrale singulière de l'équation $dy = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx$, et une intégrale particulière de l'équation $dx = y\,\mathrm{l}y\,dx$. Supposons encore

$$dy = \frac{y^2 dx}{\sin\frac{1}{y}};$$

dans cette hypothèse, les équations de condition deviendront

$$\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}} = \frac{0}{0}, \quad \frac{2y\sin\frac{1}{y} + \cos\frac{1}{y}}{\sin^2\frac{1}{y}} = \frac{0}{0}, \quad \frac{\sin^2\frac{1}{y}}{2y\sin\frac{1}{y} + \cos\frac{1}{y}} = 0.$$

Les deux premières ne peuvent être vérifiées qu'autant que l'on aura $\frac{1}{y} = \pm\infty$, $y = 0$. D'ailleurs, si l'on pose

$$y = \pm \frac{1}{n\pi + \frac{c}{n^2\pi^2}},$$

n désignant un nombre entier quelconque et c une constante indéterminée, on aura, à très-peu près, pour des valeurs considérables de n,

$$\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}} = \frac{1}{n^2\pi^2 \sin\frac{c}{n^2\pi^2}} = \frac{1}{c};$$

donc la valeur de y correspondante à $n = \infty$, savoir, $y = 0$, produira effectivement une valeur indéterminée $\frac{1}{c}$ du rapport $\frac{y^2}{\sin\frac{1}{y}}$. Il serait également facile de prouver que cette valeur $y = 0$ vérifie la formule

$$\frac{2y\sin\frac{1}{y} + \cos\frac{1}{y}}{\sin^2\frac{1}{y}} = \frac{0}{0}.$$

Ajoutons qu'elle satisfait, comme intégrale particulière, à l'équation $dy = \frac{y^2\,dx}{\sin\frac{1}{y}}$, qui a pour intégrale générale

$$x + C = \cos\frac{1}{y}, \quad \text{ou} \quad y = \frac{\pm 1}{2n\pi \pm \operatorname{arc}\cos(x - C)},$$

n désignant un nombre entier quelconque.

Quant à la formule $\frac{\sin^2\frac{1}{y}}{2y\sin\frac{1}{y} + \cos\frac{1}{y}} = 0$, on en tirera

$$\sin\frac{1}{y} = 0, \quad \frac{1}{y} = \pm n\pi, \quad y = \pm\frac{1}{n\pi}.$$

Les valeurs de y fournies par cette dernière équation seront des intégrales singulières de l'équation $dy = \frac{y^2\,dx}{\sin\frac{1}{y}}$.

On doit seulement excepter la valeur $y=0$, qui correspond à $n=\infty$.

Si l'on avait considéré l'équation $dy = \dfrac{y^2 dx}{y^2 \sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}}$, la formule $f(x, y) = \frac{0}{0}$ serait devenue

$$\frac{y^2}{y^2 \sin\frac{1}{y} - \cos\frac{1}{y}} = \frac{0}{0}.$$

On y satisfait encore par la valeur $y = 0$ considérée comme limite d'une valeur de la forme

$$y = \frac{\pm 1}{(n+\frac{1}{2})\pi + \frac{c}{n^2\pi^2}};$$

mais, dans le cas présent, la valeur $y = 0$ est une intégrale singulière de l'équation différentielle proposée, qui a pour intégrale générale $y \sin\frac{1}{y} = x + C$.

179. Quoique bien différente des intégrales particulières que nous avons considérées dans les précédentes leçons, la formule $y = 0$ peut se déduire de la méthode fondée sur l'emploi des équations

$$y_1 - y_0 = (x_1 - x_0) f(x_0, y_0) \ldots \text{ etc.}$$

En effet, si l'on suppose généralement que $f(x, y)$ s'évanouisse quel que soit x pour une valeur nulle de y, on tirera de ces équations, en prenant $y_0 = 0$,

$$y_1 = y_0 = 0, \quad y_2 = y_1 = 0, \quad Y = y_{n-1} = 0,$$

puis, en écrivant y au lieu de Y, on obtiendra l'intégrale cherchée $y = 0$. Ajoutons que cette intégrale se trouve comprise dans la formule $y = \frac{0}{0}$, à laquelle on parvient en opérant toujours de la même manière dans

le cas où une valeur nulle de y rend indéterminée la fonction $f(x, y)$.

Il est essentiel d'observer que la fonction représentée par $\chi(x, y)$ est précisément ce que devient le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dy}$ quand on y considère y' comme une fonction de x et de y déterminée par la formule

$$y' = f(x, y).$$

De cette observation, jointe à ce qui précède, on conclut le fait énoncé par d'autres géomètres, que l'un des caractères des fonctions singulières était de rendre infini ou indéterminé le coefficient différentiel $\frac{dy'}{dy}$.

Remarquons enfin que, dans le cas où l'équation

$$dy = f(x, y)\,dx$$

a pour intégrale singulière la formule $y = 0$, et pour intégrale particulière une autre valeur de y qui s'évanouit avec $x - x_0$, sans être constamment nulle, on peut déduire ces deux valeurs de y des équations

$$\begin{aligned} y_1 - y_0 &= (x_1 - x_0) f(x_0, y_0), \\ y_2 - y_1 &= (x_2 - x_1) f(x_1, y_1), \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

savoir, la première valeur en prenant pour y_0 une quantité rigoureusement nulle, et la seconde valeur en prenant pour y_0 une quantité infiniment petite.

180. Si l'on proposait d'intégrer, non plus l'équation

$$dy = f(x, y)\,dx,$$

mais la suivante $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$, il suffirait, pour obtenir la fonction $\chi(x, y)$, de tirer la valeur de y' en x de l'équation $f(x, y, y') = 0$. D'ailleurs, si l'on désigne

par

$$\Phi(x, y, y'), \quad X(x, y, y'), \quad \Psi(x, y, y')$$

les trois dérivées partielles de $f(x, y, y')$ par rapport aux trois variables x, y, y', les valeurs de y' et de $\frac{dy'}{dx}$, tirées de l'équation $f(x, y, y') = 0$, vérifieraient évidemment l'équation

$$X(x, y, y') + \Psi(x, y, y')\frac{dy'}{dy} = 0,$$

ou $\frac{dy}{dy'} = -\frac{X(x, y, y')}{\Psi(x, y, y')}$. Par conséquent, si l'on passe de l'équation $dy = f(x, y)dx$ à l'équation

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

les formules

$$\chi(x, y) = \frac{0}{0}, \quad \frac{1}{\chi(x, y)} = 0,$$

devront être remplacées par les suivantes

$$\frac{\Psi(x, y, y')}{X(x, y, y')} = \frac{0}{0}, \quad \frac{\Psi(x, y, y')}{X(x, y, y')} = 0,$$

dans lesquelles il faudra considérer y' comme une fonction des variables x et y déterminée par l'équation

$$f(x, y, y') = 0.$$

Concevons, pour fixer les idées, que cette dernière équation se réduise à $y = xy' + f(y')$, on aura

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{x + f'(y)};$$

la condition $\frac{dy'}{dy} = \infty$ deviendra

$$x + f'(y') = 0,$$

et l'élimination de y' entre cette équation et l'équation

$$xy' + f(y') = y$$

donnera les intégrales singulières de l'équation proposée.

181. D'après ce que nous venons de dire, pour obtenir les intégrales singulières de l'équation différentielle

$$dy = f(x, y)dx,$$

il suffit de chercher les valeurs de y en x qui auront la propriété de rendre l'une des fonctions $f(x, y)$, $\chi(x,y)$ indéterminée ou de vérifier la formule $\frac{1}{\chi(x, y)} = 0$, et qui satisferont en même temps à l'équation

$$dy = f(x, y)dx.$$

De plus, comme les valeurs de y en x qui rempliront cette double condition pourront être, ou des intégrales singulières, ou des intégrales particulières, il faudra trouver un moyen de distinguer ces deux espèces d'intégrales. Cette distinction ne présente aucune difficulté dans le cas où l'intégrale générale est connue; dans le cas contraire on peut l'effectuer à l'aide des propositions suivantes :

1[er] *Théorème.* Pour décider si une valeur $y = F(x)$ est une intégrale particulière ou singulière de l'équation

$$dy = f(x, y)dx,$$

il suffit d'examiner si $z = 0$ est une intégrale particulière ou singulière de l'équation

$$dz = \{f[x, F(x) + z] - f[x, F(x)]\}dx.$$

En effet, $y = F(x)$ devant, par hypothèse, vérifier l'équation $dy = f(x, y)dx$, on aura

$$d.F(x) = f[x, F(x)]dx.$$

Soit d'ailleurs $F(x, y) = C$ l'intégrale générale de l'équation donnée ; si l'on pose dans cette équation

$$y = F(x) + z,$$

et si l'on a égard à la formule

$$dF(x) = f[x, F(x)]dx,$$

on obtiendra l'équation

$$dz = \{f[x, F(x) + z] - f[x, F(x)]\} dx,$$

à laquelle on satisfait en prenant $z = 0$, et qui aura pour intégrale générale

$$F[x, F(x) + z] = C.$$

Or il est clair que $y = F(x)$ vérifiera l'équation

$$F(x, y) = C$$

lorsque $z = 0$ vérifiera l'équation

$$F[x, F(x) + z] = C;$$

c'est-à-dire lorsque la fonction $F[x, F(x) + z]$ se réduira d'elle-même à une quantité constante. En d'autres termes, $y = F(x)$ sera une intégrale particulière de l'équation (1) lorsque $z = 0$ sera une intégrale particulière de l'équation

$$dz = \{f[x, F(x) + z] - f[x, F(x)]\} dx,$$

et réciproquement. Donc, etc.

Corollaire. Comme il est indifférent de représenter la fonction inconnue de x propre à vérifier cette dernière équation par la lettre z ou par la lettre y, il résulte évidemment du théorème qui précède, que, pour déterminer la nature de l'intégrale $y = F(x)$ appartenant à une équation du premier ordre entre les variables x et y, il suffit de déterminer la nature de l'intégrale $y = 0$ appar-

tenant à une autre équation différentielle du premier ordre entre les mêmes variables. Ainsi, la question peut toujours être ramenée au cas où l'on aurait identiquement $F(x)=0$; ajoutons que, dans ce dernier cas, elle se résout immédiatement à l'aide des théorèmes que nous allons énoncer.

2[me] *Théorème.* Soient α et 6 deux quantités infiniment petites dont la seconde est tellement choisie que la fonction $f(x, y)$ conserve constamment le même signe entre les limites $y = \alpha$, $y = 6$, si la valeur $y = 0$ vérifie comme intégrale singulière l'équation

$$dy = f(x, y)dx,$$

l'intégrale définie $\int_\alpha^6 \frac{dy}{f(x, y)}$, prise par rapport à la seule variable y entre les limites dont il s'agit aura elle-même une valeur infiniment petite.

Démonstration. Représentons toujours par

$$F(x, y) = C$$

l'intégrale générale de l'équation $dy = f(x, y)dx$, et soient d'ailleurs $\Phi(x, y)$, $X(x, y)$ les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ par rapport aux deux variables x et y. De l'équation connue $\frac{\frac{du}{dx}}{M} = \frac{\frac{du}{dy}}{N}$, en y remplaçant u par $F(x, y)$, N par l'unité, et M par $-f(x, y)$, on tirera

$$X(x, y) = -\frac{\Phi(x, y)}{f(x, y)}.$$

Cette dernière formule étant identique, si l'on intègre ses deux membres par rapport à la variable y entre les limites $y = \alpha$, $y = 6$, on trouvera

$$F(x, 6) - F(x, \alpha) = -\int_\alpha^6 \Phi(x, y)\frac{dy}{f(x, y)};$$

si d'ailleurs on représente par θ un nombre inférieur à l'unité, on aura

$$\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \Phi(x,\ y)\frac{dy}{f(x,\ y)} = \Phi\left[x,\ \alpha + \theta(\mathcal{C} - \alpha)\right]\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \frac{dy}{f(x,\ y)},$$

et par suite

$$\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \frac{dy}{f(x,\ y)} = \frac{F(x,\ \alpha) - F(x,\ \mathcal{C})}{\Phi[x,\ \alpha + \theta(\mathcal{C} - \alpha)]}.$$

De plus, $y = 0$ étant, par hypothèse, une intégrale singulière de l'équation $dy = f(x,\ y)\,dx$, ne pourra vérifier l'équation $F(x,\ y) = C$; en d'autres termes, l'expression $F(x,\ 0)$ ne pourra obtenir une valeur finie et constante, ou bien une valeur constamment infinie. Donc $F(x,\ 0)$ devra être nécessairement une fonction finie de la variable x, et sa dérivée

$$\Psi(x,\ 0) = \frac{dF(0,\ x)}{dx}$$

se réduira elle-même à une fonction finie de x ou, tout au plus, si la fonction $F(x,\ 0)$ est linéaire, à une constante finie différente de zéro. Par suite, le rapport $\frac{F(x,\ \alpha) - F(x,\ \mathcal{C})}{\Phi[x,\ \alpha + \theta(\mathcal{C} - \alpha)]}$ s'évanouira pour $\mathcal{C} = \alpha = 0$; d'où l'on conclut, en admettant la continuité des fonctions $F(x,\ y)$, $\Phi(x,\ y)$ dans le voisinage de $y = 0$, que le rapport dont il s'agit et l'intégrale $\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \frac{dy}{f(x,\ y)}$ équivalent à ce rapport, obtiendront, en même temps que les quantités α, $\mathcal{C}$, des valeurs infiniment petites.

3[me] *Théorème*. Si, la formule $y = 0$ étant propre à vérifier l'équation $dy = f(x,\ y)\,dx$, l'intégrale $\int_{\alpha}^{\mathcal{C}} \frac{dy}{f(x,\ y)}$ obtient une valeur infiniment petite, $y = 0$ sera une intégrale singulière de l'équation différentielle proposée.

Démonstration. Supposons en effet que cette intégrale ait une valeur infiniment petite, l'intégrale définie $\int_\alpha^y \frac{dy}{f(x, y)}$, que l'on déduit de la première en substituant y à 6, ne pourra être qu'une fonction finie et déterminée des variables x et y, et l'on devra en dire autant de l'intégrale $\int_0^y \frac{dy}{f(x, y)}$, que l'on obtient en remplaçant la quantité infiniment petite α par sa limite, c'est-à-dire par zéro. Cela posé, soit

$$\int_0^y \frac{dy}{f(x, y)} = \mathrm{f}(x, y).$$

Désignons d'ailleurs par ξ une valeur particulière de x, et par $y = F(x, C)$ l'intégrale générale de l'équation $dy = f(x, y)\,dx$, on aura identiquement

$$d\mathrm{F}(x, C) = f[x, \mathrm{F}(x, C)]\,dx;$$

puis, à cause de $\int_0^y \frac{dy}{f(x, y)} = \mathrm{f}(x, y)$,

$$\int_0^y \frac{dy}{f(\xi, y)} = \mathrm{f}(\xi, y), \quad d\mathrm{f}(\xi, y) = \frac{dy}{f(\xi, y)},$$
$$d\mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x, C) = \frac{d\mathrm{F}(x, C)}{f[\xi, \mathrm{F}(x, C)]},$$

et par suite $d\mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = \frac{f[x, \mathrm{F}(x, C)]}{f[\xi, \mathrm{F}(x, C)]}dx$. On tirera de cette dernière, en désignant par h un accroissement arbitraire de x, et par θ un nombre inférieur à l'unité,

$$\mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x+h, C)] - \mathrm{f}[\xi, \mathrm{F}(x, C)] = h\frac{f[(x+\theta h, \mathrm{F}(x+\theta h, C)]}{f[\xi, \mathrm{F}(x+\theta h, C)]},$$

puis, en posant $\xi = x + \theta h$, on trouvera, quelles que soient les quantités x, h et C,

$$\mathrm{f}[x + \theta h,\ \mathrm{F}(x + \theta h,\ C)] - \mathrm{f}[x + \theta h,\ \mathrm{F}(x,\ C)] = h.$$

Il est maintenant facile de prouver que, dans l'hypothèse admise, $y = 0$ est une intégrale singulière; car, si l'on pouvait déduire cette intégrale de la formule $y = \mathrm{F}(x,\ C)$, en attribuant à la constante C une valeur particulière c, il suffirait de prendre $C = c$ pour réduire la dernière des équations qui précèdent à la suivante

$$h = \mathrm{f}(x + \theta h,\ 0) - \mathrm{f}(x + \theta h,\ 0) = 0;$$

et cette dernière ne pourrait évidemment subsister, la valeur de h devant rester arbitraire, qu'autant que son second membre, au lieu de se réduire à zéro, comme il arrive toujours quand $\mathrm{f}(x,\ y)$ désigne une fonction finie, se réduit à $\frac{0}{0}$, ce qui arrivera nécessairement si la fonction $\mathrm{f}(x,\ y) = \int_0^y \frac{dy}{f(x,\ y)}$ devenait indéterminée ou infinie. A la vérité, $y = 0$ ne vérifie l'équation $dy = f(x,\ y)dx$ que dans le cas où la fonction $f(x,\ 0)$ obtient une valeur nulle ou indéterminée; et comme alors le second membre de l'équation

$$\mathrm{f}[\xi,\ \mathrm{F}(x + h,\ C)] - \mathrm{f}[\xi,\ \mathrm{F}(x,\ C)] = h\frac{f[x + \theta h,\ \mathrm{F}(x + \theta h,\ C)]}{f[\xi,\ \mathrm{F}(x + \theta h,\ C)]}$$

se réduit à $\frac{0}{0}$, il semble, au premier abord, qu'on ne devrait pas étendre l'équation

$$\mathrm{f}[x + \theta h,\ \mathrm{F}(x + \theta h,\ C)] - \mathrm{f}[x + \theta h,\ \mathrm{F}(x,\ C)] = h$$

à une intégrale particulière de la forme

$$y = \mathrm{F}(x,\ c) = 0;$$

mais, pour s'assurer que cette extension est légitime, il suffit d'observer que cette équation subsistant pour toutes les valeurs de C différentes de c ne cessera pas d'être vraie tandis que C convergeant vers la limite c, la différence $C - c$ deviendra infiniment petite; d'où il est permis de conclure que cette équation subsistera encore quand la différence $C - c$ deviendra rigoureusement nulle.

182. Il suit des théorèmes 2me et 3me, que, pour décider si la valeur $y = 0$ vérifie comme intégrale singulière ou comme intégrale particulière l'équation

$$dy = f(x, y)dx,$$

il suffit d'examiner si la valeur de l'intégrale définie singulière $\int_\alpha^\mathcal{C} \frac{dy}{f(x, y)}$, x étant considérée comme une constante, est ou n'est pas une quantité infiniment petite; α et $\mathcal{C}$ sont d'ailleurs, comme on l'a déjà dit, deux valeurs de y infiniment petites telles que dans l'intervalle $\mathcal{C} - \alpha$, la fonction $f(x, y)$ ne change pas de signe.

Si l'on considère, par exemple, les équations différentielles $dy = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}dx$, $dy = y\,\mathrm{l}y\,dx$, déjà traitées dans la précédente leçon, on trouvera que l'intégrale $\int_\alpha^\mathcal{C} \frac{dy}{f(x, y)}$ se réduit, pour la première, à la quantité infiniment petite

$$\int_\alpha^\mathcal{C} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}dy = 2x^{\frac{1}{2}}(\mathcal{C}^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}}),$$

pour la seconde, à l'expression indéterminée

$$\int_\alpha^\mathcal{C} \frac{dy}{y\,\mathrm{l}y} = \mathrm{l}\frac{\mathrm{l}\,\mathcal{C}}{\mathrm{l}\,\alpha},$$

donc $y = 0$ est une intégrale singulière de la première de ces équations et une intégrale particulière de la seconde. C'est, au reste, ce que nous avons déjà reconnu à l'inspection des intégrales générales de ces équations différentielles.

Considérons maintenant une équation différentielle dont l'intégrale générale ne puisse être obtenue sous forme finie, par exemple

$$dy = (y + \sin y)(x + \operatorname{l} y)\,dx,$$

on aura

$$\int_\alpha^\mathrm{G} \frac{dy}{f(x,y)} = \int_\alpha^\mathrm{G} \frac{dy}{(x+\operatorname{l}y)(y+\sin y)} = \int_\alpha^\mathrm{G} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\operatorname{l}y}\right)\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)}\frac{dy}{y\operatorname{l}y}.$$

Pour que la fonction comprise sous le signe $\int$ ne change pas de signe entre les limites $y = \alpha$, $y = \mathrm{G}$ supposées infiniment petites, il est nécessaire et il suffit que ces limites soient deux quantités de même signe : supposons cette condition admise; on aura, en vertu d'une formule connue,

$$\int_\alpha^\mathrm{G} \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\operatorname{l}y}\right)\left(1+\frac{\sin y}{y}\right)}\frac{dy}{y\operatorname{l}y} = \frac{1}{\left(1+\frac{x}{\operatorname{l}\mathrm{y}}\right)\left(1+\frac{\sin \mathrm{y}}{\mathrm{y}}\right)}\int_\alpha^\mathrm{G} \frac{dy}{y\operatorname{l}y}$$

$$= \frac{\operatorname{l}\frac{\operatorname{l}\mathrm{G}}{\operatorname{l}\alpha}}{\left(1+\frac{x}{\operatorname{l}\mathrm{y}}\right)\left(1+\frac{\sin \mathrm{y}}{\mathrm{y}}\right)},$$

y désignant une valeur de y comprise entre les limites α et G, et par conséquent très-rapprochée de zéro. Or on a sensiblement

$$1+\frac{x}{\operatorname{l}\mathrm{y}} = 1+\frac{x}{\operatorname{l}0} = 1,\quad 1+\frac{\sin \mathrm{y}}{\mathrm{y}} = 1+1 = 2.$$

Donc l'intégrale définie se réduit, à très-peu près, à $\frac{1}{2}\,l\frac{l\beta}{l\alpha}$; cette dernière expression étant indéterminée pour des valeurs infiniment petites de α et de β, $y=0$ sera une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée.

En ayant égard au premier théorème et raisonnant sur l'équation $dz=\{f[x, F(x)+z]-f[x, F(x)]\}dx$, comme nous venons de le faire sur l'équation

$$dy = f(x, y)dx,$$

on établira immédiatement la proposition suivante.

4[me] *Théorème*. Pour décider si la formule $y=F(x)$ vérifie comme intégrale singulière ou particulière l'équation $dy=f(x, y)dx$, il suffit d'examiner si la valeur de l'intégrale définie singulière

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{f[x, F(x)+z]-f[x, F(x)]}$$

est ou n'est pas une quantité infiniment petite, x étant considéré comme une constante; α et β désignant deux limites infiniment petites de z entre lesquelles la fonction comprise sous le signe $\int$ ne change pas de signe.

Corollaire 1[er]. Il est clair que, dans ce théorème, on peut, sans inconvénient, substituer à l'intégrale ci-dessus l'intégrale équivalente $\int_{F(x)+\alpha}^{F(x)+\beta} \frac{dy}{f(x, y)-f[x, F(x)]}$.

Corollaire 2[me]. Le rapport $\frac{1}{f[x, F(x)+z]-f[x, F(x)]}$, pouvant être considéré comme le produit des deux facteurs

$$\frac{z}{f[x, F(x)+z]-f[x, F(x)]}, \quad \frac{1}{z},$$

et l'intégrale singulière $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dz}{z}$ étant équivalente à $l\frac{\beta}{\alpha}$,

l'intégrale ci-dessus peut être remplacée par l'expression

$$\frac{\zeta}{f[x,\ F(x)+\zeta)]-f[x,\ F(x)]}\,\mathrm{l}\frac{6}{\alpha},$$

ζ désignant une valeur infiniment petite de z comprise entre les limites α et 6. Or, la quantité $\mathrm{l}\frac{6}{\alpha}$ étant indéterminée pour des valeurs infiniment petites de α et de 6, cette expression ne pourra devenir infiniment petite qu'autant que le rapport $\frac{\zeta}{f[x,\ F(x)+\zeta]-f[x,\ F(x)]}$ deviendra lui-même, ou nul, ou indéterminé pour $\zeta=0$: d'ailleurs, comme ses deux termes s'évanouissent avec ζ, sa véritable valeur correspondante à $\zeta=0$ sera équivalente à celle de la fraction $\frac{1}{\chi[x,\ F(x)+\zeta]}$, c'est-à-dire à la quantité $\frac{1}{\chi[x,\ F(x)]}$. Donc, en vertu du 4[me] théorème $y=F(x)$ ne pourra satisfaire comme intégrale singulière à l'équation $dy=f(x,\ y)dx$, que dans le cas où l'expression $\frac{1}{\chi[x,\ F(x)]}$ sera nulle ou indéterminée, et par conséquent dans le cas où l'expression $y=F(x)$ vérifiera l'une des conditions

$$\chi(x,\ y)=\tfrac{0}{0},\quad \frac{1}{\chi(x,\ y)}=0.$$

Donc ces deux équations seront les seules qui puissent fournir des intégrales singulières de l'équation différentielle proposée, et dans la recherche de ces intégrales, il sera inutile d'avoir égard aux valeurs de y qui pourraient rendre indéterminée la seule fonction $f(x,\ y)$.

TRENTIÈME LEÇON.

Intégration des équations différentielles du premier ordre dans lesquelles la dérivée est élevée à des puissances entières ou fractionnaires, positives ou négatives. — Application à la recherche de l'équation d'une courbe lorsqu'on connaît la relation qui lie l'arc s aux coordonnées x, y.

---

183. Il arrive souvent que dans l'équation différentielle du premier ordre, les différentielles dx, dy ou la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ soient élevées à des puissances entières ou fractionnaires : dans le cas où tous les exposants sont entiers, la forme générale de l'équation est

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots F_{n-1}\frac{dy}{dx} + F_n = 0,$$

$F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}, F_n$ désignant des fonctions de x et de y. On parvient à l'intégrer dans quelques cas particuliers : supposons d'abord que cette équation puisse être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, et désignons par $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ses n racines, on pourra lui substituer les n équations différentielles du premier ordre

$$dy - f_1 dx = 0, \quad dy - f_2 dx = 0, \ldots, \quad dy - f_n dx = 0,$$

que l'on intégrera à l'aide des méthodes connues. L'équation différentielle proposée étant équivalente au

produit

$$\left(\frac{dy}{dx}-f_1\right)\left(\frac{dy}{dx}-f_2\right)\ldots\left(\frac{dy}{dx}-f_{n-1}\right)\left(\frac{dy}{dx}-f_n\right),$$

sera vérifiée par chacune des intégrales des n équations différentielles du premier degré. Cela posé, soient

$$\varphi_1(x,\ y,\ C_1),\quad \varphi_2(x,\ y,\ C_2),\ldots,\quad \varphi_n(x,\ y,\ C_n),$$

ces n intégrales, la formule

$$\varphi_1(x,\ y,\ C_1)\varphi_2(x,\ y,\ C_2)\ldots\varphi_n(x,\ y,\ C_n)=0,$$

renfermera toutes les solutions de l'équation donnée. On ne restreindra pas la généralité de cette intégrale en désignant toutes les constantes arbitraires par la même lettre C, ou en lui substituant la formule suivante

$$\varphi_1(x,\ y,\ C)\varphi_2(x,\ y,\ C)\ldots\varphi_n(x,\ y,\ C)=0,$$

puisqu'en égalant tour à tour chacun de ces derniers facteurs à 0, et donnant à C toutes les valeurs numériques possibles, on retrouvera nécessairement toutes les intégrales particulières que chaque facteur de l'intégrale générale est susceptible de fournir.

1er *Exemple* : $\frac{dy^2}{dx^2}-a^2=0,$

$$f_1=a,\quad f_2=-a,\quad \varphi_1(x,\ y,\ C_1)=y-ax+C_1,$$
$$\varphi_2(x,\ y,\ C_2)=y+ax+C_2.$$

L'intégrale générale sera

$$(y-ax+C_1)(y+ax+C_2)=0,$$

ou $$(y+C)^2-a^2x^2=0.$$

2me *Exemple* : $\frac{dy^2}{dx^2} - ax = 0$,

$$f_1 = \sqrt{ax}, \quad f_2 = -\sqrt{ax},$$

$$\varphi_1 = y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C_1, \quad \varphi_2 = y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C_2.$$

L'intégrale générale sera

$$(y - \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C_1)(y + \tfrac{2}{3}a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C_2) = 0,$$

ou

$$(y + C)^2 - \tfrac{4}{9}ax^3 = 0.$$

3me *Exemple* : $\frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = 1.$

En résolvant cette équation, on arrivera aux deux équations homogènes

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = 0,$$

qu'il est facile d'intégrer par les procédés connus.

184. Lorsque l'équation proposée ne peut pas être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$ et qu'elle peut l'être par rapport à y ou x, on retombe sur l'une des formes

$$y = \mathrm{F}(x, y'), \quad x = \mathrm{F}(y, y').$$

Dans l'un et l'autre cas, la différentiation conduira à une équation différentielle du premier ordre par rapport aux variables x, y', ou y, y'; en admettant qu'elle tombe dans la catégorie de celles qu'on sait intégrer, il suffira d'éliminer y' entre l'intégrale obtenue et la proposée pour avoir l'intégrale cherchée.

Donnons encore quelques exemples :

1°. $$y = xy' + x^n f(y');$$

différentiant

$$y'dx = y'dx + xdy' + nx^{n-1} f(y')dx + x^n df(y'),$$

ou $$xdy' + nf(y')x^{n-1}dx + x^n df(y') = 0;$$

posons $x^n f(y') = \varphi(y')$, d'où

$$xdy' = \left[\frac{\varphi(y')}{f(y')}\right]^{\frac{1}{n}} dy',$$

$$nf(y')x^{n-1}dx = \frac{f(y')d\varphi(y') - \varphi(y')df(y')}{f(y')},$$

$$x^n df(y') = \frac{\varphi(y')df(y')}{f(y')},$$

et par suite

$$\left[\frac{\varphi(y')}{f(y')}\right]^{\frac{1}{n}} dy' + d\varphi(y') = 0; \quad \frac{dy'}{[f(y')]^{\frac{1}{n}}} + \frac{d\varphi(y')}{[\varphi(y')]^{\frac{1}{n}}} = 0.$$

2°. $$y = xy' + ax^2y'^2 + bx^3y'^3 + \text{etc.},$$

en différentiant, on aura

$$xdy' + 2axy'^2dx + 2ax^2y'dy' + 3bx^2y'^3dx + 3bx^3y'^2dy' + \text{etc.} = 0,$$

et en posant $xy' = u$, $\quad x = \frac{u}{y'}$, $\quad dx = \frac{y'du - udy'}{y'^2}$,

$$\frac{dy'}{y'} + 2adu + 3budu + \text{etc.} = 0,$$

$$\mathrm{l}\, y' + 2au + \tfrac{3}{2}bu^2 + \ldots = C.$$

185. On intègre encore facilement l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n + F_1\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2} + \ldots F_{n-1}\frac{dy}{dx} + F_n = 0,$$

lorsqu'elle est homogène par rapport à x et à y. En faisant en effet alors $y = tx$, $xdt = zdx$, on aura

$$dy = tdx + xdt = (t + z)dx,$$

et l'équation proposée deviendra

$$(t+z)^n + T_1(t+z)^{n-1} + T_2(t+z)^{n-2} + \ldots T_{n-1}(t+z) + T_n = 0,$$

$T_1, T_2, \ldots, T_n$ désignant des fonctions de la seule variable t. Cette dernière équation donnera un certain nombre de valeurs z que l'on substituera dans l'équation du premier ordre $xdt = zdx$, ou $\frac{dx}{x} = \frac{dt}{z}$ pour en déduire par l'intégration l'expression de x en t, et par suite, à l'aide de l'équation $y = tx$ les diverses valeurs de y ou les diverses intégrales de l'équation proposée.

Exemple : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - \frac{x}{2y} = 0$;

ici $n = 3$, $T_1 = -\frac{1}{2}$, $T_2 = \frac{1}{t}$, $T_3 = -\frac{1}{2t}$, et l'on a

$$(t+z)^3 - \frac{1}{2}(t+z)^2 + \frac{1}{t}(t+z) - \frac{1}{2t} = 0,$$

ou $$[2(t+z) - 1]\frac{1 + t(t+z)^2}{2t} = 0,$$

d'où l'on tire $2(t+z) - 1 = 0$, $1 + t(t+z)^2 = 0$,

$$z = \frac{1}{2} - t, \quad z = -t \pm \left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{\frac{1}{2} - t}, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dt}{-t + \left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t + \left(-\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Il ne restera plus qu'à intégrer ces trois équations et à substituer $\frac{y}{x}$ à t pour obtenir trois intégrales de l'équa-

tion différentielle proposée. On pourrait aussi remarquer simplement qu'en faisant dans l'équation homogène $y = tx$, y et x disparaîtraient; l'équation résultante donnerait la valeur de $\frac{dy}{dx} = y'$ en t. Comme on a d'ailleurs $dy = tdx + xdt = y'dx$, on aura aussi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y'-t},$$

équation dans laquelle les variables sont séparées, puisque y' s'exprime en fonction de t seul; on en tirera

$$\mathrm{l}x = \int \frac{dt}{y'-t} = -\,\mathrm{l}(y'-t) + \int \frac{dy'}{y'-t}.$$

On emploiera l'une ou l'autre des deux intégrales

$$\int \frac{dt}{y'-t}, \quad \int \frac{dy'}{y'-t},$$

suivant qu'il sera plus facile d'obtenir la valeur de y' en t ou la valeur de t en y'. Si l'expression $\int \frac{dt}{y'-t}$ est intégrable à l'aide de logarithmes, ou si l'on a

$$\int \frac{dt}{y'-t} = \mathrm{l}u,$$

on aura $\mathrm{l}x = \mathrm{l}C + \mathrm{l}u$, $x = Cu$, $y = Ctu$; y sera exprimé algébriquement en x.

Exemples: 1°. $\qquad ydx - x\sqrt{dy^2 + dx^2} = 0,$

ou $\quad y - x\sqrt{1 + y'^2} = 0;\quad$ et en posant $y = tx$,

$$t = \sqrt{y'^2 + 1},$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{dt}{t - y'}, \quad lx = -l(t - y') - \int \frac{dy'}{\sqrt{y'^2 + 1} - y'}$$

$$= -l(t - y') - \int dy'\left(y' + \sqrt{1 + y'^2}\right),$$

$$lx = C - \tfrac{1}{2}l\left(\sqrt{1 + y'^2} - y'\right) - \tfrac{1}{2}y'\sqrt{1 + y'^2} - \tfrac{1}{2}y'^2.$$

D'ailleurs $y = tx = x\sqrt{1 + y'^2}$.

2°. $ydx - xdy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$, on trouvera

$$t = \frac{y}{x}, \quad \frac{\left(-nt + \sqrt{t^2 + 1 - n^2}\right)}{C(1 - n^2)} = \left(\frac{-t + \sqrt{t^2 + 1 - n^2}}{(1 - n)}\right)^{\frac{1}{n}},$$

si $n = 1$, $y^2 + x^2 = 2Cx$; si $n = 1$, $x^n = 0$, $x^2 + y^2 + 2Cx = 0$.

186. A l'aide des considérations qui précèdent, on peut résoudre divers problèmes intéressants. Nous en donnerons quelques exemples :

I. Trouver l'équation d'une courbe telle que l'arc s soit exprimé en fonction de x et de y par la relation $s^2 = 2xy$, d'où $\sqrt{dx^2 + dy^2} = \dfrac{xdy + ydx}{\sqrt{2xy}}$, et en posant

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y = tx,$$

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{y' + t}{\sqrt{2t}}, \quad t = \sqrt{2t(1 + y'^2)} - y',$$

$$t = 1 - y' + y'^2 + (1 - y')\sqrt{1 + y'^2},$$

$$y' - t = -(1 - y')\left(1 - y' + \sqrt{1 + y'^2}\right);$$

donc

$$\int \frac{dy'}{y' - t} = \int \frac{dy'}{2y'(1 - y')}\left(1 - y' - \sqrt{1 + y'^2}\right) = -\tfrac{1}{2}l y' - \tfrac{1}{2}\int \frac{dy'\sqrt{1 + y'^2}}{y'(1 - y')},$$

Mais en posant $y' = \dfrac{1 - u^2}{2u}$, on a

$$\int\frac{dy'\sqrt{1+y'^2}}{y'(1-y')}=-\int\frac{du(1+u^2)^2}{u(1-u^2)(u^2+2u-1)}=\int\frac{du}{u}-2\int\frac{du}{1-u^2}$$

$$-4\int\frac{du}{(u+1)^2-2}=\mathrm{l}u-\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}+\sqrt{2}\,\mathrm{l}\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u},$$

et par suite

$$\int\frac{dy'}{y'-t}=\frac{1}{2}\mathrm{l}\,y'-\frac{1}{2}\mathrm{l}\,u+\frac{1}{2}\mathrm{l}\frac{1+u}{1-u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{l}\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}$$

$$=\mathrm{l}\frac{1+u}{2u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{l}\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u};$$

on a d'ailleurs

$$y'-t=\frac{(1+u)(1-2u-u^2)}{2u}=\frac{(1+u)[2-(1+u)^2]}{2u},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{y'-t};$$

et par conséquent

$$\frac{dy'}{y'-t}-\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{y'-t}-\frac{dt}{y'-t}=\frac{d(y'-t)}{y'-t},$$

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy'}{y'-t}-\frac{d(y'-t)}{y'-t},$$

$$\mathrm{l}x=C'+\int\frac{dy'}{y'-t}-\mathrm{l}(y'-t);$$

donc, en substituant, on trouvera

$$\mathrm{l}x=C'-\mathrm{l}(1+u)+\mathrm{l}u-\mathrm{l}[2-(1+u)^2]$$

$$+\mathrm{l}\frac{1+u}{u}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{l}\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u}$$

$$=\mathrm{l}C-l[2-(1+u)^2]-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{l}\frac{\sqrt{2}+1+u}{\sqrt{2}-1-u},$$

et en ayant égard aux équations

$$t=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}(1+u)^2,\quad 1+u=\sqrt{\frac{2y}{x}},$$

$$x = \frac{Cx}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$x - y = C\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}},$$

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = C(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{\frac{1}{\sqrt{2}}-1};$$

telle est donc l'équation cherchée. On y arriverait plus facilement en procédant comme il suit : on a

$$t + y' = \sqrt{2t(1+y'^2)}, \quad t^2 + 2ty' + y'^2 = 2t + 2ty'^2,$$

d'où

$$y' = \frac{t+(1-t)\sqrt{2t}}{2t-1}, \quad y' - t = \frac{(1-t)\sqrt{2t}}{\sqrt{2t-1}},$$

$$\mathrm{l}x = \int\frac{dt}{y'-t} = \int\frac{dt\sqrt{2t-1}}{(1-t)\sqrt{2t}} = C - \mathrm{l}(1-t) - \int\frac{dt}{(1-t)\sqrt{2t}};$$

posons $t = v^2$, il viendra

$$\int\frac{dt}{(1-t)\sqrt{2t}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{2dv}{1-v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\frac{1+v}{1-v},$$

et par suite

$$\mathrm{l}x = \mathrm{l}C - \mathrm{l}(1-t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{l}\frac{1+\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}},$$

et à cause de $t = \frac{y}{x}$,

$$x = \frac{Cx}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \text{ etc.}$$

Ce même procédé d'intégration réussira toute les fois que l'arc s sera une fonction homogène des variables x et y. Posons en effet $y = tx$, $s = ux$; en substituant ces valeurs dans l'équation homogène $\varphi(x, y, s) = 0$, x sera éliminé, et il restera une équation entre t et u qui permettra d'exprimer u en t. On a d'ailleurs

$$dy = y'dx, \quad y'dx = tdx + xdt,$$
$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} = udx + xdu,$$

donc

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t} = \frac{du}{\sqrt{1+y'^2} - u};$$

puisque u est exprimé en t, faisons $du = vdt$, il viendra

$$\sqrt{1+y'^2} = u + y'v - vt,$$
$$1 + y'^2 = (u - vt)^2 + 2vy'(u - vt) + v^2y'^2,$$
$$y' = \frac{v(u - vt) + \sqrt{(u - vt)^2 - 1 + vt}}{1 - v^2},$$
$$y' - t = \frac{vu - t + \sqrt{(u - vt)^2 - 1 + v^2}}{1 - v^2},$$
$$\frac{dx}{x} = \frac{dt(1 - v^2)}{vu - t + v\sqrt{(u - vt)^2 - 1 + v^2}}$$
$$= \frac{dt\left[vu - t - \sqrt{(u - vt)^2 - 1 + v^2}\right]}{1 + t^2 - u^2}.$$

Or, puisque u et v sont exprimés en t, le second membre de l'équation qui précède est ramené à la forme $F(t)dt$, et l'on en déduira la valeur de x en t; puis, en ayant égard à la relation $vdt = du$, on trouvera

$$lx = lC - l\sqrt{1+t^2-u^2} - \int \frac{dt\sqrt{(u - vt)^2 - 1 + v^2}}{1 + t^2 - u^2}.$$

En substituant, dans cette dernière équation, pour u, sa valeur $\frac{y}{x}$, on obtiendra l'équation de la courbe cherchée. Cette équation sera algébrique toutes les fois que l'intégrale du second membre pourra s'exprimer par des logarithmes.

Si l'on avait $ds = Sdx = f(y', t, u)\,dx$, le même procédé réussirait encore. Dans ce cas, de l'équation

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{y' - t} = \frac{du}{\sqrt{1 + y'^2} - u} = \frac{du}{S - u},$$

on pourrait tirer la valeur de y' en fonction de t et de u, ou simplement en fonction de t, puisque u lui-même est exprimé au moyen de t, et l'intégrale du second membre de l'équation $1\,x = \int \frac{dt}{y' - t}$ serait une simple quadrature.

1[er] *Exemple.* $s = ax + by$; en posant

$$y = tx, \quad s = ux,$$

on aura

$$u = a + bt, \quad v = \frac{du}{dt} = b, \quad u - vt = a,$$

$$1x = 1C - 1\sqrt{1 + t^2 - (a + bt)^2} - \int \frac{dt\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{1 + t^2 - (a + bt)^2};$$

or,

$$\int \frac{dt\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{1 - a^2 - 2abt + (1 - b^2)t^2} = \int \frac{(b^2 - 1)dt\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{\left[t(b^2 - 1) + ab - \sqrt{a^2 + b^2 - 1}\right]\left[t(b^2 - 1) + ab + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}\right]}$$
$$= \tfrac{1}{2}1\frac{(b^2 - 1)t + ab - \sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{(b^2 - 1)t + ab + \sqrt{a^2 + b^2 - 1}}.$$

Cela posé, en substituant à t sa valeur $\frac{y}{x}$, on obtiendra l'intégrale cherchée

$$\frac{x^2 + y^2 - (ax + by)^2}{C^2} = \frac{(b^2 - 1)y + abx - x\sqrt{a^2 + b^2 - 1}}{(b^2 - 1)y + abx + x\sqrt{a^2 + b^2 - 1}};$$

mais, en posant

$$(b^2-1)y+abx-x\sqrt{a^2+b^2-1}=\text{M},$$
$$(b^2-1)y+abx+x\sqrt{a^2+b^2-1}=\text{N},$$

il vient $\text{MN}=(b^2-1)[(ax+by)^2-x^2-y^2]$; donc, en représentant par C' une nouvelle constante, on aura

$$\frac{\text{MN}}{C'^2}=\frac{\text{M}}{\text{N}},$$

et par conséquent, ou $\text{M}=0$, ou $\text{N}=C'$; l'intégrale générale est donc

$$(b^2-1)\,y+abx\pm x\sqrt{a^2+b^2-1}=C,$$

et représente une ligne droite.

2[me] *Exemple :* $s^2=x^2+y^2$;

comme on aura

$$u=\sqrt{1+t^2},\quad v=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\quad 1+t^2-u^2=0,$$

il faudra recourir aux formules non transformées; or,

$$u-vt=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\quad v^2-1=-\frac{1}{1-t^2},\quad vu-t=0,$$

donc $\quad y'-t=0,\quad$ ou $\quad \frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=0,$

et, par suite, $\quad y=Cx.$

3[me] *Exemple :* $s^2=y^2+mx^2$:

$$u=\sqrt{t^2+m},\quad v=\frac{t}{\sqrt{t^2+m}},$$
$$1+t^2-u^2=1-m,\quad u-vt=\frac{m}{\sqrt{t^2+m}},$$
$$v^2-1=\frac{-m}{t^2+m}:$$

$$= \mathrm{l}C - \mathrm{l}\sqrt{1-m} - \frac{1}{1-m}\int \frac{dt\sqrt{t^2-m}}{\sqrt{t^2+m}} = \mathrm{l}C + \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m-1}}\mathrm{l}[t+\sqrt{t^2+m}],$$

$$\frac{x}{C} = \left(\frac{y+\sqrt{y^2+mx^2}}{x}\right)^{\frac{\sqrt{m-1}}{m}}.$$

Quand on aura $\frac{m}{m-1} = n^2$, ou $m = \frac{n^2}{n^2-1}$, et par suite $s^2 = y^2 + \frac{n^2}{n^2-1}x^2$, l'équation de la courbe sera algébrique, et de la forme

$$x^{n+1} = c\left(y + \sqrt{y^2 + \frac{n^2x^2}{n^2-1}}\right)^n, \quad \text{ou} \quad y = \frac{(n^2-1)x^{\frac{2}{n}} - n^2c^{\frac{2}{m}}}{2(n^2-1)\ c^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1-n}{n}}}.$$

Si n était égal à $\frac{1}{\mu}$, on aurait à la fois

$$y = \frac{c^{2\mu} + (\mu^2-1)x^{2\mu}}{2(\mu^2-1)\ c^{\mu}x^{\mu-1}}, \quad s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{\mu^2-1}}.$$

Exemple : Si $y = \frac{c^4+3x^4}{6c^2x}$, $s = \sqrt{y^2 - \frac{x^2}{3}}$.

TRENTE-UNIÈME LEÇON.

Intégration de quelques équations particulières et plus remarquables. — Équation de Riccati, etc.

---

187. L'équation différentielle du premier ordre

$$dy = (ay^2 + bx^m)\,dx,$$

connue sous le nom d'*équation de Riccati*, a été l'objet des recherches d'un grand nombre de géomètres qui ont trouvé un nombre indéfini de cas dans lesquels l'intégration devient possible, en ce sens que l'intégrale générale peut être exprimée à l'aide des seuls signes algébriques, exponentiels et logarithmiques, et du signe $\int$ de l'intégration indéfinie, ou, plus simplement, en ce sens qu'elle peut être ramenée à une équation dans laquelle les variables sont séparées.

Le plus simple de ces cas est celui où $m = 0$; alors, en effet, on a immédiatement

$$dx = \frac{dy}{b + ay^2}, \quad x = \frac{1}{\sqrt{ba}} \operatorname{arc\,tang} \frac{y\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + C.$$

Posons $y = z^n$, on aura $dy = nz^{n-1}dz$,

et, en substituant dans l'équation de Riccati,

$$nz^{n-1}dz = az^{2n}dx + bx^m dx;$$

cette équation transformée sera homogène, et par conséquent intégrable, si l'on a

$$n - 1 = 2n = m, \quad \text{ou} \quad n = -1, \; m = -2,$$

et deviendra $x^2dz + bz^2dx + ax^2dx = 0$.

Après avoir considéré ces deux cas particuliers, passons à la recherche générale des cas d'intégrabilité. Pour arriver plus vite au but, posons $y = -\left(\frac{1}{ax} + \frac{z}{x^2}\right)$, d'où

$$dy = \frac{dx}{ax^2} - \frac{dz}{x^2} + \frac{2zdx}{x^3}, \quad y^2 = \frac{1}{a^2x^2} + \frac{2z}{ax^3} + \frac{z^2}{x^4}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation

$$dy - (ay^2 + bx^m)dx = 0,$$

il viendra, toutes réductions faites,

$$x^2dz = -bx^{m+4}dx - az^2dx,$$

ou, en faisant $x = \frac{1}{u}$, $dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$.

Cela posé, si l'équation de Riccati est intégrable dans le sens que nous avons dit pour une certaine valeur μ de m, elle le sera encore lorsqu'on fera $m = -\mu - 4$; car, en substituant pour m cette valeur dans l'équation transformée

$$dz = (az^2 + bu^{-m-4})\,du,$$

elle devient

$$dz = (az^2 + bu^{\mu})\,du,$$

qui, par hypothèse, est séparable. Or nous avons vu que l'équation de Riccati est séparable lorsque $m = 0$; elle le sera donc aussi lorsque $m = -4$.

Reprenons l'équation

$$dy = (ay^2 + bx^m)\,dx,$$

et faisons $y = -\frac{1}{z}$, d'où $dy = \frac{dz}{z^2}$, il viendra

$$dz = bz^2x^m dx + adx,$$

et en posant $x^{m+1} = u$, $x^m dx = \frac{du}{m+1}$,

$$dz = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du;$$

donc, si l'équation de Riccati est intégrable pour une valeur $m = \mu$, elle le sera encore pour $m = -\frac{\mu}{\mu+1}$; car, en substituant cette valeur dans l'exposant $-\frac{m}{m+1}$, il se réduit à μ. Or nous avons démontré qu'elle était séparable et intégrable pour $m = -4$; elle le sera donc encore pour $m = \frac{4}{-4+1} = -\frac{4}{3}$. Puisqu'elle sera intégrable pour $m = -\frac{4}{3}$, elle le sera encore pour

$$\frac{4}{3} - 4 = -\frac{8}{3},$$

et par conséquent aussi pour $m = -\frac{(-\frac{8}{3})}{-\frac{8}{3}+1} = -\frac{8}{5}$. En continuant ce calcul, qui repose sur ce théorème que, si l'équation est intégrable lorsque $m = \mu$, elle l'est encore lorsque $m = -\mu - 4$, et $m = \frac{-\mu}{\mu+1}$, on en conclura que l'équation de Riccati est intégrable lorsque l'exposant de la variable x est égal à l'un des termes de la suite infinie

$$(a)\ 0,\ -2,\ -4,\ -\tfrac{4}{3},\ -\tfrac{8}{3},\ -\tfrac{8}{5},\ -\tfrac{12}{5},\ -\tfrac{12}{7},\ -\tfrac{16}{7},\ldots,$$

dont le terme général, à partir du troisième terme, est $\frac{n-4}{2n\mp1}$. Si l'on fait tour à tour $n = 0$ et $n = \infty$, ce

terme général donnera les deux premiers termes de la série o et — 2.

188. Considérons comme cas particulier l'équation

$$dy = y^2dx + 2x^{-\frac{8}{3}}dx;$$

l'exposant de x étant $-\frac{8}{3}$, qui est le cinquième terme de la série, nous sommes sûrs que l'équation donnée est séparable, et parce que l'exposant $-\frac{8}{3}$ occupe une place impaire dans cette série, nous comparerons la proposée avec l'équation $dz = (az^2 + bu^{-m-4})du$, ce qui nous donne

$$b = 2,\quad m + 4 = \tfrac{8}{3},\quad m = -\tfrac{4}{3},\quad a = 1;$$

substituant dans l'équation $dy = (ay^2 + bx^m)dx$, il vient

$$dy_1 = y_1^2\,dx_1 + 2x_1^{-\frac{4}{3}}dx_1.$$

Comparant cette dernière équation avec la transformée

$$dz = \frac{b}{m+1}z^2du + \frac{a}{m+1}u^{-\frac{m}{m+1}}du,$$

on trouvera

$$\frac{a}{m+1} = 2,\quad \frac{b}{m+1} = 1,\quad \frac{m}{m+1} = \frac{4}{3},$$

d'où $a = -6$, $b = -3$, $m = -4$; substituant de nouveau dans la formule $dy = (ay^2 + bx^m)dx$, on aura

$$dy_2 = -6y_2^2dx_2 - x_2^{-4}dx_2,$$

équation qu'il faudra comparer de nouveau à

$$dz = b(az^2 + u^{-m-4})\,du,$$

ce qui donnera $a = -6$, $b = -3$, $m = o$. Substituant dans l'équation $dy = (ay^2 + bx^m)dx$, on aura

$$dy_3 = -3\,dx_3 - 6y_3^2\,dx_3,\ \text{ou}\ \tfrac{1}{3}\frac{dy_3}{1 + 2y_3^2} = -dx_3,$$

équation dont l'intégrale est

$$x_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \text{ arc tang} \, y_3\sqrt{2} + C.$$

Mais en remontant des valeurs de x_3 et de y_3 à celles de x et de y, on trouve

$$x_3 = \frac{1}{x^2}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{x_1}}, \quad x_1 = \frac{1}{x},$$

$$y_3 = \frac{\sqrt[3]{x}\,[1 - 6y_2\sqrt[3]{x}]}{6},$$

$$y_2 = -\frac{1}{y_1}, \quad y_1 = -x(1 + xy),$$

d'où

$$x_3 = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, \quad y_3 = \frac{\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{x^5} - 6}{6(1 + xy)\sqrt[3]{x}};$$

substituant ces valeurs de x_3 et de y_3, on aura définitivement pour l'intégrale demandée

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \text{ arc tang} \frac{\sqrt[3]{x^2} + y\sqrt[3]{x^5} - 6}{3\sqrt{2}(1 + xy)\sqrt[3]{x}} + C.$$

Cet exemple indiquera suffisamment la marche qu'il faudra suivre dans chaque cas particulier. Si l'exposant de x, dans l'équation proposée, est égal à l'un des nombres occupant une place impaire de la série (a), il faudra la comparer d'abord avec l'équation

$$dz = b\,(az^2 + u^{-m-4})du,$$

pour déterminer les valeurs des constantes a, b, valeurs que l'on substituera dans l'équation

$$dy = (ay^2 + bx^m)\,dx.$$

On aura ainsi une nouvelle équation qu'il faudra comparer à la formule

$$dz = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du\,;$$

les nouvelles valeurs des constantes substituées dans

$$dy = (ay^2 + bx^m)dx,$$

conduiront à une nouvelle transformée qu'on comparera à

$$dz = b(az^2 + u^{-m-4})\,du,$$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une équation dans laquelle l'exposant de x, qui a diminué de valeur à chaque opération, se trouve enfin o; alors on n'a plus qu'à intégrer l'équation séparée $dx = \frac{dy}{b + by^2}$.

Si l'exposant de x dans la proposée était un des termes occupant une place impaire dans la série (a), on commencerait par la comparer avec l'équation

$$dz = \frac{b}{m+1} z^2 du + \frac{a}{m+1} u^{-\frac{m}{m+1}} du,$$

et l'on continuerait à opérer comme précédemment.

189. Les cas d'intégrabilité, ou les cas dans lesquels les variables de l'équation de Riccati, peuvent être séparées, sont donc très-limités; on les a obtenus par des artifices particuliers, et la méthode qui les a fait connaître ne prouve pas qu'ils soient les seuls possibles. M. Liouville a démontré le premier, par une analyse exacte, qu'ils sont en effet les seuls admissibles quand, pour exprimer y en x, on se borne à introduire dans le calcul les signes algébriques, exponentielles et logarithmiques,

et le signe $\int$ d'intégration indéfinie relatif à la variable x: il nous est impossible de donner même une idée de la marche qu'il a suivie. Dans ses savants Mémoires sur la classification des fonctions, cette même méthode l'avait conduit à la solution d'un grand nombre de questions jusque-là vraiment inabordables.

Toute équation différentielle de la forme

$$dy = by^2x^ndx + ax^mdx,$$

dans laquelle n représente un nombre quelconque différent de l'unité, pourra être ramenée à l'équation de Riccati. En effet, posons $x^ndx = dz$, d'où

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = z, \quad x = [(n+1)z]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$dx = \frac{z^{-\frac{n}{n+1}}dz}{\sqrt[n+1]{(n+1)^n}}, \quad x^m = \sqrt[n+1]{[(n+1)z]^m};$$

en substituant ces valeurs, on arrivera immédiatement à la transformée

$$dy = a(n+1)^{\frac{n-m}{n+1}}z^{\frac{n-m}{n+1}}dz + by^2dz.$$

On peut encore essayer de réduire à l'équation de Riccati l'équation à quatre termes

$$ay = ay^2dx + byx^ndx + cx^ndx.$$

Pour cela, posons $y = z + \alpha x^r$, α et r étant deux quantités constantes et indéterminées; on en tirera

$$dy = dz + r\alpha x^{r-1}dx,$$

$$\begin{aligned} dz = -r\alpha x^{r-1}dx + az^2dx + 2az\alpha x^rdx + a\alpha^2x^{2r}dx \\ + bzx^ndx + b\alpha x^{n+r}dx + cx^ndx. \end{aligned}$$

On pourra rendre homogènes les premier, quatrième et

sixième termes, en posant

$$r - 1 = 2r = r + n, \quad \text{ou} \quad r = -1, \quad n = -1;$$

on a alors l'équation

$$dz = (a\alpha^2 + b\alpha + \alpha)x^{-2}dx + (2a\alpha + b)zx^{-1}dx + az^2dx + cx^m dx.$$

Les deux premiers termes s'évanouiront et la transformée coïncidera avec l'équation de Riccati, si l'on a

$$a\alpha^2 + b\alpha + \alpha = 0, \quad 2a\alpha + b = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{-1 - b}{a}, \quad \alpha = -\frac{b}{2a}, \quad b + 1 = \frac{b}{2}, \quad b = -2;$$

et il en résulte que les équations à quatre termes, de la forme

$$dy = ay^2dx - \frac{2ydy}{x} + cx^m dx,$$

peuvent se transformer en l'équation de Riccati.

En faisant, dans l'équation

$$dy = ay^2x^m dx + byx^n dx + cx^p dx,$$

$$x^m dx = dz, \quad \text{d'où} \quad x^{m+1} = (m+1)z,$$

$$x^n dx = (m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} z^{\frac{n-m}{m+1}} dz,$$

$$x^p dx = (p+1)^{\frac{p-m}{m+1}} x^{\frac{p-m}{m+1}} dx,$$

on la ramène à la forme

$$dy = ay^2dz + c(m+1)^{\frac{p-m}{m+1}} z^{\frac{p-m}{m+1}} dz + b(m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} yz^{\frac{n-m}{m+1}} dz,$$

que l'on pourra réduire à l'équation de Riccati si l'on a

$$b(m+1)^{\frac{n-m}{m+1}} = -2, \quad \frac{n-m}{m+1} = -1,$$

ou

$$m = -\frac{b+2}{2}, \quad n = -1,$$

et par conséquent si l'équation proposée est

$$dy = ay^2x^{-\frac{b+2}{2}}dx + byx^{-1}dx + cx^m dx.$$

Cette dernière, en effet, se ramène à l'équation de Riccati, en posant

$$\frac{dx}{x^{\frac{p+2}{2}}} = dz, \quad y = u + \frac{1}{az}.$$

Enfin, si dans l'équation de Riccati on pose

$$y = -\frac{1}{az}\frac{dz}{dx}, \quad ab = -A,$$

elle devient $\frac{d^2z}{dx^2} = Azx^m$; cette dernière équation devient à son tour

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2n}{t}\frac{dz}{dt} = Bz, \quad \text{et} \quad \frac{d^2u}{dt^2} - \frac{n(n-1)}{t^2}u = Bu,$$

quand on fait

$$x^{\frac{m}{2}+1} = t, \quad n = \frac{m}{2(m+2)}, \quad B = \frac{A}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}, \quad u = t^n z.$$

Nous montrerons plus tard comment on peut exprimer, à l'aide d'une simple quadrature, une intégrale particulière, et quelquefois l'intégrale générale de l'équation linéaire du second ordre $\frac{d^2z}{dx^2} = Azx^m$, et, de l'équation de Riccati que l'on en déduit en posant $z = e^{\int y dx}$.

190. Dans le dernier cahier du Journal de Crelle,

M. Jacobi a donné l'intégrale générale de l'équation

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = o,$$

qui renferme, comme cas particulier, l'équation

$$ydx(c + nx) - dy\,(y + a + bx + nx^2) = o,$$
ou $$nx(xdy - ydx) - (a + bx + y)dy + cydx = o,$$

traitée très-élégamment par Euler dans le premier volume de ses *Institutions de calcul intégral*, page 345. Nous croyons devoir reproduire ici la méthode suivie par l'illustre géomètre de Kœnigsberg, parce que, nous n'en doutons pas, elle sera aussi féconde qu'elle est ingénieuse. Posons

$$u = \frac{a' + b'x + c'y}{a + bx + cy}, \quad v = \frac{a'' + b''x + c''y}{a + bx + cy},$$

et faisons, pour abréger, $z = a + bx + cy$,

$$\alpha = b'c'' - b''c', \quad \alpha' = b''c - bc'', \quad \alpha'' = bc' - b'c,$$
$$\beta = c'a'' - c''a', \quad \beta' = c''a - ca'', \quad \beta'' = ca' - c'a,$$
$$\gamma = a'b'' - a''b', \quad \gamma' = a''b - ab'', \quad \gamma'' = ab' - a'b,$$
$$\delta = a(b'c'' - b''c') + b\,(c'a'' - c''a') + c\,(a'b'' - a''b'),$$

on trouvera

$$+ b\beta' + c\gamma' = o, \quad a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = o, \quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = \delta,$$
$$+ b'\beta'' + c'\gamma'' = o, \quad a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' = o, \quad a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' = o;$$

$$z^2du = + \alpha''(xdy - ydx) - \beta''dy + \gamma''dx,$$
$$z^2dv = - \alpha'(xdy - ydx) + b'dy - \gamma'dx.$$

Si dans l'équation proposée on substituait, pour x, y, dx, dy, leurs valeurs en u, v, du, dv, elle deviendrait

$$Mdu + Ndv = o,$$

ou, en mettant pour du, dv leurs valeurs,

$$\alpha''M - \alpha'N)(xdy - ydx) - (\beta''M - \beta'N)dy + (\gamma''M - \gamma'N)dx = o.$$

Comparons cette dernière équation, multipliée par z, avec l'équation proposée, et disposons d'une indéterminée S', de telle sorte que l'on ait

$$z(\alpha''M - \alpha'N) + S' = A + A'x + A''y,$$
$$z(6''M - 6'N) + S'x = B + B'x + B''y,$$
$$z(\gamma''M - \gamma'N) + S'y = C + C'x + C''y.$$

En ayant égard aux équations qui lient entre eux les coefficients a, a', a'',..., α, α', α'',..., etc., on tirera de ces dernières

$$S'(a + bx + cy) = Aa + Bb + Cc + (A'a + B'b + C'c)x + (A''a + B''b + C'c$$
$$-\delta zN + S'(a' + b'x + c'y) = Aa' + Bb' + Cc' + (A'a' + B'b' + C'c')x$$
$$+ (A''a' + B''b' + C''c'$$
$$-\delta zM + S'(a'' + b''x + c''y) = Aa'' + Bb'' + Cc'' + (A'a'' + B'b'' + C'c'')x$$
$$+ (A''a'' + B''b'' + C''c''$$

Or, on satisfera à ces trois équations si l'on a

$$-\delta N = (S'' - S')u, \qquad \delta M = (S''' - S')v,$$

$$(A - S')a + Bb + Cc = o, A'a + (B' - S')b + C'c = o, A''a + B''b + (C'' - S')c =$$
$$(A - S'')a' + Bb' + Cc' = o, A'a' + (B' - S'')b' + C'c' = o, A''a' + B''b' + (C'' - S'')c =$$
$$(A - S''')a'' + Bb'' + Cc'' = o, A'a'' + (B' - S''')b'' + C'c'' = o, A''a'' + B''b'' + (C'' - S'')c =$$

et, pour que ces dernières équations soient satisfaites, il suffit évidemment qu'après avoir pris pour S', S'', S''' les trois racines de l'équation

$$(A - S)(B' - S)(C'' - S) - B''C'(A - S) - CA''(B' - S) - A'B(C'' - S)$$
$$+ A'B''C + A''BC' = o,$$

on en tire les valeurs des rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{b'}{a'}$, $\frac{c'}{a'}$, etc., ce qui est toujours très-facile.

Cela posé, l'équation $Mdu + Ndv = o$, identique avec la proposée, devient

$$(S''' - S')vdu - (S'' - S')udv = o,$$

et a pour intégrale générale

$$u^{S'''-S'}v^{S'-S''}=C,$$

ou

$$+ bx + cy)^{S''-S'''}(a'+b'x+c'y)^{S'''-S'}(a''+b''x+c''y)^{S'-S''}=C.$$

On arrive, de cette manière, à la proposition suivante :

Étant donnée l'équation différentielle

$$(A+A'x+A''y)(xdy-ydx)-(B+B'x+B''y)\,dy \\ +(C+C'x+C''y)dx=0,$$

on résoudra l'équation du troisième degré

$$\cdot\, S)(B'-S)(C''-S)-B''C'(A-S)-C\,A''(B'-S)-A'B(C''-S) \\ +A'B''C+A''BC')=0,$$

puis, en désignant par S', S'', S''' les trois racines, et posant, pour abréger,

$$C''-B''C'=D,\quad C'A''-C''A'=D',\quad A'B''-A''B'=D'',\quad B'+C''=E,$$

on aura pour l'intégrale générale cherchée,

$$[D-ES'+S'^2+(D'+A'S')x+(D''+A''S')y]^{S''-S'''} \\ \times[D-ES''+S''^2+(D'+A'S'')x+(D''+A''S'')y]^{S'-S'''} \\ \times[D-ES'''+S'''^2+(D'+A'S''')x+(D''+A''S''')y]^{S'-S''}=C.$$

Scolie. Comme les équations de condition donnent seulement les valeurs des rapports

$$\frac{b}{a},\ \frac{c}{a},\ \frac{b'}{a'},\ \frac{c'}{a'},\ldots\ \frac{b''}{a''},\ \frac{c''}{a''},$$

trois des neuf quantités a, b, c,... resteront arbitraires, et la transformation pourra s'effectuer d'une infinité de manières. La méthode suivie par M. Jacobi diffère, du tout au tout, de celle d'Euler, qui, pour séparer les variables dans l'équation

$$ydx\,(c+nx)-dy\,(y+a+bx+nx^2)=0,$$

posait $z = \frac{y(c+nx)}{y+a+bx+nx^2}$, et arrivait ainsi à la transformée

$$\frac{dz}{z[na+c^2-bc+(b-2c)z+z^2]} = \frac{dx}{(c+nx)(a+bx+nx^2)},$$

que l'on devait intégrer par les méthodes connues. Euler concluait de son analyse que le facteur

$$\frac{1}{ny^3+(2na-bc)y^2+n(b-2c)xy^2+(na+c^2-bc)(a+bx+nx^2)y^2}$$

rend le premier membre de son équation une différentielle exacte.

191. Comme dernier exemple, nous considérerons l'équation

$$\text{(A)}\qquad \frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}},$$

dans laquelle les variables sont séparées et dont l'intégrale générale est une fonction algébrique, tandis que les intégrales des deux membres pris séparément n'ont jamais pu être déterminées exactement à l'aide des fonctions connues, algébriques, logarithmiques, circulaires, etc.

Posons

$$\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4} = \sqrt{u},$$
$$\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4} = \sqrt{v},$$
$$dx = dz\sqrt{u},\quad dy = dz\sqrt{v},$$

et considérons z comme variable indépendante; il viendra

$$du = (4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3)dx,$$
$$dv = (4a_0y^3+3a_1y^2+2a_2y+a_3)dy,$$

$$u=\frac{dx^2}{dz^2},\quad v=\frac{dy^2}{dz^2},\quad du=\frac{2dxd^2x}{dz^2},\quad dv=\frac{2dyd^2y}{dz^2},$$

$$\frac{2d^2x}{dz^2}=4a_0x^3+3a_1x^2+2a_2x+a_3,\quad \frac{2d^2y}{dz^2}=4a_0y^3+3a_1y^2+2a_2y+a_3,$$

$$\frac{{}^2-dy^2}{dz^2}=u-v=a_0(x^4-y^4)+a_1(x^3-y^3)+a_2(x^2-y^2)+a_3(x-y),$$

$$\frac{x+d^2y}{dz^2}=\frac{d(dx+dy)}{dz^2}=2a_0(x^3+y^3)+\frac{3a_1}{2}(x^2+y^2)+a_2(x+y)+a_3.$$

Posons encore $x-y=s$, $x+y=t$, et par conséquent

$$dx-dy=ds,\quad dx+dy=dt:$$

les deux dernières équations deviennent alors

$$\frac{dsdt}{sdz^2}=\frac{a_0}{2}(t^3+s^2t)+\frac{a_1}{4}(3t^2+s^2)+a_2t+a_3,$$

$$\frac{d^2t}{dz^2}=\frac{a_0}{2}(t^3+3s^2t)+\frac{3a_1}{4}(t^2+s^2)+a_2t+a_3;$$

en les retranchant et multipliant la différence par $\frac{2dt}{s^2}$, on aura

$$\frac{1}{dz^2}\left(\frac{2dtd^2t}{s^2}-\frac{2dsdt^2}{s^3}\right)=\frac{1}{dz^2}d\frac{dt^2}{s^2}=2a_0tdt+a_1dt,$$

et, par suite, en intégrant,

$$\frac{1}{dz^2}\frac{dt^2}{s^2}=a_0t^2+a_1t+C,\quad \frac{dt}{dz}=s\sqrt{a_0t^2+a_1t+C}.$$

Il ne reste plus qu'à substituer dans cette équation, à la place de s, t, $\frac{dt}{dz}$, leurs valeurs

$$x-y,\quad x+y,\quad \frac{dx}{dz}+\frac{dy}{dz}=\sqrt{u}+\sqrt{v},$$

pour obtenir l'intégrale générale cherchée

$$\sqrt{a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}$$
$$+\sqrt{a_0y^4+a_1y^3+a_2y^2+a_3y+a_4}$$
$$=(x-y)\sqrt{a_0(x+y)^2+a_1(x+y)+C}.$$

Si l'on donnait les équations

$$\frac{dx}{\sqrt{A_0x^6+A_1x^4+A_2x^2+A_3}}=\frac{dy}{\sqrt{A_0y^6+A_1y^4+A_2y^2+A_3}},$$
$$\frac{dx}{x\sqrt{A_0x^{2n}+A_1x^n+A_2}}=\frac{dy}{y\sqrt{A_0y^{2n}+A_1y^n+A_2}},$$

on ferait, pour la première,

$$x^2=\xi,\quad y^2=\eta,\quad \text{d'où}\quad dx=\frac{d\xi}{2\sqrt{\xi}},\quad dy=\frac{d\eta}{2\sqrt{\eta}};$$

pour la seconde,

$$x^n=\xi,\ y^n=\eta,\ \text{d'où}\ dx=\frac{1}{n}\xi^{\frac{1-n}{n}}d\xi,\ dy=\frac{1}{n}\eta^{\frac{1-n}{n}}d\eta,$$

et on les ramènerait ainsi immédiatement, ou à la formule déjà intégrée, ou à ce que devient cette formule quand on y fait $a_4=0$. On trouvera, de cette manière, que l'intégrale de la seconde des équations données est

$$x^n\sqrt{A_0x^{2n}+A_1x^n+A_2}+y^n\sqrt{A_0y^{2n}+A_1y^n+A_2}$$
$$=(x^n-y^n)\sqrt{A_0(x^n+y^n)^2+A_1(x^n+y^n)+C}.$$

La méthode qui nous a conduit à l'intégrale de l'équation (A) ne s'étend pas à l'équation plus générale

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}}=\frac{dy}{\sqrt{a_0y^n+a_1y^{n-1}+\ldots+a_n}},$$

car lorsque $n>4$, l'équation auxiliaire correspondante à

$$\frac{1}{dz^2}d\frac{dt^2}{s^2}=2a_0tdt+a_1dt$$

contient, dans son second membre, des termes affectés de la variable s, et ne peut être intégrée généralement qu'autant qu'on égale à o les coefficients des variables x et y, élevées à des puissances plus grandes que 4.

M. Richelot a donné, dans le Journal de Crelle, une méthode un peu différente de celle que nous avons suivie. Il pose

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = f(x);$$

l'équation proposée devient alors $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$, et l'on peut supposer que x et y sont deux fonctions d'une nouvelle variable z, déterminée par les équations

$$\frac{dx}{dz} = \sqrt{f(x)}, \quad \frac{dy}{dz} = \sqrt{f(y)}.$$

Posons de plus

$$x + y = t, \quad x - y = s,$$

on en conclura

$$\frac{dt}{dz} = \sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}, \quad \frac{ds}{dz} = \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(y)},$$

$$\frac{d^2t}{dz^2} = \tfrac{1}{2}[f'(x) + f'(y)],$$

$$s\frac{d^2t}{dz^2} - \frac{ds}{dz}\frac{dt}{dz} = \tfrac{1}{2}[f'(x) + f'(y)](x - y) - [f(x) - f(y)].$$

Mais, en faisant

$$\tfrac{1}{2}[f'(x) + f'(y)](x - y) - [f(x) - f(y)] = F(x),$$

on en tirera

$$F'(x) = \tfrac{1}{2}(x - y)f''(x) - \tfrac{1}{2}[f'(x) - f'(y)],$$
$$F''(x) = \tfrac{1}{2}(x - y)f'''(x),$$

et, puisque la fonction $F(x)$ s'évanouit ainsi que ses dé-

rivées première et seconde pour $x = y$, elle sera divisible par $(x - y)^3$, et, parce qu'elle est d'ailleurs du quatrième degré au plus, on aura

$$F(x) = (x - y)^3 (\alpha x + \beta y + \gamma).$$

En comparant cette nouvelle expression de $F(x)$ à la première, on trouvera

$$\alpha = \beta = a_0, \quad \gamma = \tfrac{1}{2} a_1,$$

et, par suite,

$$F(x) = (x - y)^3 [a_0 (x + y) + \tfrac{1}{2} a_1] = s^3 (a_0 t + \tfrac{1}{2} a_1),$$

$$s \frac{d^2 t}{dz^2} - \frac{ds}{dz}\frac{dt}{dz} = s^3 (a_0 t + \tfrac{1}{2} a_1),$$

ou $2 \frac{D_z t}{s} d \frac{D_z t}{s} = 2a_0 t dt + a_1 dt$. L'intégration immédiate donne dès lors

$$\left(\frac{D_z t}{s}\right) - a_0 t^2 + a_1 t = C,$$

et enfin

$$\left[\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}}{x - y}\right]^2 - a_0 (x + y)^2 - a_1 (x + y) = C:$$

c'est l'intégrale déjà trouvée.

Si, dans l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$, on remplace x par $\frac{1}{x}$, y par $\frac{1}{y}$, et qu'on pose

$$a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \mathrm{f}(x),$$

elle deviendra

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{f}(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\mathrm{f}(y)}},$$

et aura pour intégrale

$$\left[\frac{\sqrt{\mathrm{f}(y)}+\sqrt{\mathrm{f}(x)}}{x-y}\right]^2 - a_4(x+y)^2 - a_3(x+y) = C;$$

comme d'ailleurs, par une nouvelle transformation de x en $\frac{1}{x}$, de y en $\frac{1}{y}$, cette dernière équation devient

$$\left[\frac{x^2\sqrt{f(y)}+y^2\sqrt{f(x)}}{xy(x-y)}\right]^2 - a_4\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2 - a_3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right) = C.$$

On obtient, sous une seconde forme, l'intégrale de l'équation différentielle $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$. Ces deux formes doivent être au fond identiques, puisqu'une équation différentielle ne peut avoir qu'une seule intégrale complète; et, en effet, si après les avoir retranchées l'une de l'autre, on substitue pour $f(x)$, $f(y)$ leurs valeurs, on arrive à une équation identique $0 = 0$.

192. Dans ses leçons à l'École polytechnique, M. Cauchy est arrivé, d'une manière toute différente, à l'intégrale de l'équation $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}}$. Il considère d'abord le cas particulier

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+a_2x^2+1}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0y^4+a_2y^2+1}},$$

et il cherche si une équation du quatrième degré, déjà symétrique par rapport à x et à y,

$$A_1x^2y^2 + A_2(x^2+y^2) + 2A_3xy - 1 = u = 0,$$

ne pourrait pas vérifier l'équation proposée. Pour cela, remarquons que u peut se mettre sous les deux formes

$$u = (A_1x^2+A_2)y^2 + 2A_3xy + (A_2x^2-1) = Xy^2 + 2X_1y + X_2,$$
$$u = (A_1y^2+A_2)x^2 + 2A_3yx + (A_2y^2-1) = Yx^2 + 2Y_1x + Y_2,$$

d'où l'on déduit

$$\frac{du}{dx}=2(Yx+Y_1),\quad \frac{du}{dy}=2(Xy+X_1),\quad \frac{dy}{Yx+Y_1}=\frac{dx}{Xy+X_1};$$

d'ailleurs, de l'équation

$$u = Yx^2 + 2Y_1x + Y_2 = 0,$$

on tire

$$Y^2x^2 + 2YY_1x + Y_1^2 = Y_1^2 - YY_2,$$

ou

$$Yx + Y_1 = \sqrt{Y_1^2 - YY_2};$$

on trouvera de même

$$Xy + X_1 = \sqrt{X_1^2 + XX_2};$$

l'équation $u = 0$ entraîne donc la suivante

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - XX_2}} = \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - YY_2}},$$

que l'on identifie avec la proposée, en posant

$$A_3^2 - A_2^2 + A_1 = a_2A_2,\quad A_1 = -a_0.$$

De ces deux équations, on tirera les valeurs de deux des coefficients A_3, A_2, A_1; le troisième restera indéterminé et sera la constante de l'intégrale générale cherchée.

Si l'équation proposée était

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}} = \frac{dy}{\sqrt{a_0y^4 + a_1y^3 + a_2y^2 + a_3y + a_4}},$$

on ferait

$$\begin{aligned} u=0&=(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)y^2 + 2(\alpha' x^2 + 2\beta' x + \gamma')y + \alpha'' x^2 + 2\beta'' x + \gamma'' \\ &=(\alpha y^2 + 2\alpha' y + \alpha'')x^2 + 2(\beta y^2 + 2\beta' y + \beta'')x + \gamma y^2 + 2\gamma' y + \gamma'', \end{aligned}$$

en supposant $\beta = \alpha'$, $\gamma' = \beta''$, $\gamma = \alpha''$, afin que, u étant symétrique par rapport à x et à y, le nombre des con-

stantes soit réduit à 6. On aurait, dès lors,

$$u = Xy^2 + 2X_1y + X_2 = Yx^2 + 2Y_1x + Y_2,$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = 2(Yx + Y_1), \quad \frac{du}{dy} = 2(Xy + X_1),$$

$$X^2y^2 + 2X_1Xy + X_1^2 = X_1^2 - XX_2,$$

$$Xy + X_1 = \sqrt{X_1^2 - XX_2}, \quad Yx + Y_1 = \sqrt{Y_1^2 - YY_2},$$

$$\frac{dx}{\sqrt{X_1^2 - XX_2}} = \frac{dy}{\sqrt{Y_1^2 - YY_2}},$$

et il ne restera plus qu'à identifier le polynôme du quatrième degré $X_1^2 - XX_2$ avec

$$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4,$$

pour que $u = 0$ satisfasse à l'équation proposée. Une des six constantes restera indéterminée, et $u = 0$ sera l'intégrale générale cherchée.

L'intégration des expressions de la forme

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4}}$$

a été, dans ces dernières années surtout, l'objet des recherches des plus illustres géomètres. Nous sommes forcé de renvoyer à un appendice l'analyse de ces travaux et la théorie complète des fonctions elliptiques.

TRENTE-DEUXIÈME LEÇON.

Intégration des équations différentielles totales du premier ordre, renfermant un nombre quelconque de variables.

193. La forme la plus générale de ces équations, quand les différentielles sont du premier ordre, est

$$Mdx + Ndy + Pdz + Qdr + \text{etc.} = 0.$$

Considérons d'abord le cas où l'équation, ne renfermant que trois variables, se réduit à

$$Mdx + Ndy + Pdz = 0.$$

Il peut arriver que l'on reconnaisse immédiatement dans le premier membre la différentielle exacte d'une certaine fonction $u = F(x, y, z)$, de telle sorte que l'équation proposée puisse se mettre sous la forme

$$du = df(x, y, z) = 0;$$

dans ce cas, il est évident que son intégrale générale sera

$$u = f(x, y, z) = C.$$

Mais l'expression $Mdx + Ndy + Pdz$ peut être la différentielle exacte d'une fonction $u = F(x, y, z)$, sans qu'on reconnaisse immédiatement quelle est cette fonction. L'intégration, dans ce cas, est cependant sûre et facile, parce qu'on peut toujours déterminer la fonc-

tion u. En effet, on ne peut avoir identiquement

$$M dx + N dy + P dz = \varphi(x, y, z) dx + \chi(x, y, z) dy + \psi(x, y, z) dz$$
$$= du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz,$$

sans que l'on ait

$$M = \frac{du}{dx} = \varphi(x, y, z), \quad N = \frac{du}{dy} = \chi(x, y, z),$$
$$P = \frac{du}{dz} = \psi(x, y, z),$$

et, par suite, $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$, $\frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz}$. Or, dès que ces conditions seront remplies, on calculera facilement la fonction u en procédant comme il suit. Puisque u a pour dérivée, par rapport à x, M ou $\varphi(x, y, z)$, on devra avoir

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z) dx + v,$$

v désignant une fonction des seules variables y et z; de là on tire

$$\frac{du}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, y, z)}{dy} dx + \frac{dv}{dy} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi(x, y, z)}{dx} dx + \frac{dv}{dy}$$
$$= \chi(x, y, z) - \chi(x_0, y, z) + \frac{dv}{dy}.$$

Mais $\frac{du}{dy}$ doit être égal à $\chi(x, y, z)$, on devra donc avoir

$$\frac{dv}{dy} - \chi(x_0, y, z) = 0, \quad v = \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z) dy + w;$$

w étant une fonction de x seul, on a donc

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z) dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z) dy + w;$$

en différentiant par rapport à z, on trouve

$$\frac{du}{dz} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{d\chi(x_0, y, z)}{dz} dy + \frac{dw}{dz};$$

or

$$\frac{d\varphi(x, y, z)}{dz} = \frac{d\psi(x, y, z)}{dx}, \quad \frac{d\chi(x_0, y, z)}{dz} = \frac{d\psi(x_0, y, z)}{dy},$$

on aura donc

$$\frac{du}{dz} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\psi(x, y, z)}{dx} dx + \int_{y_0}^{y} \frac{d\psi(x_0, y, z)}{dy} dy + \frac{dw}{dz},$$

et, en effectuant l'intégration et réduisant,

$$\frac{du}{dz} = \psi(x, y, z) - \psi(x_0, y_0, z) + \frac{dw}{dz};$$

mais $\frac{du}{dz}$ est égal à $\psi(x, y, z)$, donc

$$\frac{dw}{dz} = \psi(x_0, y_0, z), \quad w = \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z) dz + C,$$

et, par suite,

$$u = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y, z) dx + \int_{y_0}^{y} \chi(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^{z} \psi(x_0, y_0, z) dz + C.$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée

$$M dx + N dy + P dz = 0.$$

Exemples :

I. $(y + z) dx + (x + z) dy + (x + y) dz$;

l'intégrale est $zy dx + zx dy + xy dz = C$.

$$\text{II.}\quad (2y^2+4az^2x^2)\,xdx+\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+3y+2x^2\right)ydy$$
$$+\left(4z^2+2ax^4+\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)zdz\,;$$
$$\varphi=(2y^2+4ax^2z^2)\,x,\quad \chi=\left(\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}+3y+2x^2\right)y,$$
$$\psi=\left(4z^2+2ax^4+\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\right)z\,;$$
$$\frac{d\varphi}{dy}=4xy=\frac{d\chi}{dx},\quad \frac{d\chi}{dz}=-\frac{yz}{(y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{d\psi}{dy},$$
$$\frac{d\psi}{dx}=4ax^3z=\frac{d\varphi}{dz}\,;$$

les conditions sont donc remplies, et parce que

$$\int_{x_0}^{x}\varphi(x,\,y,\,z)\,dx=x^2y^2+ax^4z^2-x_0^2y^2-ax_0^4z^2,$$
$$\int_{y_0}^{y}\chi(x_0,y,z)\,dy=y^3+\sqrt{y^2+z^2}+x_0^2y^2-y_0^3-\sqrt{y_0^2+z^2}-x_0^2y_0^2,$$
$$\int_{z_0}^{z}\psi(x_0,y_0,z)\,dz=z^4+ax_0^4z^2+\sqrt{y_0^2+z^2}-z_0^4-ax_0^4z_0^2-\sqrt{y_0^2+z_0^2},$$

l'intégrale générale cherchée sera

$$u=x^2y^2+ax^4z^2+y^3+z^4+\sqrt{y^2+z^2}+C.$$

194. Lorsque pour convertir le premier membre de l'équation

$$\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz=0$$

en une différentielle exacte, il suffit de la multiplier par un facteur connu v, ou, en d'autres termes, lorsqu'on a identiquement

$$v\,(\mathrm{M}dx+\mathrm{N}dy+\mathrm{P}dz)=du,$$

l'équation proposée peut se mettre sous la forme $\frac{1}{v}du=0$,

et l'on y satisfait soit en prenant $du = 0$, $u = C$, soit en prenant $\frac{1}{\nu} = 0$. L'équation $u = C$ est l'intégrale générale, et les valeurs de z en x, y, tirées de l'équation $\frac{1}{\nu} = 0$, seront des intégrales particulières ou singulières.

Mais $\nu\,(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz)$ ne peut pas être une différentielle exacte sans que l'on ait

$$\mathrm{D}_y.\nu\mathrm{M} = \mathrm{D}_x.\nu\mathrm{N}, \quad \mathrm{D}_z.\nu\mathrm{N} = \mathrm{D}_y.\nu\mathrm{P} \quad \mathrm{D}_x.\nu\mathrm{P} = \mathrm{D}_z.\nu\mathrm{M},$$

ou, en développant,

$$\begin{aligned} \nu(\mathrm{D}_y\mathrm{M} - \mathrm{D}_x\mathrm{N}) &= \mathrm{N}\mathrm{D}_x\nu - \mathrm{M}\mathrm{D}_y\nu, \\ \nu(\mathrm{D}_z\mathrm{N} - \mathrm{D}_y\mathrm{P}) &= \mathrm{P}\mathrm{D}_y\nu - \mathrm{N}\mathrm{D}_z\nu, \\ \nu(\mathrm{D}_x\mathrm{P} - \mathrm{D}_z\mathrm{M}) &= \mathrm{M}\mathrm{D}_z\nu - \mathrm{P}\mathrm{D}_x\nu. \end{aligned}$$

Si l'on multiplie la première de ces équations par P, la seconde par M, la troisième par N, et qu'on les ajoute, ν disparaîtra et l'on arrivera à l'équation de condition

$$(a) \quad \mathrm{P}(\mathrm{D}_x\mathrm{N} - \mathrm{D}_y\mathrm{M}) + \mathrm{N}(\mathrm{D}_z\mathrm{M} - \mathrm{D}_x\mathrm{P}) + \mathrm{M}(\mathrm{D}_y\mathrm{P} - \mathrm{D}_z\mathrm{N}) = 0,$$

qui devra nécessairement être vérifiée pour que le facteur qui rend le premier membre intégrable existe réellement.

195. Réciproquement, si cette condition est vérifiée, l'équation proposée sera réellement intégrable, en ce sens que son intégration sera ramenée à l'intégration d'une équation à deux variables. En effet, mettons l'équation $\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz = 0$ sous la forme

$$dz = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}dy - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}dx,$$

et remarquons que si l'on connaissait la valeur de z en x, y et qu'on la substituât dans les fonctions M, N, P, $-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}dx$, $-\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}dy$, seraient identiquement les dérivées

partielles de z, par rapport à x et à y. Donc, si l'on cherche d'abord la fonction la plus générale de z, qui satisfasse à la condition que sa dérivée par rapport à y soit $-\frac{N}{P}dy$, x étant considérée comme une constante, la valeur cherchée de z sera renfermée dans celle que l'on aura ainsi déterminée, et il ne restera plus qu'à assujettir cette dernière à l'autre condition d'avoir $-\frac{M}{P}$ pour dérivée partielle, par rapport à x, ou de vérifier l'équation proposée. Il faut donc chercher d'abord l'intégrale de l'équation

$$dz = -\frac{N}{P}dy, \quad \text{ou} \quad dz + \frac{N}{P}dy = 0.$$

Cette intégrale existe dans le cas où, comme nous le supposons, les fonctions M, N, P sont continues. Cela posé, appelons φ le facteur qui rendrait $dz + \frac{N}{P}dy$ une différentielle exacte, w la fonction qui a pour différentielle $\left(dz + \frac{N}{P}dy\right)\varphi$, et χ une fonction de x. L'intégrale cherchée de l'équation $dz + \frac{N}{P}dy = 0$, sera $w = \chi$; et il faudra déterminer χ de telle sorte, que l'équation

$$\frac{dw}{dx}dx + \frac{dw}{dy}dy + \frac{dw}{dz}dz - \frac{d\chi}{dx}dx = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\left(dz + \frac{N}{P}dy\right)\varphi + \frac{dw}{dx}dx - \frac{d\chi}{dx}dx = 0,$$

soit identique avec l'équation proposée, multipliée, si l'on veut, par un certain facteur, par exemple, par $\frac{\varphi}{P}$.

Or, la comparaison des deux équations

$$\left(dz+\frac{N}{P}dy\right)\varphi+\frac{d\varpi}{dx}-\frac{d\chi}{dx}dx=0,$$

$$\left(dz+\frac{N}{P}dy+\frac{M}{P}dx\right)\varphi=0,$$

donne $$\frac{d\chi}{dx}=\frac{d\varpi}{dx}-\varphi\frac{M}{P}.$$

Cette dernière équation sera évidemment intégrable, et il en sera par conséquent de même de la proposée si, en y substituant pour z sa valeur tirée de l'équation $\varpi=\chi$, y disparaît; alors, en effet, cette équation ne renfermera plus que deux variables x et χ. Donc la condition d'intégrabilité de la proposée se réduit à ce que la différentielle, par rapport à y, de l'expression $\frac{d\varpi}{dx}-\varphi\frac{M}{P}$, dans laquelle on considère y comme une fonction de z, déterminée par l'équation $\varpi=\chi$, soit identiquement nulle, de sorte que l'on ait $D_y\left(\frac{d\varpi}{dx}-\varphi\frac{M}{P}\right)=0$. Or, en développant cette équation de condition, on trouve

$$\frac{d^2\varpi}{dxdy}+\frac{d^2\varpi}{dxdz}\frac{dz}{dy}-\varphi\left(D_y\frac{M}{P}+D_z\frac{M}{P}\cdot\frac{dz}{dy}\right)$$
$$-\frac{M}{P}\left(\frac{d\varphi}{dy}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy}\right)=0;$$

mais en vertu des équations

$$\left(dz+\frac{N}{P}dy\right)\varphi=0,\quad \varpi=\chi,$$

dont la première est une différentielle exacte, et la seconde l'intégrale de la première, on a

$$\frac{d\varpi}{dy}=\varphi\frac{N}{P},\quad \frac{d\varpi}{dz}=\varphi,\quad \frac{dz}{dy}=-\frac{N}{P},\quad \frac{d\varphi}{dy}=\frac{d.\varphi\frac{N}{P}}{dz};$$

donc $$\frac{d^2 w}{dxdy} = \mathrm{D}_z\varphi\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\mathrm{D}_z\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}},$$

$$\frac{d^2 w}{dx\,dz}\cdot\frac{dz}{dy} = -\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} : \frac{d\varphi}{dx},\quad \frac{d\varphi}{dy} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}\frac{d\varphi}{dz} + \varphi\,\mathrm{D}_z\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}.$$

En substituant ces valeurs, l'équation de condition deviendra

$$\mathrm{D}_x\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} - \mathrm{D}_y\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} + \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}}\mathrm{D}_z\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}\mathrm{D}_z\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}} = 0,$$

ou $\mathrm{P}(\mathrm{D}_x\mathrm{N} - \mathrm{D}_y\mathrm{M}) + \mathrm{N}(\mathrm{D}_z\mathrm{M} - \mathrm{D}_x\mathrm{P}) + \mathrm{M}(\mathrm{D}_y\mathrm{P} - \mathrm{D}_z\mathrm{N})$.

Or, c'est l'équation de condition déjà trouvée (a). Donc, en effet, lorsqu'elle est satisfaite, l'équation

$$\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dz = 0$$

est intégrable. Son intégration se ramène à l'intégration successive de deux équations à deux variables.

196. En remarquant que les trois variables x, y, z, étant liées entre elles par une équation unique, deux seulement, x, y, doivent être considérées comme indépendantes, l'équation de condition (a) pourra prendre tour à tour les formes suivantes :

$$\frac{d_y}{dy}\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}} = \frac{d_x}{dx}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{P}},$$

$$\frac{\mathrm{N}d\mathrm{M} - \mathrm{M}d\mathrm{N}}{dz} + \frac{\mathrm{M}d\mathrm{P} - \mathrm{P}d\mathrm{M}}{dy} + \frac{\mathrm{P}d\mathrm{N} - \mathrm{N}d\mathrm{P}}{dx} = 0;$$

$$\frac{d.\mathrm{l}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{M}}}{\mathrm{P}dz} + \frac{d.\mathrm{l}\,\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{P}}}{\mathrm{N}dy} + \frac{d.\mathrm{l}\,\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{N}}}{\mathrm{M}dx} = 0,$$

$$\frac{\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} - \frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}}}{\mathrm{P}dz} + \frac{\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}} - \frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}}{\mathrm{N}dy} + \frac{\frac{d\mathrm{N}}{\mathrm{N}} - \frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{P}}}{\mathrm{M}dx} = 0,$$

et en posant

$$A = \frac{dP}{dy} - \frac{dN}{dz}, \quad B = \frac{dP}{dx} - \frac{dM}{dz}, \quad C = \frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}.$$

$$AM + BN + CP = 0.$$

Appliquons cette méthode à quelques exemples.

Exemples. 1°. $$y\,dx - x\,dy - \frac{y^2}{z}\,dz = 0,$$

$$M = y, \quad N = -x, \quad P = -\frac{y^2}{z};$$

la condition (a) est satisfaite. Supposant x constant, $dx = 0$, on aura

$$-x\,dy - \frac{y^2}{z}\,dz = 0, \quad -x\frac{dy}{y^2} - \frac{dz}{z} = 0, \quad \frac{x}{y} - \mathrm{l}z = \chi;$$

différentiant et comparant à la proposée divisée par y, on trouvera

$$y^2 d\chi = 0, \quad \chi = C;$$

l'intégrale de la proposée est donc

$$\frac{x}{y} - \mathrm{l}z = C.$$

2°. $$(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy + (y^2 - xy)\,dz = 0,$$
$$M = y^2 + yz, \quad N = xz + z^2, \quad P = y^2 - xy;$$

l'équation de condition est satisfaite. Regardant z comme constant, on a à intégrer

$$(y^2 + yz)\,dx + (xz + z^2)\,dy = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{xz + z^2} + \frac{dy}{y^2 + yz} = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{z(x + z)} + \frac{dy}{zy} - \frac{dy}{z(y + z)} = 0;$$

et enfin

$$\frac{dx}{x+z}+\frac{dy}{y}-\frac{dy}{y+z}=0.$$

L'intégrale de cette dernière équation est $\frac{xy+zy}{y+z}=\chi$. Différentiant par rapport à x, y, z, et comparant avec l'équation proposée, on trouvera

$$\frac{(y^2+yz)dx+(xz+z^2)dy+(y^2-xy)dz}{(y+z)^2}=d\chi=0,$$

et par suite $\chi=C$. L'intégrale cherchée est donc définitivement $\frac{xy+zy}{y+z}=C$. Si l'on avait supposé d'abord y constant, on aurait eu

$$\frac{dx}{y^2-xy}+\frac{dz}{y^2+yz}=0,$$

ou

$$\frac{dx}{y-x}+\frac{dz}{y+z}=0,\quad \frac{y+z}{y-x}=\chi,$$

$$\frac{(y+z)dx-(x+z)dy+(y-x)dz}{(y-x)^2}=d\chi,$$

$$\frac{(y^2+yz)dx-(xy+yz)dy+(y^2-xy)dz}{y(y-x)^2}=d\chi,$$

$$d\chi=-\frac{(xy+yz)dy+(xz+z^2)dy}{y(y-x)^2}=-\frac{(x+z)(y+z)dy}{y(y-x)^2}.$$

Si l'on élimine z au moyen de l'équation $\frac{y+z}{y-x}=\chi$, on trouvera

$$d\chi=-\frac{\chi(\chi-1)}{y}dy,\quad \frac{d\chi}{\chi(\chi-1)}=-\frac{dy}{y},$$

$$\frac{d\chi}{\chi-1}-\frac{d\chi}{\chi}=-\frac{dy}{y},\quad \frac{\chi-1}{\chi}=\frac{C}{y},\quad \chi=\frac{y}{y-C};$$

l'intégrale cherchée est donc

$$\frac{y+z}{y-x}=\frac{y}{y-C}\quad\text{ou}\quad\frac{xy+yz}{y+z}=C.$$

3°. $dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy) = 0$;

on a

$$M = ay - bz, \quad N = cz - ax, \quad P = bx - cy,$$
$$A = 2c, \quad B = 2b, \quad C = 2a, \quad AM + BN + CP = 0;$$

regardant z comme constante, il viendra

$$\frac{dx}{cz - ax} + \frac{dy}{ay - bz} = 0, \quad \frac{1}{a}\frac{ay - bz}{cz - ax} = \chi;$$

en différentiant

$$\frac{dx(ay - bz) + dy(cz - ax) + dz(bx - cy)}{(cz - ax)^2} = d\chi,$$

et comparant avec la proposée

$$d\chi = 0, \quad \chi = C,$$

l'intégrale cherchée est donc

$$\frac{ay - bz}{cz - ax} = C, \quad \text{ou} \quad ay + Cax - (b + Cc)z = 0;$$

si on la mettait sous la forme $mx + ny + pz = 0$, on devrait avoir $mc + nb + pa = 0$. Le facteur $\frac{1}{(cz - ax)^2}$ rend le premier membre une différentielle exacte $d\chi$; il en serait de même des facteurs $\frac{1}{(ay - bx)^2}$, $\frac{1}{(bx - cy)^2}$, etc.

4°. $dx(y^2+yz+z^2) + dy(z^2+zx+x^2) + dz(x^2+xy+y^2) = 0$;

$$M = y^2 + yz + z^2, \quad N = z^2 + zx + x^2, \quad P = x^2 + xy + y^2,$$
$$A = 2z + x - x - 2y = 2(z - y), \quad B = (2x + y - y - 2z) = 2(x - z),$$
$$C = (2y + z - z - 2x) = 2(y - x),$$
$$AM + BN + CP = 2(z^3 - y^3) + 2(x^3 - z^3) + 2(y^3 - x^3) = 0.$$

Regardant z comme constant, il viendra

$$\frac{dx}{x^2 + zx + z^2} + \frac{dy}{y^2 + zy + z^2} = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{2}{z\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{x\sqrt{3}}{2z+x}+\frac{2}{z\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{y\sqrt{3}}{2z+y}$$

$$=\frac{z}{z\sqrt{3}}\,\text{arc tang}\,\frac{(xz+yz+xy)\sqrt{3}}{2z^2+xz+yz-xy}=f(z),$$

on pourra faire

$$\frac{zx+yz+xy}{2z^2+xz+yz-xy}=\chi;$$

différentiant

$$\frac{y^2+yz+z^2)+2zdy(z^2+zx+x^2)-2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+zx+x^2)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi,$$

et remarquant que l'équation proposée donne

$$dx(y^2+yz+z^2)+dy(z^2+zx+x^2)=-dz(x^2+xy+y^2),$$

on aura, en substituant,

$$\frac{-2zdz(x^2+xy+y^2)-2xdz(z^2+yz+y^2)-2ydz(z^2+zx+x^2)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi,$$

ou

$$\frac{-2dz(x^2z+xz^2+y^2z+yz^2+x^2y+xy^2+3xyz)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}$$

$$=\frac{-2dz(x+y+z)(xy+zx+yz)}{(2z^2+zx+yz-xy)^2}=d\chi$$

mais

$$\chi=\frac{xy+zx+yz}{2z^2+zx+yz-xy};$$

on devra donc avoir

$$-\frac{d\chi}{\chi^2}=\frac{2dz(x+y+z)}{xy+zx+yz}.$$

De l'équation qui donne χ on tire

$$1+\chi=\frac{2z^2+2zx+2zy}{2z^2+zx+yz-xy},\quad \frac{1+\chi}{\chi}=\frac{2z(x+y+z)}{xy+zx+yz},$$

et, par conséquent,

$$-\frac{d\chi}{\chi^2}=\frac{2dz(x+y+z)}{xy+zx+zy}=dz\frac{1+\chi}{\chi z},$$

d'où

$$\frac{-d\chi}{\chi(1+\chi)} = -\frac{d\chi}{\chi} + \frac{d\chi}{1+\chi} = \frac{dz}{z},$$

$$1\frac{1+\chi}{\chi} + 1C = 1z, \quad \frac{z}{C} = \frac{1+\chi}{\chi}, \quad \chi = \frac{C}{z-C}.$$

L'intégrale cherchée sera donc

$$\frac{xy+zx+yz}{2z^2+zx+yz-xy} = \frac{C}{z-C},$$

ou

$$xy + zx + yz = C(x+y+z).$$

On voit immédiatement qu'en différentiant l'équation

$$\frac{xy+zx+yz}{x+y+z} = C,$$

on retrouve la proposée, dont le premier membre devient, par conséquent, une différentielle exacte quand on le multiplie par un des deux facteurs

$$\frac{1}{(x+y+z)^2}, \quad \frac{1}{(xy+zx+yz)^2}.$$

Cet exemple montre qu'il est quelquefois assez difficile de calculer la fonction χ; on y serait arrivé plus tôt en procédant comme il suit: de l'équation

$$\frac{xy+zx+yz}{2z^2+zx+yz-xy} = \chi = \mathfrak{f}(z)$$

on tire

$$\frac{1}{\chi} = \frac{2z^2+zx+yz-xy}{xy+zx+yz}, \quad 1+\frac{1}{\chi} = \frac{2z(x+y+z)}{xy+zx+yz},$$

$$\frac{xy+zx+yz}{x+y+z} = \frac{2\chi z}{1+\chi} = f(z) = \psi,$$

et, en différentiant, pour comparer avec la proposée.

$$\psi = \frac{xy+zx+zy}{x+y+z} = C.$$

5°. $dx(x^2-y^2+z^2)-z^2dy+zdz(y-x)+\frac{xdz}{z}(y^2-x^2)=0;$

$$M=x^2-y^2+z^2,\quad N=-z^2,\quad P=z(y-x)+\frac{x}{z}(y^2-x^2),$$

$$A=-3z-\frac{2xy}{z},\quad B=-3z+\frac{y^2}{z}-\frac{3x^2}{z},$$

$$C=-2y,\quad AM+BN+CP=0.$$

En posant $dz=0$, on aura

$$dx(x^2-y^2+z^2)-z^2dy=0;$$

on satisfait à cette équation en faisant $y=x$. Cherchons si l'intégrale générale pourrait être $y=x+\frac{z^2}{u}$; en différentiant et comparant, on trouvera

$$du-\frac{2uxdx}{z^2}=dx;$$

multipliant par $e^{-\frac{x^2}{z^2}}$, intégrant et substituant pour u sa valeur

$$u=\frac{z^2}{y-x},$$

il viendra

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx=\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}z^2}{y-x}+\chi.$$

Il reste à différentier cette dernière équation pour l'identifier avec la proposée ; on aura, de cette manière,

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx+\frac{2dz}{z^3}\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}x^2dx$$
$$=e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{2zdz}{y-x}-\frac{z^2dy+z^2dx}{(y-x)^2}+\frac{2x^2dz-2xzdx}{z(y-x)}\right]+d\chi.$$

A l'aide de l'intégration par partie, on réduira l'intégrale définie du premier membre, dans laquelle on considère z

comme constant ; on a, en effet,

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{z^2}} xz^2 + \tfrac{1}{2} z^2 \int e^{-\frac{x^2}{2z}} dx,$$

ou, puisque

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}} z^2}{y - x} + \chi,$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}} x^2 dx = -\tfrac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{z^2}} xz^2 + \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}} z^4}{2(y-x)} + \tfrac{1}{2}\chi z^2.$$

En substituant, on aura définitivement à comparer à l'équation proposée la suivante

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left(dx - x\frac{dz}{z} + \frac{zdz}{y-x}\right) + \frac{\chi dz}{z}$$

$$= e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{2zdz}{y-x} - \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} - \frac{2xdx}{y-x} + \frac{2x^2 dz}{z(y-x)}\right] + d\chi,$$

ou

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{dx(y+x)}{y-x} - \frac{z^2 dx}{(y-x)^2} + \frac{z^2 dy}{(y-x)^2} - \frac{zdz}{y-x} - \frac{x(y+x)dz}{z(y-x)}\right] = \frac{zd\chi - \chi dz}{z},$$

ou, enfin,

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}}{(y-x)^2}\left[dx(y^2 - x^2 - z^2) + z^2 dy - zdz(y-x) - \frac{xdz}{z}(y^2 - x^2)\right] = \frac{zd\chi - \chi dz}{z}.$$

Il résultera de cette comparaison que l'on devra avoir

$$zd\chi - \chi dz = 0,$$

et par conséquent

$$\chi = Cz.$$

L'intégrale cherchée sera donc

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}z^2}{y-x} + Cz.$$

Euler remarque avec raison que tant que l'intégration n'est pas effectuée, cette intégrale générale reste ambiguë et indéterminée, parce que la constante résultant de l'intégrale indéfinie $\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx$, dans laquelle z est considéré comme constant, doit être une fonction de z. On peut heureusement faire disparaître cette ambiguïté en divisant les deux membres de l'intégrale trouvée par z et posant $\frac{x}{z} = u$; elle devient alors

$$\int e^{-u^2}du + C = e^{-u^2}\frac{z}{y-x}.$$

L'intégration qu'il reste à effectuer est relative à une seule variable et n'amènera qu'une simple constante arbitraire qui s'ajoutera à C. Pour éviter l'ambiguïté dont nous venons de parler, arrivés à l'équation

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}dx = \frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}z^2}{y-x} + \chi,$$

nous aurions pu l'écrire immédiatement sous la forme

$$\int e^{-\frac{x^2}{z^2}}\frac{dx}{z} = \int e^{\left(-\frac{x}{z}\right)^2}d.\frac{x}{z} = e^{-\frac{x^2}{z^2}}\frac{z}{y-x} + \chi,$$

et puisque l'intégrale reste la même, que z soit constant ou variable, on aurait pu différentier immédiatement, par rapport à toutes les variables x, y, z, pour comparer

avec l'équation proposée; ce qui aurait donné

$$e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left(\frac{dx}{z}-x\frac{dz}{z^2}\right)$$

$$=e^{-\frac{x^2}{z^2}}\left[\frac{dz}{y-x}+\frac{zdx-zdy}{(y-x)^2}-\frac{2xdx}{z(y-x)}+\frac{2x^2dz}{z^2(y-x)}\right]+d\chi,$$

d'où

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{z^2}}}{z(y-x)^2}\left[dx(y^2-x^2-z^2)+z^2dy-zdz(y-x)-\frac{xdz}{z}(y^2-x^2)\right]=d\chi,$$

et, par conséquent,

$$d\chi=0,\quad \chi=C, \text{etc.}$$

196. On voit, par ce qui précède, 1° que l'équation du premier ordre n'est pas toujours intégrable, c'est-à-dire qu'elle ne peut pas toujours être considérée comme la différentielle d'une équation à trois variables; 2° que l'intégrale générale, quand elle existe, renferme une constante arbitraire; 3° que l'intégration est possible seulement quand l'équation de condition (a) est satisfaite, et qu'alors elle est ramenée à l'intégration de deux équations différentielles du premier ordre.

Si la condition (a) n'est pas satisfaite, l'intégration devient impossible; l'équation proposée

$$Mdx+Ndy+Pdz=0$$

ne peut plus être considérée comme l'équation différentielle d'une certaine surface; mais il sera toujours vrai de dire qu'elle sera vérifiée par l'ensemble des deux équations

$$\omega=\chi(x),\quad \frac{d\omega}{dx}-\phi\frac{M}{P}=\chi'(x),$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction arbitraire χ. L'é-

quation proposée exprime alors une propriété commune à une infinité de courbes à double courbure représentées par ces deux équations.

Exemples :

1°. $[z(z-a)+y(y-b)]dx-(x-c)(ydy+zdz)=0;$

$$M=z(x-a)+y(y-b),\quad N=-y(x-c),$$
$$P=-z(x-c).$$

L'équation de condition (a) n'est pas satisfaite : en faisant $\varphi=z$, on trouvera

$$w=\frac{z^2+y^2}{2};$$

l'équation proposée sera donc vérifiée par l'ensemble des deux équations

$$\frac{z^2+y^2}{2}=\chi(x),\quad \frac{z(z-a)+y(y-b)}{x-c}=\chi'(x).$$

2°. $ydx+(z-x)dy+(x-z)dz=0;$

$$M=y,\quad N=z-x,\quad P=x-z;$$

la condition (a) n'est pas satisfaite, on a

$$\varphi=1,\quad w=z-y;$$

la proposée sera vérifiée par le système

$$z-y=\chi(x),\quad \frac{-y}{x-z}=\chi'(x).$$

3°. L'équation

$$zdx+xdy+ydz=0$$

est vérifiée par les deux équations réunies

$$z+x\,\mathrm{l}y=\chi(x),\quad \frac{y\,\mathrm{l}y-y}{y}=\chi'(x).$$

Monge a eu le premier l'idée de chercher dans l'ensemble des deux équations

$$\varpi = \chi(x), \quad \frac{d\varpi}{dx} - \varphi\frac{M}{P} = \chi'(x),$$

la solution de la question proposée.

197. On trouve, dans la Mécanique, que certaines propriétés remarquables n'ont lieu qu'autant que le trinôme $Xdx + Ydy + Zdz$ est une différentielle exacte, et l'on est ainsi amené à chercher dans quels cas cette condition est remplie. Or, M. Cauchy est parvenu, depuis plus de quinze ans, à mettre ce trinôme sous une forme telle qu'on puisse reconnaître immédiatement s'il est ou n'est pas une différentielle exacte. En effet, considérons X, Y, Z comme des quantités proportionnelles aux cosinus des angles α, β, γ, qu'une droite mobile fait avec les axes, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos\beta}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z} = \pm\frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} = \frac{1}{R},$$

et concevons qu'après avoir tracé pour chaque point $M(x, y, z)$ la droite qui lui correspond, et pris sur une de ces droites une longueur arbitraire $Mm = r$, on puisse construire une surface normale à toutes ces droites; on trouvera facilement que

$$Xdx + Ydy + Zdz = \pm Rdr.$$

En effet, considérons deux points consécutifs $M(x, y, z)$ et $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, et soient m, m' les points correspondants sur la surface orthogonale; en menant par le point M un plan parallèle à la ligne mm', on formera un triangle rectangle MM'N dans lequel l'hypoténuse MM' est égale à

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2},$$

tandis que le côté opposé à l'angle M est précisément l'accroissement Δr de la longueur r, et l'on aura évidemment

$$\cos M = \frac{\Delta r}{\Delta s} = \pm \frac{X}{R}\frac{\Delta x}{\Delta s} \pm \frac{Y}{R}\frac{\Delta y}{\Delta s} \pm \frac{Z}{R}\frac{\Delta z}{\Delta s},$$

et en passant à la limite,

$$X dx + Y dy + Z dz = \pm R dr.$$

Telle est la forme très-simple qu'on peut donner au trinôme du premier membre; on en conclura immédiatement que ce trinôme sera une différentielle exacte s'il existe un système de surfaces qui coupent à angles droits les directions déterminées par l'équation

$$\frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos 6}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z},$$

et si en chaque point la quantité

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

est une fonction de la distance r.

M. J. Bertrand, qui ignorait sans doute ce que M. Cauchy avait écrit à ce sujet et ce qu'il avait enseigné dans ses Leçons, a repris cette transformation dans le *Journal de l'École Polytechnique*: il démontre que le trinôme $X dx + Y dy + Z dz$ ne sera une différentielle exacte qu'autant que la quantité $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ sera en raison inverse de la distance de deux surfaces orthogonales consécutives. Dans quelques circonstances particulières, cet énoncé sera peut-être d'un emploi plus facile.

198. Lorsque dans l'équation différentielle à trois variables, les différentielles dx, dy, dz seront élevées à des puissances supérieures, on devra la regarder comme impossible toutes les fois qu'elle ne sera pas décomposable

en facteurs du premier degré de la forme

$$Mdx + Ndy + Pdz;$$

car, en effet, si l'équation avait une intégrale, c'est-à-dire si l'on pouvait la considérer comme résultant de la différentiation d'une équation à trois variables

$$F(x, y, z, C) = 0,$$

on devrait pouvoir l'identifier avec la différentielle complète

$$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dy + \frac{dF}{dz}dz = 0;$$

il faudrait, par exemple, qu'après avoir tiré de cette dernière équation la valeur de dz pour la substituer dans la proposée, résolue par rapport à dz, on arrivât à une équation identique $0 = 0$: or c'est ce qui n'aura jamais lieu si les différentielles dx, dy, entrent sous des radicaux, ou sont élevées à des puissances fractionnaires et négatives.

Prenons pour exemple l'équation

$$mdx^2 + ndy^2 + pdz^2 + 2qdxdy + 2rdxdz + 2sdydz = 0;$$

en posant, pour abréger,

$$r^2 - mp = A, \quad rs - pq = B, \quad s^2 - np = C,$$

on trouvera

$$dz = \frac{-rdx - sdy \pm \sqrt{Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2}}{q},$$

et l'on en conclura que l'équation proposée sera absurde ou non intégrable, tant que la quantité sous le radical ne sera pas un carré parfait, c'est-à-dire tant qu'on n'aura pas $B^2 = AC$.

199. Disons seulement un mot des équations différentielles à plus de trois variables, ou de la forme

$$Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + Rdv + \text{etc}\ldots, = 0,$$

M, N, P, Q, R,..., étant des fonctions des variables x, y, z, u, v,..., dans le cas où l'on pourra regarder cette équation comme provenant d'une équation primitive

$$F(x, y, z, u, v\ldots) = 0;$$

une quelconque des variables, z par exemple, devra être considérée comme une fonction de toutes les autres qui demeureront indépendantes, et l'on aura

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy + \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv + \text{etc.};$$

mais de l'équation proposée on tire

$$dz = -\frac{M}{P}dx - \frac{N}{P}dy - \frac{Q}{P}du - \frac{R}{P}dv + \text{etc.};$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{M}{P}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{N}{P},$$
$$\frac{dz}{du} = -\frac{Q}{P}, \quad \frac{dz}{dv} = -\frac{R}{P}, \text{ etc.},$$

et, par conséquent,

$$D_y\frac{M}{P} = D_x\frac{N}{P}, \quad D_u\frac{M}{P} = D_x\frac{Q}{P}, \quad D_v\frac{M}{P} = D_x\frac{R}{P},\ldots,$$
$$D_u\frac{N}{P} = D_y\frac{Q}{P}, \quad D_v\frac{N}{P} = D_y\frac{R}{P},\ldots, \quad D_v\frac{Q}{P} = D_u\frac{R}{P},\ldots.$$

En développant ces équations, et substituant pour $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{du}$,..., leurs valeurs, on obtiendra les conditions auxquelles devront satisfaire les fonctions M, N, P, Q,..., pour que l'équation proposée soit intégrable. Si le nom-

bre de variables se réduisait à trois, il n'y aurait qu'une seule équation de condition,

$$D_y\frac{M}{P} = D_x\frac{N}{P};$$

il y en aurait trois,

$$D_y\frac{M}{P} = D_x\frac{N}{P},\quad D_u\frac{M}{P} = D_x\frac{Q}{P},\quad D_u\frac{N}{P} = D_y\frac{Q}{P},$$

s'il y avait quatre variables, x, y, z, u. En général, si n est le nombre des variables, le nombre des équations de condition sera égal au nombre des combinaisons deux à deux des $(n-1)$ dérivées D_xz, D_yz, D_uz,..., c'est-à-dire à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Dans le cas où le premier membre de l'équation

$$Mdx + Ndy + Pdz + Qdu + Rdv + \ldots = 0$$

a été ramené à être une différentielle exacte, ce qui a lieu lorsqu'on a

$$\begin{aligned} D_yM &= D_xN, \quad D_zM = D_xP, \ldots, \quad D_vM = D_xR, \\ D_zN &= D_yP, \quad D_zN = D_vP, \ldots, \quad D_vQ = D_uR, \ldots, \end{aligned}$$

on trouvera, en posant

$$\begin{aligned} M &= F_1(x,\ y,\ z,\ldots,\ v), \quad N = F_2(x,\ y,\ z,\ldots,\ v), \\ P &= F_3(x,\ y,\ z,\ldots,\ v), \quad Q = F_4(x,\ y,\ z,\ldots,\ v),\ldots, \end{aligned}$$

et procédant comme dans le n° 193, que l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\int_{x_0}^{x} F_1(x, y, z,\ldots, v)dx + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, y, z,\ldots, v)dy$$
$$+ \int_{z_0}^{z} F_3(x_0, y_0, z,\ldots, v)dz + \int_{u_0}^{u} F_4(x_0, y_0, z_0,\ldots, v)du = C.$$

200. Alors même que le premier membre de l'équation proposée ne pourrait pas être ramené à une différentielle exacte si les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ équations de condition sont satisfaites, on pourra l'intégrer en suivant une marche tout à fait analogue à celle que nous avons employée dans le cas de trois variables. Supposons, par exemple, qu'il faille intégrer l'équation

$$z(y+z)dx + z(u-x)dy + y(x-u)dz + y(y+z)du = 0.$$

Les fonctions

$$M = yz + z^2, \quad N = zu - xz, \quad P = xy - yu, \quad Q = y^2 + yz,$$

satisfont aux équations de conditions; dès lors, pour intégrer, supposons un instant que u et z sont constants, c'est-à-dire posons

$$du = 0, \quad dz = 0,$$

l'équation deviendra

$$\frac{dx}{u-x} + \frac{dy}{y+z} = 0;$$

et aura pour intégrale

$$\frac{y+z}{u-x} = \chi = f(z, u);$$

en différentiant par rapport à x, y, z, u, on trouvera

$$\frac{(y+z)dx + (u-x)dy + (u-x)dz - (y+z)du}{(u-x)^2} = d\chi.$$

Mais de l'équation proposée, on tire

$$(y+z)dx + (u-x)dy = \frac{y(u-x)dz - y(y+z)du}{z};$$

donc

$$\frac{y+z}{u-x}dz - \left(\frac{y+z}{u-x}\right)^2 = zd\chi,$$

ou

$$\chi dz - \chi^2 du = zd\chi, \qquad \frac{\chi dz - zd\chi}{\chi^2} = du,$$

$$\frac{z}{\chi} = u + C, \qquad \chi = \frac{z}{u+C};$$

l'intégrale de l'équation proposée sera donc

$$\frac{y+z}{u-x} = \frac{z}{u+C}.$$

TRENTE-TROISIÈME LEÇON.

De l'intégration d'un système de n équations simultanées du premier ordre, à $n+1$ différentielles, ou à n dérivées.

---

201. Nous avons fait voir comment on pouvait, dans tous les cas, intégrer, soit exactement, soit par approximation, l'équation différentielle du premier ordre et du premier degré

$$dy = f(x, y)dx.$$

Supposons maintenant qu'on donne n équations différentielles du premier ordre entre $n+1$ variables t, $x, y, z, \ldots, v$, et leurs $n+1$ différentielles dt, dx, dy, $dz, \ldots$, dv, ou les n dérivées $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \ldots, \frac{dv}{dt}$. La forme générale de ces équations serait

$$L_1dt + M_1dx + N_1dy + P_1dz + \ldots + R_1dv = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$L_ndt + M_ndx + N_ndy + P_ndz + \ldots + R_ndv = 0;$$

mais on peut, dans tous les cas, les ramener, par une simple élimination, à la forme

$$dx = F_1(t, x, y, z, \ldots, v)dt, \quad dz = F_2(t, x, y, z, \ldots, v)dt, \ldots,$$
$$dv = F_n(t, x, y, z, \ldots, v)dt,$$

et il s'agit de prouver qu'il existe réellement un système de valeurs $x = f_1(t)$, $z = f_2(t), \ldots$, $v = f_n(t)$, qui

jouissent de la double propriété de vérifier les équations proposées, et de prendre pour $t = t_0$ des valeurs déterminées x_0, y_0, $z_0, \ldots, v_0$. Or il est facile de démontrer l'existence de ces valeurs dans le cas où les fonctions F_1, F_2, $F_3, \ldots, F_n$ restent finies et continues ainsi que leurs dérivées par rapport à x, y, $z, \ldots, v$, $D_x F_1$, $D_y F_1, \ldots$, $D_v F_1$, $D_x F_2, \ldots, D_v F_2$, etc. Pour y parvenir, il suffit de procéder comme dans la vingt-sixième leçon et de calculer n quantités X, Y, Z,..., V, à l'aide des équations

$$x_1 - x_0 = (t_1 - t_0) F_1(t_0, x_0, \ldots, v_0), \quad x_2 - x_1 = (t_2 - t_1) F_1(t_1, x_1, \ldots, v_1), \ldots,$$
$$X - x_{n-1} = (T - t_{n-1}) F_1(t_{n-1}, x_{n-1}, \ldots, v_{n-1}),$$
$$y_1 - y_0 = (t_1 - t_0) F_2(t_0, x_0, \ldots, v_0), \quad y_2 - y_1 = (t_2 - t_1) F_2(t_1, x_1, \ldots, v_1), \ldots,$$
$$Y - y_{n-1} = (T - t_{n-1}) F_2(t_{n-1}, x_{n-1}, \ldots, v_{n-1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

car les quantités X, Y, Z,..., V, tirées des équations qui précèdent, jouissent des trois propriétés suivantes : I. Elles sont des fonctions continues des constantes x_0, $y_0, \ldots, v_0$, en ce sens que, pour des valeurs déterminées de ces constantes, elles prennent une valeur unique et déterminée, et que les variations qu'elles subissent quand on fait croître ou décroître les constantes d'une quantité très-petite, sont elles-mêmes très-petites. II. Les quantités X, Y, Z,..., V, convergent à mesure que les éléments de la différence $T - t_0$ diminuent indéfiniment vers des limites finies

$$f_1(T, t_0, x_0, \ldots, v_0), \; f_2(T, t_0, x_0, \ldots, v_0), \; f_n(T, t_0, x_0, \ldots, v_0).$$

III. Les valeurs x, $y, \ldots, v$, des quantités X, Y,..., V, correspondantes à $T = t$, c'est-à-dire les quantités

$$x = f_1(t, t_0, x_0, y_0, \ldots, v_0), \ldots, \quad v = f_n(t, t_0, x_0, y_0, \ldots, v_0),$$

vérifient les équations différentielles proposées, et se réduisent, pour $t = t_0$, aux constantes ou valeurs initiales

des variables, x_0, y_0,..., v_0. Mettons tour à tour en évidence ces propriétés remarquables.

202. Ire *Propriété*. Les quantités X, Y, Z,..., V, sont des fonctions continues des constantes x_0, y_0, z_0,... Donnons à ces constantes des accroissements très-petits α_0, β_0, γ_0,..., que nous pourrons mettre sous la forme

$$\alpha_0 = \rho_0 \cos\lambda_0,\quad \beta_0 = \rho_0\cos\mu_0,\quad \gamma_0 = \rho_0\cos\nu_0,\ldots,$$

en assujettissant le module ρ_0 et les angles ou paramètres λ_0, μ_0, ν_0,... à vérifier les équations de condition

$$\rho_0 = \sqrt{\alpha_0^2+\beta_0^2+\gamma_0^2+\ldots},\ \cos^2\lambda_0+\cos^2\mu_0+\cos^2\nu_0+\ldots=1.$$

Les accroissements des quantités x_m, y_m, z_m,..., X, Y, Z,..., pourront être représentés par des expressions de même forme

$$\rho_m\cos\lambda_m,\quad \rho_m\cos\mu_m,\quad \rho_m\cos\nu_m,\ldots,$$
$$\rho_n\cos\lambda_n,\quad \rho_n\cos\mu_n,\quad \rho_n\cos\nu_n,\ldots.$$

Comme on a, d'ailleurs,

$$x_{m+1}-x_m=(t_{m+1}-t_m)\mathrm{F}_1(t_m,\ x_m,\ y_m,\ldots),$$
$$y_{m+1}-y_m=(t_{m+1}-t_m)\mathrm{F}_2(t_m,\ x_m,\ y_m,\ldots),\ldots,$$

en changeant x_0, y_0, z_0,..., en $x_0+\alpha_0$, $y_0+\beta_0$, $z_0+\gamma_0$, on aura

$$x_{m+1}+\rho_{m+1}\cos\lambda_{m+1}-x_m-\rho_m\cos\lambda_m$$
$$=(t_{m+1}-t_m)\mathrm{F}_1(t_m,\ x_m+\rho_m\cos\lambda_m+\ldots),$$

et, en faisant

$$\rho_m\xi_m=\mathrm{F}_1(t_m,\ x_m+\rho_m\cos\lambda_m,\ y_m+\rho_m\cos\mu_m+\ldots)$$
$$-\mathrm{F}_1(t_m,\ x_m,\ y_m,\ldots),$$
$$\rho_{m+1}\cos\lambda_{m+1}=\rho_m[\cos\lambda_m+\xi_m(t_{m+1}-t_m)].$$

En posant

$$\rho_m\eta_m=\mathrm{F}_2(t_m,\ x_m+\rho_m\cos\lambda_m,\ldots)-\mathrm{F}_2(t_m,x_m,\ldots),\ \rho_m\zeta_m=\mathrm{F}_3(.\ .),$$

on trouvera de même

$$\rho_{m+1}\cos\mu_{m+1} = \rho_m[\cos\mu_m + \eta_m(t_{m+1} - t_m)],$$
$$\rho_{m+1}\cos\nu_{m+1} = \rho_m[\cos\nu_m + \zeta_m(t_{m+1} - t_m)],$$

et en carrant, ajoutant, et ayant égard à l'équation

$$\cos^2\lambda_m + \cos^2\mu_m + \cos^2\nu_m + \ldots = 1,$$

$$\rho_{m+1}^2 = \rho_m^2[1 + 2(t_{m+1} - t_m)(\xi_m\cos\lambda_m + \eta_m\cos\mu_m + \ldots)$$
$$+ (t_{m+1} - t_m)(\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots)].$$

Or, la valeur maximum (*) de la somme

$$\xi_m\cos\lambda_m + \eta_m\cos\mu_m + \ldots$$

(*) En effet, si l'on a à la fois

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z + \ldots = 1,$$
$$u = a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots,$$

on aura évidemment

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots = (a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots)^2$$
$$+ (a\cos y - b\cos x)^2 + (a\cos z - c\cos x)^2 + \ldots + (b\cos z - c\cos y)^2 + \ldots,$$
$$u^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots - (a\cos y - b\cos x)^2 - (a\cos z - c\cos x)^2 - \ldots$$

Donc la plus grande valeur numérique de u^2 sera $a^2 + b^2 + c^2, \ldots$; et la plus grande valeur de u, $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$; u d'ailleurs atteindra son maximum quand on aura

$$a\cos y - b\cos x = 0, \quad a\cos z - c\cos x = 0, \quad b\cos z - c\cos y = 0, \ldots,$$

ou

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c} = \ldots$$

Or, de ces dernières équations on tire

$$\frac{a\cos x + b\cos y + c\cos z + \ldots}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots} = \frac{u}{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}$$
$$= \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma + \ldots}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}},$$

et, par suite,

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \ldots}.$$

C'est bien la valeur maximum trouvée directement.

est $\sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots}$; donc

$$\rho_{m+1}^2 < \rho_m^2\left[1 + 2(t_{m+1} - t_m)\sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 \ldots} + (t_{m+1} - t_m)^2(\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots)\right],$$

$$\rho_{m+1} < \rho_m\left[1 + (t_{m+1} - t_m)\sqrt{\xi_m^2 + \eta_m^2 + \ldots}\right].$$

Désignons par φ_1, χ_1, $\psi_1, \ldots$, φ_2, χ_2, $\psi_2, \ldots$ les dérivées des fonctions F_1, F_2, $F_3, \ldots$, prises par rapport à x, y, $z, \ldots$; on aura, en vertu d'une formule connue de calcul différentiel,

$$\begin{aligned}\rho_m\xi_m &= F_1(t_m, x_m + \rho_m\cos\lambda_m, y_m + \rho_m\cos\mu_m, \ldots) - F_1(t_m, x_m, y_m, \ldots)\\ &= \rho_m\cos\lambda_m\varphi_1(t_m, x_m + \theta\rho_m\cos\lambda_m, y_m + \theta\rho_m\cos\mu_m, \ldots)\\ &\qquad + \rho_m\cos\mu_m\chi_1(\ldots) + \rho_m\cos\nu_m\psi_1(\ldots)\ldots\end{aligned}$$

Le second membre de cette équation est évidemment une valeur moyenne de la somme

$$\begin{aligned}&\rho_m\cos\lambda_m\varphi_1(t, x, y + \ldots) + \rho_m\cos\mu_m\chi_1(t, x, y, z, \ldots)\\ &\qquad + \rho_m\cos\nu_m\psi_1(t, x, y, z, \ldots),\end{aligned}$$

qui est toujours plus petite que

$$\rho_m\sqrt{\varphi_1^2 + \chi_1^2 + \psi_1^2 + \ldots};$$

donc, si entre certaines limites t_0 et $t_0 + \tau$, les dérivées φ_1, χ_1, $\psi_1, \ldots$ restent continues et finies et ne dépassent pas une limite fixe l, on aura, en désignant par N le nombre de ces fonctions, $\xi_m^2 < \mathrm{N}\mathrm{l}^2$; on trouverait de même, en désignant par m, n,... les limites finies supérieures des fonctions dérivées,

$$\varphi_2, \chi_2, \psi_2, \ldots, \quad \varphi_3, \chi_3, \psi_3, \ldots, \quad \eta_m^2 < \mathrm{N}\mathrm{m}^2, \quad \zeta_m^2 < \mathrm{N}\mathrm{n}^2;$$

donc

$$\xi_m^2 + \eta_m^2 + \zeta_m^2 + \ldots < \mathrm{N}(\mathrm{l}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 + \ldots),$$

et, par conséquent,

$$\rho_{m+1} < \rho_m[1 + (t_{m+1} - t_m)]\mathrm{N}^{\frac{1}{2}}\sqrt{\mathrm{l}^2 + \mathrm{m}^2 + \mathrm{n}^2 + \ldots},$$

ou, en posant

$$N^{\frac{1}{2}}\sqrt{l^2+m^2+n^2+\ldots}=K,\quad \rho_{m+1}<\rho_m[1+K(t_{m+1}-t_m)];$$

en faisant tour à tour dans cette équation, $m=0$, $m=1$, $m=2,\ldots$, $m=n$, on trouvera

$$\rho_1<\rho_0[1+K(t_1-t_0)],\quad \rho_2<\rho_1[1+K(t_2-t_1)],\ldots,$$
$$\rho_n<\rho_{n-1}[1+K(T-t_{n-1})],$$

et, en multipliant,

$$\rho_n<\rho_0[1+K(t_1-t_0)][1+K(t_2-t_1)]\ldots[1+K(T-t_{n-1})].$$

On prouverait facilement que le produit du second membre est inférieur à l'exponentielle $e^{K(T-t_0)}$, quantité finie, que nous pouvons représenter par L : donc $\rho_n<L\rho_0$; donc le rapport de ρ_n à ρ_0 est réellement une quantité finie; donc X, Y, Z,..., qui d'ailleurs pour chaque valeur attribuée aux constantes x_0, y_0, z_0,... prennent une valeur unique et déterminée, croissent ou décroissent de quantités très-petites $\rho_n\cos\lambda_n$, $\rho_n\cos\mu_n$,..., quand on fait croître ou décroître x_0, y_0, z_0,..., de quantités très-petites $\rho_0\cos\lambda_0$, $\rho_0\cos\mu_0$,..., et sont, par conséquent, des fonctions continues de ces mêmes constantes.

203. IIe *Propriété*. A mesure que les éléments de la différence $T-t_0$ diminuent indéfiniment, X, Y, Z,... convergent vers des limites finies

$$f_1(T,t_0,x_0,y_0,z_0,\ldots),\quad f_2(T,t_0,x_0,y_0,z_0,\ldots).$$

En effet, quand on suppose ces éléments réduits à un seul qui est cette différence elle-même, on a simplement

$$X=x_0+(T-t_0)F_1(t_0,x_0,y_0,\ldots),$$
$$Y=y_0+(T-t_0)F_2(t_0,x_0,y_0,\ldots),\ldots.$$

Lorsqu'au contraire la différence $T-t_0$ est partagée en

n éléments $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$, $T - t_{n-1}$, on a

$$X - x_0 = (t_1 - t_0)F_1(t_0, x_0, y_0, \ldots) + (t_2 - t_1)F_1(t_1, x_1, y_1, \ldots) + \ldots,$$

et parce que le second membre est évidemment compris entre les limites $-(T - t_0)A$, $+(T - t_0)A$, A étant la plus grande des valeurs de $F_1(t, x, y, z, \ldots)$ entre les limites t_0, T, il s'ensuivra que X sera compris entre les limites $x_0 - A(T - t_0)$, $x_0 + A(T - t_0)$; on prouvera de la même manière que Y, Z,... sont comprises entre les limites $y_0 \mp B(T - t_0)$, $z_0 \mp C(T - t_0), \ldots$, B, C désignant les valeurs maximum des fonctions

$$F_2(t, x, y, z, \ldots), \quad F_3(t, x, y, z, \ldots).$$

Il en résulte immédiatement que toutes les valeurs que prennent, entre les limites t_0 et T, les fonctions $F_1, F_2, \ldots$, sont des valeurs particulières des expressions

$$F_1[t_0 + \theta(T - t_0),\ x_0 \pm \theta_1 A(T - t_0),\ y_0 \pm \theta_2 B(T - t_0) \ldots],$$
$$F_2[t_0 + \theta(T - t_0),\ x_0 \pm \theta_1 A(T - t_0),\ y_0 \pm \theta_2 B(T - t_0) \ldots],$$

dans lesquelles θ, θ_1, θ_2, ...représentent des nombres compris entre o et 1. On a d'ailleurs évidemment

$$F_1[t_0 + \theta(T - t_0),\ x_0 \pm \theta_1 A(T - t_0),\ y_0 \pm \theta_2 B(T - t_0) \ldots] - F_1(t_0, x_0, y_0, z_0, \ldots) = \varepsilon_1,$$

ε_1 désignant une quantité qui s'évanouit avec la différence $T - t_0$; et, puisque les différences $X - x_0$, $Y - y_0, \ldots$ sont égales au produit de $T - t_0$ par une valeur moyenne des fonctions F_1, $F_2, \ldots$, on aura

$$X = x_0 + (T - t_0)F_1(t_0, x_0, y_0, \ldots) + (T - t_0)\varepsilon_1,$$
$$Y = y_0 + (T - t_0)F_2(t_0, x_0, y_0, \ldots) + (T - t_0)\varepsilon_2 + \ldots,$$

et l'on en conclura que l'effet de la division de l'intervalle $T - t_0$ en n éléments $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1, \ldots$, a pour effet d'ajouter aux valeurs de X, Y, Z,..., des termes

$$(T - t_0)\varepsilon_1, \quad (T - t_0)\varepsilon_2, \ldots,$$

dans lesquels les coefficients ε_1, ε_2,... s'évanouissent eux-mêmes avec la différence $T - t_0$. Supposons maintenant qu'on divise à leur tour les intervalles $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,... en de nouveaux éléments, et ne considérons d'abord que l'élément $t_1 - t_0$; les quantités x_1, y_1, $z_1, \ldots$, x_2, y_2, $z_2, \ldots$, subiront des variations analogues à celles qu'éprouvaient Y, Z,... dans la division de l'intervalle $T - t_0$, et deviendront

$$x_1 \pm \iota'(t_1 - t_0), \quad y_1 \pm \iota''(t_1 - t_0), \ldots.$$

En posant

$$\rho' = \sqrt{\iota'^2 + \iota''^2 + \ldots},$$

chacun des nombres ε', ε'',... pourra être représenté par une expression de la forme $\rho' \cos\lambda'$,... On en conclura que la somme des accroissements de x_1, y_1, z_1,... sera inférieure au produit $\rho'(t_1 - t_0)$, ρ' étant un nombre qui, ainsi que ε', ε'',..., s'évanouit avec $t_1 - t_0$, et l'on prouverait, en raisonnant comme nous l'avons déjà fait, que la subdivision de l'élément $t_1 - t_0$ ferait varier X d'une quantité inférieure à l'expression $L'\rho'(t_1 - t_0)$,... La subdivision des éléments $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$,... fera de même croître ou décroître X de quantités inférieures aux expressions $L''\rho''(t_2 - t_1)$, $L'''\rho'''(t_3 - t_2)$,..., dans lesquelles les coefficients ρ'', ρ''',... s'évanouissent avec les différences $t_2 - t_1$, $t_3 - t_2$,... Dès lors, la variation totale que la subdivision de tous les éléments $t_1 - t_0$, $t_2 - t_1$,... fait subir à X, et par conséquent aussi à Y, Z,..., sera une expression de la forme

$$L(T - t_0)\rho,$$

ρ étant une moyenne entre les coefficients ρ', ρ'', ρ''',..., et s'évanouissant avec les éléments de la subdivision. Donc on n'altère pas sensiblement les valeurs de X, Y,

$Z,\ldots$ correspondantes à un mode de division dans lequel les éléments de la différence $T - t_0$ ont des valeurs numériques très-petites, si l'on passe à un second mode dans lequel chacun de ces éléments se trouve subdivisé en plusieurs autres. On étendra facilement cette conclusion au cas où les éléments du second mode de division ne seraient plus des subdivisions du premier, et il restera démontré par là que, lorsque les éléments de la différence $T - t_0$ sont très-petits, le mode de division n'a qu'une influence insensible; et que, par conséquent, si l'on fait décroître indéfiniment les valeurs numériques de ces éléments en augmentant leur nombre, les quantités $X, Y, Z,\ldots$ convergeront vers des limites fixes $f_1(T, t_0, x_0, y_0, z_0,\ldots)$, $f_2(T, t_0, x_0, y_0,\ldots),\ldots$, dépendantes uniquement de la forme des fonctions $F_1, F_2,\ldots$, et des constantes T, t_0, x_0, y_0, $z_0,\ldots$.

204. IIIe *Propriété*. Si dans les valeurs de $X, Y, Z,\ldots$ on remplace T par t, on obtiendra des fonctions x, y, $z,\ldots$, de t,

$$x = f_1(t, t_0, x_0, y_0,\ldots), \quad y = f_2(t, t_0, x_0, y_0,\ldots)\ldots,$$

qui, pour $t = t_0$, se réduiront à $x_0, y_0, z_0,\ldots$ et vérifieront les équations différentielles proposées. En effet, nous avons trouvé

$$X - x_0 = (T - t_0)F_1(t_0, x_0, y_0,\ldots) + (T - t_0)\varepsilon_1,$$
$$Y - y_0 = (T - t_0)F_2(t_0, x_0, y_0,\ldots) + (T - t_0)\varepsilon_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et l'on en conclura, en changeant T en t, et faisant $t = t_0$,

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0,\ldots.$$

De plus, le raisonnement qui nous a conduit aux valeurs précédentes des différences

$$X - x_0, \quad Y - y_0,\ldots$$

nous aurait donné l'équation suivante :

$$X - x_m = (T - t_m) F_1(t_m, x_m, y_m, \ldots) + (T - t_m)\,\iota',$$
$$Y - y_m = (T - t_m) F_2(t_m, x_m, y_m, \ldots) + (T - t_m)\,\iota'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

dans laquelle t_m désigne une valeur de t comprise entre t_0 et $t_0 + \tau$. Or, si dans ces équations on fait

$$t_m = t, \quad T = t + h, \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \ldots,$$

on aura

$$x_m = f_1(t), \quad X = f_1(t+h),$$
$$y_m = f_2(t), \quad Y = f_2(t+h), \ldots,$$

et il viendra

$$f_1(t+h) - f_1(t) = hF_1[t_1, f_1(t), f_2(t), \ldots] + \iota' h,$$
$$f_2(t+h) - f_2(t) = hF_2[t, f_1(t), f_2(t), \ldots] + \iota'' h,$$

et si, après avoir divisé par h, on passe à la limite, on trouvera

$$f'_1(t)\,dt = df_1(t) = dx = F_1(t, x, y, z, \ldots),$$
$$f'_2(t)\,dt = d f'_2(t) = dy = F_2(t, x, y, z, \ldots), \ldots,$$

et ces dernières équations expriment évidemment que les fonctions

$$x = f_1(t) = f_1(t, x_0, y_0, \ldots), \; y = f_2(t) = f_2(t, x_0, y_0, \ldots),$$

vérifient les équations différentielles proposées.

205. Lors donc qu'entre les limites t_0 et $t_0 + \tau$, les fonctions $F_1, F_2, \ldots$, ainsi que leurs dérivées par rapport à $x, y, z, \ldots$, restent finies et continues, il existe des fonctions $x, y, z, \ldots$ de t et des constantes t_0, x_0, y_0, $z_0, \ldots$, qui vérifient les équations différentielles proposées et prennent pour $t = t_0$ les valeurs initiales données x_0, y_0, $z_0, \ldots$. Mais il peut arriver qu'entre les limites t_0 et $t_0 + \tau$, les fonctions F_1, $F_2, \ldots$, et leurs dérivées, ne soient finies et continues que pour des valeurs

de x, y, z,..., comprises entre des limites déterminées

$$x_0 \text{ et } x_0 \pm a, \quad y_0 \text{ et } y_0 \pm b, \quad z_0 \text{ et } z_0 \pm c, \ldots :$$

or les propriétés que nous venons d'énoncer pourront continuer de subsister, même dans ce cas, pourvu qu'en appelant A, B, C,... les limites des valeurs absolues des fonctions F_1, F_2,..., F_n, on choisisse T de manière à satisfaire aux inégalités

$$T - t_0 < \tau, \quad A(T - t_0) < a, \quad B(T - t_0) < b, \ldots.$$

Alors, en effet, la valeur de x_1, déterminée par l'équation

$$x_1 = x_0 + (t_1 - t_0) F_1(x_0, y_0, z_0, \ldots),$$

comprise entre les limites $x_0 \pm A(t_1 - t_0)$, sera comprise, à plus forte raison, entre les limites $x_0 \pm a$, et il en sera de même de x_2, x_3,..., x_{n-1}, X. Les quantités y_1, y_2,..., y_{n-1}, Y; z_1, z_2,..., z_{n-1}, Z,... seront aussi respectivement comprises entre les limites $y_0 \pm b$, $z_0 \pm c$,....

De plus, si, en désignant par α_0, β_0, γ_0,... les accroissements des valeurs initiales x_0, y_0, z_0,..., on assujettit T à vérifier les inégalités

$$A(T - t_0) + \alpha_0 < a, \quad B(T - t_0) + \beta_0 < b, \quad C(T - t_0) + \gamma_0 < c,$$

les nouvelles valeurs de x_1, y_1,..., x_n, y_n,..., déterminées par les équations

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \alpha_0 + (t_1 - t_0) F_1(t_0, x_0 + \alpha_0, \ldots), \ldots, & x_2 &= \ldots, \\ y_1 &= y_0 + \beta_0 + (t_1 - t_0) F_2(t_0, x_0 + \alpha_0, \ldots), & y_2 &= \ldots, \end{aligned}$$

seront elles-mêmes comprises entre les limites $x_0 \pm a$, $y_0 \pm b$.... Donc puisque toutes les valeurs de x, y, z,... que l'on considère dans les théorèmes dont il s'agit sont renfermées entre les limites $x_0 \pm a$, $y_0 \pm b$,..., les fonctions F_1, F_2,..., ainsi que leurs dérivées, resteront finies et continues pour toute valeur de t plus petite que $t_0 + \tau$. Or c'est la condition nécessaire et suffisante pour que les

propriétés énoncées continuent de subsister. Donc alors encore on pourra calculer exactement, ou par approximation, les quantités $f_1(\mathrm{T}, t_0, x_0, \ldots)$, $f_2(\mathrm{T}, t_0, x_0, \ldots)$, et, par suite, les valeurs $f_1(t, t_0, x_0, \ldots), \ldots$ de x, y, z, propres à vérifier les équations différentielles proposées.

206. Supposons que les valeurs $x = 0$, $y = 0, \ldots$, vérifient les équations proposées, on aura nécessairement, dans cette hypothèse,

$$\mathrm{F}_1(t, 0, 0, 0, \ldots) = 0, \quad \mathrm{F}_2(t, 0, 0, 0, \ldots) = 0, \ldots,$$

c'est-à-dire que les fonctions F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots$ s'évanouiront pour $x = 0$, $y = 0$, $z = 0, \ldots$, quel que soit t. Alors aussi, en faisant $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0, \ldots$ dans les équations qui donnent les valeurs de X, Y, Z,..., on trouvera

$$\mathrm{X} = 0, \quad \mathrm{Y} = 0, \quad \mathrm{Z} = 0, \ldots,$$

et par conséquent

$$x = \lim.\mathrm{X} = 0, \quad y = \lim.\mathrm{Y} = 0, \ldots,$$

si les fonctions F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots$ sont continues et finies, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, y, $z, \ldots$. Nous avons vu en effet que, dans ce cas, les quantités X, Y, Z étaient elles-mêmes des fonctions continues des constantes x_0, y_0, $z_0, \ldots$. Donc, sous la seule condition que les fonctions F_1, $\mathrm{F}_2, \ldots$ sont continues et toujours finies, on déduira les valeurs $x = 0$, $y = 0, \ldots$ des intégrales générales en donnant aux constantes arbitraires x_0, y_0, $z_0, \ldots$ les valeurs particulières $x_0 = 0$, $y_0 = 0, \ldots$, ce qui démontre que $x = 0$, $y = 0, \ldots$ sont des intégrales particulières du système d'équations différentielles proposé.

207. Reprenons les équations

$$x = f_1(t, t_0, x_0, y_0, \ldots), \quad y = f_2(t, t_0, x_0, y_0, \ldots), \ldots$$

ou simplement

$$x = f_1(t, x_0, y_0, \ldots), \quad y = f_2(t, x_0, y_0, \ldots), \ldots,$$

dont l'ensemble satisfait aux équations différentielles proposées, et forme ce que nous pouvons appeler un système d'intégrales générales de ces mêmes équations. Il sera impossible d'éliminer entre ces intégrales les constantes x_0, y_0,... et d'arriver à une relation de la forme $\varphi(t, x, y, z,...)$ indépendante de ces constantes; car, en faisant $t = t_0$, on aurait

$$x = x_0, \quad y = y_0, \ldots,$$

et, par suite,

$$\varphi(t_0, x_0, y_0, \ldots) = 0,$$

ce qui est absurde, puisque les constantes t_0, x_0,... sont entièrement arbitraires. Si l'on faisait

$$x_0 = C_1, \quad y_0 = C_2, \ldots,$$

le système d'intégrales générales deviendrait

$$x = f_1(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$
$$y = f_2(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \ldots,$$

et il sera toujours possible de le ramener à la forme

$$C_1 = u_1, \quad C_2 = u_2, \ldots, \quad C_n = u_n,$$

u_1, u_2,..., u_n étant des fonctions des seules variables t, x, y,... En effet, supposons que de l'une des équations

$$x = f_1(t, C_1, C_2, \ldots), \quad y = f_2(t, C_1, C_2, \ldots), \ldots,$$

on tire la valeur de C_1, pour la substituer dans toutes les autres : on arrivera nécessairement de cette manière à $n - 1$ équations renfermant $n - 1$ constantes, car, s'il y avait moins de $n - 1$ constantes, on pourrait les éliminer et arriver à une relation de la forme

$$\varphi(t, x, y, \ldots) = 0,$$

ce que nous avons démontré impossible.

De même, si, entre les $n - 1$ équations restantes, on

élimine C_2, il restera nécessairement $n - 2$ équations avec $n - 2$ constantes. En continuant ainsi, on arrivera à une dernière équation renfermant une seule constante C_n, et qui donnera $C_n = u_n$, u_n étant une fonction des seules variables t, x, y,..., et, en remontant de proche en proche, on aura

$$C_{n-1} = u_{n-1}, \quad C_{n-2} = u_{n-2}, \ldots, \quad C_1 = u_1, \ldots;$$

donc le système d'intégrales générales des équations différentielles proposées peut réellement être mis sous la forme

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad u_3 = C_3, \ldots, \quad u_n = C_n;$$

C_1, C_2,... désignant des constantes arbitraires.

Réciproquement, si l'on tire de ces dernières équations les valeurs de x, y, z,..., elles vérifieront les équations différentielles proposées, et de plus, ces valeurs de x, y, z,... ne pourront satisfaire à aucune équation de condition indépendante des constantes arbitraires C_1, C_2,..., car si en effet elles pouvaient satisfaire à une équation de la forme

$$\varphi(t, x, y, z, \ldots) = 0,$$

il s'ensuivrait que cette dernière ne serait qu'une combinaison des équations

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \ldots,$$

et pourrait être substituée à l'une d'entre elles. On arriverait donc aux mêmes valeurs de x, y, z,..., soit qu'on les déduise du système $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$,... de n équations renfermant n constantes distinctes, soit qu'on les détermine à l'aide de $n - 1$ équations renfermant $n - 1$ constantes auxquelles on joindrait l'équation

$$\varphi(t, x, y, \ldots) = 0.$$

Or cette conclusion est évidemment absurde, car les

premières valeurs de x, y, z,... renfermeront n constantes, tandis que les secondes n'en renfermeront que $n - 1$. Il est donc vrai que l'ensemble des équations

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \ldots, \quad u_n = C_n,$$

forme un système d'intégrales générales des équations proposées, parce qu'il jouit de la double propriété de renfermer n constantes arbitraires, et de fournir des valeurs de x, y, z,... qui vérifient les équations données, sans satisfaire à aucune équation indépendante des constantes.

Pour montrer combien cette dernière restriction est essentielle, considérons le système suivant d'équations différentielles

$$(z - t)dx = (x - y)dt, \quad (z - t)dy = (x - y)dt,$$
$$dz = (x - y + 1)dt:$$

on y satisfait immédiatement en faisant $x = y$, $z = t$, ou, ce qui revient au même, en posant

$$x = \varphi(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = t,$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction φ, qui demeure entièrement indéterminée et peut renfermer antant de constantes arbitraires que l'on voudra; mais l'ensemble de ces trois équations ne forme pas un système d'intégrales générales des équations différentielles proposées, précisément parce qu'il établit entre les variables des relations indépendantes des constantes arbitraires. Cherchons les intégrales générales; en retranchant la seconde équation de la première, on trouve

$$dx - dy = 0, \quad \text{d'où} \quad x = y + C_1.$$

Cette valeur, substituée dans la troisième, donne

$$dz = (C_1 + 1)dt, \quad z = (C_1 + 1)t + C_2,$$

d'où

$$z - t = C_1 t + C_2,$$

et par conséquent, en substituant dans la seconde équation, pour $z - t$, $x - y$, leurs valeurs,

$$(C_1 t + C_2) dy = C_1 dt, \quad dy = \frac{C_1 dt}{C_1 t + C_2},$$
$$y = l(C_1 t + C_2) + C_3,$$

et, par suite,

$$x = \text{l}(C_1 t + C_2) + C_1 + C_3:$$

or l'ensemble des trois équations

$$x = \text{l}(C_1 t + C_2) + C_1 + C_3, \quad y = \text{l}(C_1 t + C_2) + C_3,$$
$$z = (C_1 + 1) t + C_2,$$

ou, ce qui revient au même, en résolvant par rapport à C_1, C_2, C_3,..., des trois équations

$$C_1 = x - y, \quad C_2 = z - (x - y + 1) x, \quad C_3 = y - \text{l}(z - t),$$

forme un système d'intégrales générales, précisément parce qu'il renferme trois constantes arbitraires, et qu'on n'en peut tirer aucune équation indépendante de ces constantes.

208. Revenons au cas général, et cherchons si un même ensemble d'équations différentielles données peut admettre plusieurs systèmes d'intégrales générales. Supposons que, par une méthode quelconque, nous soyons arrivés au système suivant

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \quad u_3 = C_3, \ldots, \quad u_n = C_n;$$

on en tirera

$$du_1 = 0 = \text{L}_1 dt + \text{M}_1 dx + \text{N}_1 dy + \ldots,$$
$$du_2 = 0 = \text{L}_2 dt + \text{M}_2 dx + \text{N}_2 dy + \ldots,$$

ou

$$L_1 + M_1\frac{dx}{dt} + N_1\frac{dy}{dt} + \ldots = o,$$
$$L_2 + M_2\frac{dx}{dt} + N_2\frac{dy}{dt} + \ldots = o,$$

et, en substituant pour $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,..., leurs valeurs tirées des équations différentielles proposées, il viendra

$$L_1 + M_1 F_1(t, x, y, z, \ldots) + N_1 F_2(t, x, y, z, \ldots) + \ldots = o,$$
$$L_2 + M_2 F_1(t, x, y, \ldots) + \ldots = o.$$

Ces équations sont nécessairement identiques, ou se réduisent à o = o, car, sans cela, elles établiraient entre les variables des relations indépendantes des constantes, ce qui ne peut être, puisque, par hypothèse, l'ensemble des équations $u_1 = C_1$, $u_2 = C_2$,..., forme un système d'intégrales générales des équations données. Cela posé, toutes les valeurs de x, y, z,..., qui vérifieront les équations différentielles proposées, devront évidemment rendre identiques les équations

$$M_1[dx - F_1(t, x, y, z, \ldots)] + N_1[dy - F_2(t, x, y, z, \ldots)] + \text{etc.} = o,$$
$$M_2[dx - F_1(t, x, y, z, \ldots)] + N_2[dy - F_2(t, x, y, z, \ldots)] + \text{etc.} = o,$$

à moins qu'elles ne rendent infinis un ou plusieurs des coefficients M_1, N_1,..., M_2, N_2,...; ces dernières équations se réduisent d'ailleurs à

$$L_1 dt + M_1 dx + N_1 dy + \ldots = du_1 = o,$$
$$L_2 dt + M_2 dx + N_2 dy + \ldots = du_2 = o,$$

en vertu des équations identiques

$$L_1 + M_1 F_1(t, x, y, z, \ldots) + N_1 F_2(t, x, y, z, \ldots) + \text{etc.} = o\ldots;$$

donc, à moins qu'elles ne rendent infinies ou indéterminées, et par conséquent discontinues, quelques-unes des

quantités

$$L_1 = \frac{du_1}{dt}, \quad M_1 = \frac{du_1}{dx}, \quad N_1 = \frac{du_1}{dy}, \ldots,$$
$$L_2 = \frac{du_2}{dt}, \quad M_2 = \frac{du_2}{dx}, \quad N_2 = \frac{du_2}{dy}, \ldots,$$

toutes les valeurs de x, y, $z, \ldots$, qui satisferont aux équations différentielles données, vérifieront aussi les relations

$$du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \ldots, \quad \text{ou} \quad u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \ldots.$$

Donc, puisque l'ensemble de ces équations détermine complétement les valeurs de x, y, $z, \ldots$, en fonction de t et des n constantes, il est le seul système d'intégrales générales des équations proposées.

209. Les systèmes de valeurs de x, y, $z, \ldots$, que l'on obtient en rendant infinies ou indéterminées les quantités L, M, N,..., ou quelques-unes d'entre elles, et qui vérifient les équations proposées sans qu'on puisse les déduire des équations

$$u_1 = C_1, \quad u_2 = C_2, \ldots,$$

sont ce qu'on appelle des intégrales singulières. Il est évident qu'elles ne seront jamais renfermées, comme cas particuliers, dans les intégrales obtenues par la méthode générale que nous avons exposée, puisque cette méthode suppose essentiellement que les fonctions F_1, $F_2, \ldots$, ainsi que leurs dérivées par rapport à x, y, z, etc., sont finies et continues, ce qui n'aurait pas lieu si les quantités L, M, N,..., ou quelques-unes d'entre elles, étaient infinies ou indéterminées.

Éclaircissons ce qui précède par un exemple. Le système d'équations différentielles

$$(z - t)dx = (x - y)dt, \quad (z - t)dy = (x - y)dt,$$
$$dz = (x - y + 1)dt,$$

a, comme nous l'avons vu, pour intégrales générales

$$C_1 = x - y,\quad C_2 = z - (x - y + 1)t,\quad C_3 = y - 1(z - t):$$

on a, par conséquent, dans ce cas,

$$L_1 = 0,\quad M_1 = 1,\quad N_1 = -1,\quad P_1 = 0,$$
$$L_2 = y - x - 1,\quad M_2 = -t,\quad N_2 = t,\quad P_2 = 1,$$
$$L_3 = \frac{1}{z - t},\quad M_3 = 0,\quad N_3 = 1,\quad P_3 = \frac{1}{z - t};$$

deux de ces quantités seulement, L_3, P_3, peuvent devenir infinies, et le seront réellement si l'on a $z = t$: comme d'ailleurs l'hypothèse $z = t$ donne $x = y$, et que l'ensemble de ces deux équations vérifie les équations proposées sans que la première puisse se déduire des intégrales générales, en donnant aux constantes C_1, C_2, C_3, des valeurs particulières, cet ensemble ne peut être qu'une solution singulière.

Nous avons vu que les valeurs particulières $x = 0$, $y = 0,\ldots$, formaient un système d'intégrales particulières toutes les fois que les fonctions F_1, $F_2,\ldots$, étant finies et continues, ainsi que leurs dérivées, on avait, quel que soit t,

$$F_1(t, 0, 0,\ldots) = 0,\quad F_2(t, 0, 0,\ldots) = 0,\ldots;$$

elles ne pourront donc être des solutions singulières qu'autant que les conditions

$$M_1 = \infty,\quad M_1 = \frac{0}{0},\ldots,\quad N_1 = \infty,\quad N_1 = \frac{0}{0},\ldots,$$

ou du moins quelques-unes d'entre elles, seront vérifiées.

210. Supposons que les valeurs

$$x = \varphi(t),\quad y = \chi(t),\quad z = \psi(t),\ldots$$

forment un système d'intégrales singulières des équations

$$dx = F_1(t, x, y,\ldots),\quad dy = F_2(t, x, y,\ldots),\ldots,$$

et posons

$$x = \varphi(t) + \xi, \quad y = \chi(t) + \eta, \ldots,$$

les équations $\xi = 0$, $\eta = 0$ seront des intégrales singulières des nouvelles équations obtenues par cette substitution et qui sont :

$$\varphi'(t)dt + d\xi = F_1[t, \varphi(t) + \xi, \chi(t) + \eta \ldots],$$
$$\chi'(t)dt + d\eta = F_2[t, \varphi(t) + \xi, \chi(t) + \eta \ldots] \ldots \ldots$$

En retranchant de ces équations ce qu'elles deviennent quand on y fait $\xi = 0$, on trouvera

$$d\xi = \{F_1[t, \varphi'(t) + \xi, \chi'(t) + \eta, \ldots] - F_1[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots]\} dt.$$

....

Or $\xi = 0$, $\eta = 0, \ldots$, ne seront des solutions singulières de ces dernières équations qu'autant que les coefficients de dt, ou du moins quelques-uns d'entre eux, deviendront infinis ou indéterminés pour $\xi = 0$, $\eta = 0, \ldots$, ce qui n'aura lieu qu'autant que les fonctions

$$F_1[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots], \quad F_2[t, \varphi(t), \chi(t), \ldots],$$

et leurs dérivées, deviendront elles-mêmes infinies et indéterminées ; donc, enfin, les valeurs

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t), \ldots,$$

ne pourront former un système d'intégrales singulières des équations différentielles données, qu'autant qu'elles rendront infinies ou indéterminées, quelques-unes au moins des fonctions F_1, $F_2, \ldots$ et de leurs dérivées. Cette discontinuité est une condition indispensable, mais elle n'est pas suffisante, en ce sens que certaines valeurs qui rendront discontinues les fonctions F_1, $F_2, \ldots$, et leurs dérivées, pourront n'être que des intégrales particulières, comme on l'a vu dans le cas d'une seule équation différentielle. Nous n'essayerons pas de préciser les carac-

tères distinctifs des intégrales singulières, ce problème est trop complexe et trop peu pratique dans le cas de plusieurs variables. Il sera plus facile, dans chaque cas particulier, de chercher si les intégrales dont la nature est encore inconnue, peuvent se déduire ou non de valeurs particulières attribuées aux constantes.

Exemples : 1°. Reprenons les équations différentielles

$$dx = \frac{x-y}{z-t}\,dt, \quad dy = \frac{x-y}{z-t}\,dt,$$

$$dz = (x - y + 1)\,dt,$$

$$F_1 = F_2 = \frac{x-y}{z-t}, \quad F_3 = x - y + 1.$$

En posant

$$F_1 = \infty, \quad \text{ou} \quad F_1 = \tfrac{0}{0},$$

on trouvera

$$x = y, \quad z = t;$$

ces équations satisfont aux équations proposées, et sont réellement des intégrales singulières, parce que, pour les déduire des intégrales générales, il faudrait nécessairement faire

$$C_1 = 0, \quad C_2 = y, \quad C_3 = y,$$

ce qui est impossible.

2°. $dx = y^{\frac{1}{2}}dt, \quad dy = x^{\frac{1}{2}}dt, \quad F_1 = y^{\frac{1}{2}}, \quad F_2 = x^{\frac{1}{2}};$

ces fonctions ne peuvent devenir ni infinies, ni indéterminées, leurs dérivées sont $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, et deviendront infinies pour $x = 0$, $y = 0$; ces deux valeurs satisfont d'ailleurs aux équations différentielles données.

Cherchons les intégrales générales : on a d'abord, en éliminant dt,

$$x^{\frac{1}{2}}dx = y^{\frac{1}{2}}dy, \quad \text{d'où} \quad y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + C, \quad y^{\frac{1}{2}} = (x^{\frac{3}{2}} - C)^{\frac{1}{3}};$$

cette valeur, substituée dans la première équation, donne

$$dt = \frac{dx}{\left(x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^{\frac{1}{3}}}, \quad t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left(x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^{\frac{1}{3}}}.$$

On tirera des deux équations

$$y^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{3}{2}} + C_1, \qquad t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\left(x^{\frac{3}{2}} + C_1\right)^{\frac{1}{3}}},$$

les valeurs de C_1, C_2 en fonction des variables ; elles sont donc les intégrales générales des équations données. Cela posé, il est facile de voir que les valeurs $x = 0$, $y = 0$, sont des intégrales singulières ; en effet, pour les déduire des intégrales générales, il faudrait faire d'abord $C_1 = 0$, ce qui donnerait

$$t = C_2 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}} - C_2 = 2x^{\frac{1}{2}},$$

et pour $x = 0$, $C_2 = t$, ce qui répugne à la nature de la constante arbitraire.

TRENTE-QUATRIÈME LEÇON.

Intégration des équations linéaires simultanées du premier ordre, et de quelques autres équations.

---

211. On appelle *équations linéaires simultanées* celles qui ne renferment les variables dépendantes x, y, z,..., et leurs dérivées, qu'au premier degré seulement. La forme générale de ces équations est

$$\frac{dx}{dt}+P_1x+Q_1y+R_1z+\ldots=T_1,$$
$$\frac{dy}{dt}+P_2x+Q_2y+R_2z+\ldots=T_2,\ldots,$$

P_1, P_2,..., P_n,..., Q_1,..., Q_n,..., T_1,..., T_n,..., étant des fonctions de la seule variable indépendante t. On ne sait pas les intégrer en général, on n'y parvient que dans quelques cas particuliers.

Considérons, sous une forme un peu différente, les deux équations

$$M_1dx + N_1dy + (P_1x + Q_1y)dt = T_1dt,$$
$$M_2dx + N_2dy + (P_2x + Q_2y)dt = T_2dt.$$

Multiplions la seconde par θ, ajoutons-la à la première, et posons

$$M_1 + M_2\theta = m,\quad N_1 + N_2\theta = n,\quad P_1 + P_2\theta = p,$$
$$Q_1 + Q_2\theta = q,\quad T_1 + T_2\theta = T,$$

il viendra

$$mdx + ndy + px + qy = \mathrm{T}dt,$$

ou

$$m\left(dx + \frac{n}{m}dy\right) + p\left(x + \frac{q}{p}y\right) = \mathrm{T}dt.$$

Or, si en posant

$$x + \frac{q}{p}y = u,$$

on avait

$$dx + \frac{n}{m}dy = du,$$

l'équation précédente se trouverait ramenée à ne plus être qu'une équation linéaire à deux variables

$$mdu + pu = \mathrm{T}dt,$$

que nous avons déjà intégrée. L'équation de condition

$$dx + \frac{n}{m}dy = d\left(x + \frac{q}{p}y\right)$$

sera satisfaite si l'on a

$$d.\frac{q}{p}y = \frac{n}{m}dy, \quad \frac{q}{p}dy + yd\frac{q}{p} = \frac{n}{m}dy,$$

$$\frac{q}{p} = \frac{n}{m}, \quad d.\frac{q}{p} = 0.$$

En substituant dans ces deux dernières équations, pour m, n, p, q, leurs valeurs, et éliminant entre elles θ, on aura la condition à laquelle les coefficients de l'équation proposée doivent satisfaire, pour qu'elle puisse être ramenée à une équation linéaire à deux variables. Si ces coefficients sont constants, la seconde équation sera immédiatement vérifiée, la première deviendra

$$\frac{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2\theta}{\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2\theta} = \frac{\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2\theta}{\mathrm{Q}_1 + \mathrm{Q}_2\theta},$$

et donnera pour θ deux valeurs θ_1, θ_2, qui conduiront à deux équations linéaires

$$du + \frac{p_1}{m_1} u = \frac{T_1}{m_1} dt, \quad du + \frac{p_2}{m_2} u = \frac{T_2}{m_2} dt,$$

que l'on intégrera immédiatement. En substituant dans ces deux intégrales, à u, sa valeur $x + \frac{q}{p} y$, on obtiendra deux équations entre x, y, et deux constantes arbitraires C_1, C_2 qui seront les intégrales générales cherchées. Ce que nous venons de dire suppose que les deux valeurs de θ sont réelles et distinctes, nous examinerons plus tard le cas où ces valeurs seraient imaginaires ou égales.

212. Considérons maintenant le cas où l'on aurait à intégrer n équations linéaires à coefficients constants. On peut toujours supposer que chacune de ces équations ne renferme qu'une seule dérivée, ou qu'elles sont de la forme

$$dx + (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots) dt = T_1 dt,$$
$$dy + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots) dt = T_2 dt, \ldots.$$

Multiplions la seconde par θ_2, la troisième par $\theta_3, \ldots$, ajoutons-les, et faisons

$$a_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + \ldots = \theta,$$
$$T_1 + \theta_2 T_2 + \theta_3 T_3 + \ldots = T,$$

il viendra

$$dx + \theta_2 dy + \theta_3 dz + \ldots \theta x$$
$$+ [(b_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3 + \ldots) y + (c_1 + c_2\theta_2 + c_3\theta_3 + \ldots) z + \ldots] dt = T dt.$$

Or, cette dernière équation deviendra une équation linéaire à deux variables

$$du + \theta u dt = T dt,$$

et aura pour intégrale

$$u = x + \theta_2 y + \theta_3 z + \ldots = e^{-\theta t}\left[C + \int_{t_0}^{t} \mathrm{T} e^{\theta t} dt\right]$$
$$= e^{-\theta t}\left[C + \int_{t_0}^{t} (\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2\theta + \ldots) e^{\theta t} dt\right].$$

Si l'on choisit θ_1, θ_2, $\theta_3, \ldots$, de manière à satisfaire aux équations

$$b_1 + b_2\theta_2 + b_3\theta_3 + \ldots = \theta\theta_2,$$
$$c_1 + c_2\theta_2 + c_3\theta_3 + \ldots = \theta\theta_3, \ldots,$$

qu'on peut écrire comme il suit

$$(b_2 - \theta)\theta_2 + b_3\theta_3 + \ldots = -b_1,$$
$$c_2\theta_2 + (c_3 - \theta)\theta_3 + \ldots = -c_1, \ldots,$$

la formule $x = \dfrac{\Sigma'' \pm k_0 b_0 c_0 \ldots}{\Sigma \pm a_0 b_0 c_0 \ldots}$, que nous avons rappelée n° 107, montre immédiatement que le dénominateur commun de θ_2, $\theta_3, \ldots$ comprendra le terme irréductible

$$(b_2 - \theta)(c_3 - \theta)(d_4 - \theta) \ldots,$$

qui est du degré $n - 1$, par rapport à θ ; et, par conséquent, en substituant pour ces coefficients indéterminés θ_2, $\theta_3, \ldots$ leurs valeurs dans la relation

$$a_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3 + \ldots = \theta,$$

on obtiendra une équation dans laquelle entrera le produit

$$(a_1 - \theta)(b_2 - \theta)(c_3 - \theta)(d_4 - \theta), \ldots,$$

qui sera du degré n, et donnera pour θ n valeurs. A chacune des valeurs de θ correspondra un système unique de valeurs de θ_2, θ_3, $\theta_4, \ldots$. Ces n systèmes substitués avec θ dans l'intégrale obtenue, fourniront n intégrales avec n constantes arbitraires. On mettra facilement ces intégrales sous la forme $u_1 = C$, $u_2 = C, \ldots$, et elles

formeront, par leur ensemble, les intégrales générales des équations différentielles proposées.

Si l'on veut que pour $t = 0$, x, y, z,... prennent les valeurs particulières x_0, y_0, z_0,..., on aura, pour déterminer les constantes C_1, C_2,..., n équations que l'on déduira de l'intégrale générale en faisant $t = t_0$, et donnant tour à tour à θ ses n valeurs. Ces équations seront toutes de la forme

$$x_0 + \theta_2 y_0 + \theta_3 z_0 + \ldots = Ce^{-\theta t_0},$$

et la valeur générale de C sera

$$C = e^{\theta t_0}(x_0 + \theta_2 y_0 + \theta_3 z_0 + \ldots);$$

en mettant dans l'intégrale générale pour C sa valeur, elle deviendra

$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \theta) = 0,$$

et en appelant θ', θ'',..., $\theta^{(n)}$ les n valeurs de θ, le système des n intégrales générales des équations différentielles proposées sera

$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \theta') = 0,$$
$$f(t, x, y, \ldots, t_0, x_0, y_0, \ldots, \theta'') = 0, \ldots.$$

213. Mais ces n équations ne seront distinctes et ne formeront réellement un système d'intégrales générales qu'autant que les n valeurs de θ seront réelles et inégales; voyons ce qui arriverait si elles étaient imaginaires ou égales. Supposons d'abord que deux seulement de ces valeurs θ' et θ'' soient imaginaires, comme elles sont racines d'une même équation, elles seront conjuguées, et si l'on a

$$\theta' = \alpha + 6\sqrt{-1},$$

on aura

$$\theta'' = \alpha - 6\sqrt{-1}.$$

Dès lors, si la première des intégrales

$$\varphi_1(t,\ x,\ y,\ldots,\quad t_0,\ x_0,\ y_0,\ldots,\ \theta') = 0$$

devient $v + w\sqrt{-1} = 0$, la seconde deviendra

$$v - w\sqrt{-1},$$

et elles se réduiront ensemble aux deux équations $v = 0$, $w = 0$; en se confondant, elles se dédoublent, de sorte que leur ensemble formera encore deux équations. S'il y avait 4, 6, 8,... racines imaginaires, 2, 3, 4,... intégrales se dédoubleraient, et leur ensemble formerait toujours un système de n équations renfermant n valeurs initiales ou n constantes arbitraires.

Voyons maintenant ce qui arrivera si deux racines de l'équation qui donne θ_1 étaient égales entre elles. Comme le premier membre de l'intégrale générale

$$f(t,\ x,\ y,\ z,\ldots,\quad x_0,\ y_0\ z_0,\ldots\ \theta) = 0$$

peut être représenté, pour abréger, par $\varphi(\theta)$, on aura, en désignant par θ' et $\theta'' = \theta' + h$ deux des valeurs de θ,

$$\varphi(\theta') = 0,\quad \varphi(\theta' + h) = h'\varphi'(\theta' + \iota h) = 0,\quad \varphi'(\theta' + \iota h) = 0,$$

et par conséquent $\varphi'(\theta') = 0$, dans le cas où θ'' devenant égal à θ', on aura $h = 0$. Ainsi, lorsque deux racines sont égales entre elles, deux des intégrales se confondent

$$\varphi(\theta') = \varphi(\theta'') = 0;$$

mais on voit alors apparaître une équation nouvelle

$$\varphi'(\theta') = 0,$$

et l'on a toujours n équations. L'ensemble de ces n équations formera le système d'intégrales générales des équations différentielles proposées. Considérons une troisième racine θ''' d'abord égale à $\theta' + h$: dans le cas où $\theta' = \theta''$,

ou aura à la fois

$$\varphi(\theta') = 0, \quad \varphi'(\theta') = 0,$$

$$\varphi(\theta'+h) = \varphi(\theta') + \frac{h}{1}\varphi'(\theta') + \frac{h^2}{1.2}\varphi''(\theta' + \iota h) = 0,$$

et par conséquent

$$\varphi''(\theta' + \iota h) = 0.$$

Donc si θ'' devient aussi égal à θ', c'est-à-dire si $h = 0$, on aura nécessairement $\varphi''(\theta') = 0$. Trois des intégrales se confondent, mais on a deux équations nouvelles

$$\varphi'(\theta') = 0, \quad \varphi''(\theta') = 0.$$

On prouvera évidemment, en poursuivant ce raisonnement, que si m racines θ', θ'',..., $\theta^{(m)}$ sont égales, on aura $m - 1$ équations nouvelles

$$\varphi'(\theta') = 0, \quad \varphi''(\theta') = 0, \ldots, \quad \varphi^{(m-1)}(\theta') = 0,$$

elles remplaceront les $m - 1$ intégrales qui se confondent avec la première, de sorte que l'on aura toujours n équations renfermant n valeurs initiales ou n constantes arbitraires. Si dans l'intégrale

$$x + \theta_2 y + \theta_3 z + \ldots = e^{-\theta t}\left[C + \int_{t_0}^{t}(T_1 + T_2\theta_2 + \ldots)e^{\theta t}dt\right],$$

on ne mettait pas pour C sa valeur en fonction des données initiales et de θ, $\varphi'(\theta)$, $\varphi''(\theta)$,... seraient remplacés par

$$\frac{d\varphi(\theta, C)}{d\theta} + C'\frac{d\varphi(\theta, C)}{dC},$$

$$\frac{d^2\varphi(\theta, C)}{d\theta^2} + 2C'\frac{d^2\varphi(\theta, C)}{d\theta\, dC} + C''\frac{d^2\varphi(\theta, C)}{dC^2};$$

les quantités C', C'',..., déterminées par les équations

$$\frac{dC}{d\theta} = C', \quad C'' = \frac{d^2C}{d\theta^2},$$

peuvent être regardées comme des constantes nouvelles dont le nombre sera précisément celui des racines qui deviendront égales à la première et qui conserveront au système d'intégrales sa généralité.

214. Un raisonnement bien simple montrera que la méthode que nous venons de développer embrasse le cas des racines égales. En effet, elle donne, dans toute hypothèse, au moins une des intégrales générales; de cette intégrale, on tirera la valeur d'une des variables x, y, z,..., pour la substituer dans les équations différentielles données, que l'on réduira de la sorte à un système de $n - 1$ équations, ne renfermant plus que $n - 1$ variables. Si, pour ce système de $n - 1$ équations, les $n - 1$ valeurs de θ sont inégales ou imaginaires, la méthode fournira les $n - 1$ intégrales qui restaient encore à trouver. Dans tous les cas, elle donnera au moins une seconde intégrale qui conduira à un système de $n - 2$ équations différentielles, etc. En continuant de la sorte, on obtiendrait évidemment, malgré l'égalité des racines, un ensemble de n intégrales renfermant n constantes arbitraires.

215. On peut intégrer par une autre méthode les équations simultanées proposées

$$dx + (a_1x + b_1y + c_1z + \ldots)dt = \mathrm{T}_1dt,$$
$$dy + (a_2x + b_2y + c_2z + \ldots)dt = \mathrm{T}_2dt, \ldots.$$

Considérons d'abord le cas où, les seconds membres manquant, ces équations deviennent

$$dx + (a_1x + b_1y + c_1z + \ldots)dt = 0,$$
$$dy + (a_2x + b_2y + c_2z + \ldots)dt = 0, \ldots$$

On remarque alors immédiatement que si plusieurs systèmes de valeurs de x, y, z,... satisfont séparément à ces équations, la somme de ces systèmes ou de plusieurs d'entre eux y satisfera aussi, et que, par conséquent, il suffira de trouver n systèmes renfermant chacun une constante arbitraire pour obtenir par leur addition les intégrales générales cherchées. Pour y parvenir, faisons

$$y = \beta x, \quad z = \gamma x, \ldots,$$

les équations sans seconds membres deviendront

$$dx + x(a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots)dt = 0,$$
$$\beta dx + x(a_2 + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots)dt = 0,\ldots,$$

et ne pourront subsister qu'autant qu'en posant

$$a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots = -\alpha,$$

on aura

$$a_2 + b_2\beta + c_2\gamma + \ldots = -\alpha\beta, \quad a_3 + b_3\beta + c_3\gamma + \ldots = -\alpha\gamma\ldots.$$

De ces $n - 1$ dernières équations, on tirera les valeurs de β, γ,..., qui, substituées dans la formule

$$a_1 + b_1\beta + c_1\gamma + \ldots = -\alpha,$$

donneront une équation en α du degré n. A chacune des racines α_1, α_2,..., α_n de cette équation, correspondra un système de valeurs de β, γ,...; x, d'ailleurs, sera donné par l'équation $dx - \alpha x dt = 0$, d'où

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt, \quad \text{l}x - \text{l}C = \alpha t,$$

et par suite

$$x = Ce^{\alpha t}; \quad y = C\beta e^{\alpha t}, \quad z = C\gamma e^{\alpha t},\ldots.$$

En substituant tour à tour dans ces équations pour α, ses n valeurs, on aura n systèmes d'équations satisfaisant tous aux équations différentielles proposées, et renfer-

mant chacun une constante; l'ensemble

$$x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots C_n e^{\alpha_n t},\quad y = C_1 \mathfrak{C}_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 \mathfrak{C}_2 e^{\alpha_2 t} + \ldots,$$

formé de l'addition de ces n systèmes, sera le système des intégrales générales cherchées. Pour passer de ce cas plus simple à celui où les fonctions T_1, T_2,... ne seront plus nulles, il suffit de substituer dans ces équations, aux constantes C_1, C_2,..., des fonctions de x tellement choisies qu'elles continuent de vérifier les équations avec leurs seconds membres. Or, si l'on différentie les valeurs de x, y, z,... pour les substituer avec leurs différentielles $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans les équations données, et qu'on exprime qu'elles sont satisfaites, on trouvera

$$e^{\alpha_1 t}\frac{dC_1}{dt} + e^{\alpha_2 t}\frac{dC_2}{dt} + \ldots e^{\alpha_n t}\frac{dC_n}{dt} = T_1,$$

$$\mathfrak{C}_1 e^{\alpha_1 t}\frac{dC_1}{dt} + \mathfrak{C}_2 e^{\alpha_2 t}\frac{dC_2}{dt} + \ldots = T_2, \ldots,$$

et ces n dernières équations donneront, en fonction de t, les valeurs de $\frac{dC_1}{dt}$, $\frac{dC_2}{dt}$, ..., que l'on intégrera par de simples quadratures, etc.

216. Appliquons ces principes à quelques exemples.

1°. $dx + (a_1 x + b_1 y)dt = T_1 dt,\quad dy + (a_2 x + b_2 y)dt = T_2 dt;$

multiplions la seconde équation par θ_2, ajoutons et posons

$$a_1 + a_2\theta_2 = \theta,\quad b_1 + b_2\theta_2 = \theta\theta_2,$$

il viendra

$$dx + \theta_2 dy + \theta(x + \theta_2 y)dt = (T_1 + \theta_2 T_2)dt,$$

d'où l'on tirera, en intégrant,

$$x + \theta_2 y = e^{-\theta t}\left[C + \int_{t_0}^{t}(T_1 + \theta_2 T_2)e^{\theta t}dt\right].$$

θ est d'ailleurs donné par l'équation de second degré $(a_1 - \theta)(b_2 - \theta) = a_2 b_1$, qui fournira les deux valeurs θ', θ'', et par suite deux intégrales

$$x + \frac{\theta' - a_1}{a_2} = e^{-\theta' t}\left[C_1 + \int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{T}_1 + \frac{\theta' - a_1}{a_2}\mathrm{T}_2\right)e^{\theta' t}dt\right],$$

$$x + \frac{\theta'' - a_1}{a_2} = e^{-\theta'' t}\left[C_2 + \int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{T}_1 + \frac{\theta'' - a_1}{a_2}\mathrm{T}_2\right)e^{\theta'' t}dt\right].$$

Si les deux racines θ', θ'' étaient égales, on n'aurait qu'une seule intégrale, mais on lui joindrait l'équation

$$= e^{-\theta' t}\left[C' - Ct + \int_{t_0}^{t}\frac{a_1 \mathrm{T}_2}{a_2}e^{\theta' t}dt + t\int_{t_0}^{t}\left(\mathrm{T}_1 + \frac{\theta' - a_1}{a_2}\mathrm{T}_2\right)dt + \int_{t_0}^{t} t\left(\mathrm{T}_1 + \frac{\theta' - a_1}{a_2}\mathrm{T}_2\right)e^{\theta' t}dt\right],$$

que l'on obtient en différentiant l'intégrale unique par rapport à θ', et C considéré comme fonction de θ'.

On pourrait aussi, en mettant l'intégrale unique sous la forme

$$x + \mathcal{C}y = \varphi(t),$$

en tirer la valeur de x, $x = \varphi(t) - \mathcal{C}y$, pour la substituer dans la première des équations données

$$dx + (a_1 x + b_1 y)\,dt = \mathrm{T}_1 dt,$$

qui deviendra

$$dy - \frac{b_1 - a_1\mathcal{C}}{\mathcal{C}}\,y\,dt = \frac{1}{\mathcal{C}}\left[\mathrm{T}_1 + a_1\varphi(t) + \varphi'(t)\right]dt.$$

Or, cette dernière équation est linéaire et s'intégrera immédiatement,

Exemples : Les deux équations

$$4dx + 9dy + (44x + 49y)\,dt = t\,dt,$$
$$3dx + 7dy + (34x + 38y)\,dt = e^t dt,$$

ont pour intégrales

$$x = \frac{19}{3}t - \frac{29}{7}e^t + C_1 e^{-6t} - C_2 e^{-t} - \frac{56}{9},$$

$$y = \frac{24}{7}e^t - \frac{17}{3}t + 4C_1 e^{-6t} + C_2 e^{-t} + \frac{55}{9};$$

les deux racines $\theta' = 6$, $\theta'' = 1$ sont inégales.

Les deux équations

$$4dx + 9dy + (11x + 31y)dt = e^t dt,$$
$$3dx + 7dy + (8x + 24y)dt = e^{2t}dt,$$

donnent, au contraire, $\theta' = \theta'' = 4$, et ont pour intégrales

$$x = \frac{31}{25}e^t - \frac{49}{36}e^{2t} - C_1 te^{-4t} + C_2 e^{-4t},$$
$$y = \frac{19}{36}e^{2t} - \frac{11}{25}e^t + \frac{C_1(t+1) - C_2}{e^{4t}}.$$

Pour les deux équations

$$4dx + 9dy + (2x + 31y)dt = e^t dt,$$
$$3dx + 7dy + (x + 24y)dt = 3dt,$$

$\theta' = 4 + \sqrt{-1}$, $\theta'' = 4 - \sqrt{-1}$ sont imaginaires; les intégrales générales seront données par l'équation

$$(1+\sqrt{-1})x + y = e^{-4t}\left[\begin{array}{l}(\cos t - \sqrt{-1}\sin t)(4+7\sqrt{-1})\left(\int e^{5t}\cos t dt + \sqrt{-1}\int e^{5t}\sin t \right. \\ -3(5+9\sqrt{-1})\left(\int e^{4t}\cos t dt + \sqrt{-1}\int e^{4t}\sin t dt\right) + C_1 + C_2\sqrt{} \end{array}\right.$$

on a d'ailleurs

$$\int e^{5t}\cos t dt = \frac{e^{5t}(5\cos t + \sin t)}{26}, \quad \int e^{5t}\sin t dt = \frac{e^{5t}(5\sin t - \cos t)}{26},$$
$$\int e^{4t}\cos t dt = \frac{e^{4t}(4\cos t + \sin t)}{17}, \quad \int e^{4t}\sin t dt = \frac{e^{4t}(4\sin t - \cos t)}{17}.$$



TRENTE-CINQUIÈME LEÇON.

Intégration d'une équation différentielle, d'ordre quelconque, à deux variables. — Principes généraux. — Conditions d'intégrabilité d'une semblable équation.

---

217. On appelle équation différentielle de l'ordre n, à deux variables, l'équation qui, avec les variables, renferme leurs dérivées jusqu'à celles de l'ordre n inclusivement. La forme générale de ces équations est, en supposant qu'il n'y ait qu'une seule variable dépendante,

$$F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

ou, en résolvant par rapport à $\frac{d^ny}{dx^n}$,

$$\frac{d^ny}{dx^n} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

En joignant à cette équation les $n-1$ relations connues

$$dy = y'dx,\ dy' = y''dx,\ dy'' = y'''dx,\ldots,\ dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$

on aura un système de n équations différentielles simultanées du premier ordre

$$dy = y'dx,\quad dy' = y''dx,\ldots,\quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx,$$
$$dy^{(n-1)} = f[x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)}]dx.$$

En intégrant ce système d'équations par les méthodes que nous avons indiquées, on obtiendra les valeurs des $y,\ y',\ldots,\ y^{(n-1)}$ en fonction de n constantes arbitraires;

la valeur ainsi obtenue pour y,

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n),$$

sera l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée; on en tirera

$$y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \ldots), \quad y'' = \varphi''(x, C_1, C_2, \ldots), \ldots,$$
$$y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \ldots).$$

218. Il est facile de prouver que l'intégrale générale renfermera, en réalité, n constantes, c'est-à-dire toutes les constantes que renfermaient les intégrales des équations simultanées. En effet, si l'une de ces constantes, C_1 par exemple, manquait dans la valeur de y, elle manquerait aussi dans les valeurs de y', y'', $y^{(n-1)}$, et, par conséquent, elle ne ferait pas partie des intégrales générales des équations simultanées, ce qui est contre l'hypothèse. En supposant qu'on donne les valeurs y_0, y'_0, y''_0,..., $y_0^{(n-1)}$, de y et de ses $n-1$ premières dérivées, correspondantes à x_0, on pourrait déterminer exactement, ou par approximation, en fonction de ces valeurs initiales, les intégrales des équations simultanées, et, par suite, l'intégrale générale de l'équation différentielle de l'ordre n; on en conclura que, dans cette dernière intégrale, on peut regarder les constantes arbitraires comme étant les valeurs initiales de la fonction cherchée y et de ses dérivées. De plus, comme les équations simultanées n'admettent qu'un seul système d'intégrales générales, il en sera de même de l'équation différentielle de l'ordre n. Il résulte de ce qui précède, 1° que l'intégrale générale d'une équation différentielle de l'ordre n renferme nécessairement n constantes arbitraires; 2° que toute équation entre x et y qui satisfait à une équation différentielle de l'ordre n, en est l'intégrale générale quand elle renferme n constantes arbitraires.

219. Les divers systèmes d'intégrales singulières de ces

mêmes équations simultanées fourniront les intégrales singulières de l'équation de l'ordre n. Comme pour ces équations simultanées, les fonctions F_1, F_2,... (n° 201), sont précisément la fonction y et ses dérivées y', y'',..., $y^{(n-1)}$, que nous supposons finies et continues, elles ne pourront devenir infinies ou indéterminées, et par conséquent les intégrales singulières, si elles existent, ne pourront être que les valeurs de y qui rendront infinie ou indéterminée la fonction $f[x, y, y',..., y^{(n-1)}]$, ou ses dérivées par rapport à y, y',....

Nous avons vu que, dans certains cas, les solutions singulières des équations simultanées étaient plus étendues que les intégrales générales, qu'elles pouvaient renfermer un plus grand nombre de constantes, et même des fonctions arbitraires; il n'en sera pas ainsi d'une équation différentielle de l'ordre n. En effet, d'après ce que nous venons de dire, les intégrales singulières de ces équations devront toutes satisfaire à une équation de la forme

$$\frac{1}{\varphi[x, y, y',..., y^{(n-1)}]} = 0,$$

ou

$$\chi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0,$$

c'est-à-dire qu'elles seront une solution particulière ou singulière d'une équation différentielle de l'ordre $n - 1$, et ne pourront, par conséquent, renfermer plus de constantes que n'en comporte l'intégrale d'une équation différentielle de l'ordre $n - 1$.

En poursuivant ce raisonnement, on descendra, de degré en degré, jusqu'à l'équation différentielle du premier ordre dont l'intégrale renferme au plus une constante, et il sera démontré que les solutions singulières de l'équa-

tion différentielle de l'ordre n, ou ne renferment pas de constantes arbitraires, ou en renferment moins de n.

220. Il résulte de ce qui précède, que dans le cas où la fonction f reste finie et continue, ainsi que ses dérivées par rapport à y, y', y'',..., il existe une fonction y de x qui vérifie l'équation différentielle de l'ordre n,

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots,\ \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right),$$

et, de plus, prenne, ainsi que ses dérivées, pour $x = x_0$, des valeurs déterminées y_0, y'_0, y''_0,... Mais on peut se proposer un autre problème : on peut rechercher les caractères auxquels on reconnaîtra que la fonction

$$\mathrm{F}\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ldots,\ \frac{d^n y}{dx^n}\right)$$

est la dérivée exacte d'une certaine fonction primitive, ou, ce qui revient au même, quelles sont les conditions d'intégrabilité de cette fonction. Euler a le premier résolu ce problème ; le premier il a démontré, par des considérations tirées du calcul des variations, ce théorème remarquable : pour que la fonction

$$\mathrm{F}[x,\ y,\ y',\ y'',\ y^{(n-1)}],\ldots$$

soit une différentielle exacte, il est nécessaire et il suffit qu'en posant $\mathrm{M} = \mathrm{D}_x\mathrm{F}$, $\mathrm{N} = \mathrm{D}_y\mathrm{F}$, $\mathrm{P} = \mathrm{D}_{y'}\mathrm{F}$,..., ou

$$d\mathrm{F} = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dy' + \mathrm{Q}dy'' + \mathrm{R}dy''' + \ldots,$$

on ait $\quad \mathrm{N} - \mathrm{D}_x\mathrm{P} + \mathrm{D}_x^2\mathrm{Q} - \mathrm{D}_x^3\mathrm{R} + \ldots = 0,$

ou $\quad \mathrm{D}_y\mathrm{F} - \mathrm{D}_x\mathrm{D}_{y'}\mathrm{F} - \mathrm{D}_x^2\mathrm{D}_{y''}\mathrm{F} - \ldots = 0.$

Lexell, Lagrange et Poisson semblent avoir ignoré qu'Euler avait établi non-seulement que cette condition était nécessaire, mais encore qu'elle était suffisante, et ils ont essayé d'y suppléer. La démonstration de Lagrange suppose l'emploi de séries très-compliquées et dont rien ne

prouve la convergence. La formule de Poisson souffre des exceptions nombreuses qui enlèvent, à la méthode, la généralité qu'il lui attribuait. M. Bertrand, aspirant ingénieur des Mines, vient de publier, sur les conditions d'intégrabilité, un Mémoire remarquable qui fait partie du XXVIIIme cahier du *Journal de l'École Polytechnique*. Après avoir relevé l'erreur historique de Lagrange et de Poisson, et modifié, de manière à la mettre à l'abri de toute objection, la démonstration qu'Euler avait déduite du calcul des variations, M. Bertrand établit, par un procédé simple et ingénieux, la formule de Poisson.

M. Binet, qui avait remarqué les inconvénients de cette formule, est parvenu à les éviter en établissant, à l'aide d'une méthode qui repose, en partie, sur le procédé employé par M. Bertrand, une formule nouvelle qui renferme celle de Poisson, quand cette dernière n'est pas en défaut.

Dans la fonction F ou $F[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}]$, faisons $y = u + \alpha v$, u et v étant des fonctions indéterminées de x, dont nous pourrons disposer plus tard, et α une nouvelle variable indépendante de x, nous aurons

$$y' = u' + \alpha v', \quad y'' = u'' + \alpha v'', \ldots, \quad y^{(n)} = u^{(n)} + \alpha v^{(n)},$$
$$F = f(\alpha) = F[x, u + \alpha v, u' + \alpha v', \ldots, u^{(n)} + \alpha v^{(n)}].$$

En différentiant par rapport à α, et désignant, pour abréger, par $F'(\alpha v)$, $F'(\alpha v')$,... les dérivées de F, prises par rapport à $u + \alpha v$, $u' + \alpha' v'$,..., on aura

$$df(\alpha) = d\alpha[vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + \ldots];$$

on intégrera cette équation depuis $\alpha = 0$, et l'on aura

$$f(\alpha) - f(0) = \int_0^{\alpha} d\alpha[vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + v''F'(\alpha v'') + \ldots].$$

Si, dans cette dernière équation, après avoir fait $\alpha = 1$, on remarque que

$$f(1) = F(x, u + v, u' + v', \ldots), \quad f(0) = F(x, u, u', \ldots),$$

on trouvera

$$F[x, u+v, u'+v', \ldots, u^{(n)}+v^{(n)}] = F[x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}]$$
$$+ \int_0^1 d\alpha\,[v\,F'(\alpha v) + v'\,F'(\alpha v') + \ldots + v^{(n)}\,F'(\alpha v^{(n)})].$$

L'exactitude de cette formule suppose seulement que les fonctions

$$F(x, u, u', \ldots),\quad F'(\alpha v),\quad F'(\alpha v'), \ldots, F'(\alpha v^{(n)}), \ldots$$

restent finies et continues, par rapport à α, entre les limites o et 1 : or, on pourra toujours satisfaire à ces conditions en choisissant convenablement la fonction u. Si maintenant on multiplie par dx, et qu'on intégre, on trouvera

$$\int dx\,F(x, u+v, u'+v', \ldots, u^{(n)}+v^{(n)})$$
$$= \int dx\,F(x, u, u', \ldots) + \int dx \int_0^1 d\alpha\,[vF'(\alpha v) + v'\,F'(\alpha v') + \ldots]$$
$$= \int dx\,F(x, u, u', \ldots) + \int_0^1 d\alpha \int dx\,[vF'(\alpha v) + v'F'(\alpha v') + \ldots].$$

D'ailleurs, l'intégration par parties donne

$$\int dx v' F'(\alpha v') = \int dv F'(\alpha v') = vF'(\alpha v') - \int v dx\,D_x F'(\alpha v'),$$
$$\int dx v'' F'(\alpha v'') = v' F'(\alpha v'') - v\,D_x F'(\alpha v'') + \int v dx\,D_x^2 F'(\alpha v''),$$
$$\int dx v''' F'(\alpha v''') = v''\,F'(\alpha v''') - v'\,D_x F'(\alpha v''')$$
$$+ v D_x^2 F'(\alpha v''') - \int v dx\,D_x^3 F'(\alpha v'''),$$

. . . .

En substituant, on trouvera

$$\int dx\,F(x, u+v, u'+v', \ldots) = \int dx\,F(x, u, u', \ldots)$$
$$+ v\int_0^1 d\alpha\,[F'(\alpha v') - D_x F'(\alpha v'') + D_x^2 F'(\alpha v''') \ldots]$$
$$+ v'\int_0^1 d\alpha\,[F'(\alpha v'') - D_x F'(\alpha v''') + \ldots] + v''\int_0^1 d\alpha\,[F'(\alpha v''') - \ldots]$$
$$+ \ldots + \int_0^1 d\alpha \int v dx\,[F'(\alpha v) - D_x F'(\alpha v') + D_x^2 F'(\alpha v'') - \ldots].$$

La fonction sous le signe $\int u\,dx$, savoir,

$$[F''(\alpha v) - D_x F'(\alpha v') + D_x^2 F'(\alpha v'') - \ldots],$$

n'est autre que la fonction

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots \pm D_x^n F'(y^{(n)}),$$

dans laquelle on aurait substitué $u + \alpha v$ à la place de y. Si donc la fonction proposée est telle que l'on ait identiquement, quel que soit y,

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots \pm D_x^n F'(y^{(n)}) = 0,$$

il en résultera que la partie sous le signe $\int v\,dx$ sera nulle : l'équation précédente ne renfermera plus d'intégration à effectuer relativement à x, et l'intégrale $\int dx\, F(x,\ u + v,\ u' + v', \ldots)$, ou, ce qui revient au même, en mettant pour v sa valeur $y - u$, l'intégrale $\int dx F[x, y, y', \ldots, y^{(n)}]$, se trouvera exprimée par de simples quadratures, c'est-à-dire au moyen d'intégrales définies prises depuis $\alpha = 0$, jusqu'à $\alpha = 1$.

221. Réciproquement, si l'expression

$$F[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n)}],$$

est intégrable, on devra avoir identiquement

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots \pm D_x^n F'(y^{(n)}) = 0.$$

Dans ce cas, en effet, l'intégrale $\int F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,dx$ pourra être obtenue, et sera une certaine fonction φ de x, $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, de sorte que l'on aura identiquement

$$D_x \varphi[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n-1)}] = F[x,\ y,\ y', \ldots,\ y^{(n)}].$$

Substituons, avec Lagrange, dans cette équation identique, $y + 6v$ à la place de y, 6 étant une variable indépendante de x, et v une fonction quelconque de x ; on aura

$$\begin{aligned} D_x \varphi[x,\ & y + 6v,\ y' + 6v', \ldots,\ y^{(n-1)} + 6v^{(n-1)}] \\ & = F[x, y + 6v,\ y' + 6v', \ldots, y^{(n)} + 6v^{(n)}]; \end{aligned}$$

si l'on différentie par rapport à θ, en remarquant que

$$D_\theta D_x \varphi = D_x D_\theta \varphi,$$

il viendra, en employant encore la notation abrégée,

$$\begin{aligned} &D_x[v\varphi'(y+\theta v)+v'\varphi'(y'+\theta v')+\ldots+v^{(n-1)}\varphi'(y^{(n-1)}+\theta v^{(n-1)})] \\ &= vF'(y+\theta v)+v'F'(y'+\theta v')+\ldots+v^{(n)}F'(y^{(n)}+\theta v^{(n)}). \end{aligned}$$

Cette équation devant avoir lieu quel que soit θ, on pourra faire $\theta = 0$, et l'on aura, quels que soient v et y,

$$(C)\quad \left\{\begin{aligned} &vF'(y) + v'F'(y') + \ldots + v^{(n)}F'(y^{(n)}) \\ &= D_x[v\varphi'(y)+v'\varphi'(y') + \ldots + v^{(n-1)}\varphi'(y^{(n-1)})]. \end{aligned}\right.$$

Il résulte de cette dernière équation que l'expression

$$vF'(y) + v'F'(y') + \ldots + v^{(n)}F'(y^{(n)})$$

devra être une dérivée exacte quand F en sera une. Or si dans les équations qui donnaient $\int dx v'F'(\alpha v')$, $\int dx v''F'(\alpha v'')$, on substitue

$y, y', y'', \ldots$ à $u + \alpha v$, $u' + \alpha v'$, $u'' + \alpha v''$, ...; puis qu'on différentie par rapport à x, on trouvera

$$\begin{aligned} &v'F'(y') = D_x[vF'(y')] - vD_xF'(y'), \\ &v''F'(y'') = D_x[v'F'(y'') - vD_xF'(y'')] + vD_x^2F'(y''), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et l'équation (C) pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} &v[F'(y) - D_xF'(y') + D_x^2F'(y'') - \ldots \pm D_x^nF'(y^{(n)})] \\ &= D_x[v\varphi'(y) + \ldots] - D_xU = D_xV. \end{aligned}$$

U et V étant des fonctions déterminées. Le premier membre de cette dernière équation doit être, ainsi que le second, une différentielle exacte; mais il ne peut l'être, puisqu'il contient v sans renfermer sa dérivée, il faut donc que les deux membres de cette équation identique soient nuls à la fois, et l'on aura nécessairement

$$F'(y) - D_xF'(y') + D_x^2F'(y'') - \ldots = 0;$$

ou mieux $D_yF - D_xD_{y'}F + D_x^2D_{y''}F - \ldots = 0$.

La seule condition nécessaire et suffisante pour que l'expression $F(x, y, y', y'', \ldots)dx$ soit une différentielle

exacte et immédiatement intégrable, est donc que l'on ait identiquement

$$F'(y) - D_x F'(y') + D_x^2 F'(y'') - \ldots = 0.$$

De plus, quand cette condition est satisfaite, on a

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} \int dx\, F(x, y, y', \ldots) = \int dx\, F(x, u, u', \ldots) \\ + v \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v') - D_x F'(\alpha v'') + \ldots \right] \\ + v' \int_0^1 d\alpha \left[F'(\alpha v'') - D_x F'(\alpha v''') + \ldots \right] + \ldots, \end{array} \right.$$

et l'intégration de l'expression $F(x, y, y', y'', \ldots)\, dx$ est ramenée à de simples quadratures.

Si dans l'équation (A) on fait $u = 0$, et par suite $u' = 0$, $u'' = 0, \ldots$, il viendra

$$\int F(x, y, y', y'', \ldots) dx = \int F(x, 0, 0, 0, \ldots) dx$$

$$+ y \int_0^1 [F'(y') - D_x F'(y'') + \ldots] d\alpha$$

$$+ y' \int_0^1 [F'(y'') - D_x F''(y'') + \ldots] d\alpha,$$

....

C'est la formule de Poisson, mais elle manque de généralité; elle devient inexacte quand $F(x, 0, 0, \ldots)$ devient infinie ou indéterminée, ce qui arrivera, par exemple, si l'on prend

$$F(x, y, y', \ldots) = 1 + \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} - \frac{yy''}{y'^2}, \ldots,$$

et dans une infinité d'autres cas. Comme la formule de Poisson n'est au fond que la série par laquelle Lagrange représente l'intégrale $\int F dx$, cette série sera elle-même

défectueuse si $F(x,0,0,0)$ est infinie ou indéterminée. L'emploi de la fonction u fait éviter cet écueil en faisant disparaître la discontinuité des fonctions.

Exemples : 1°. Si F est fonction des seules variables x, y, on aura

$$dF = M dx + N dy;$$

la condition d'intégrabilité se réduira à $N = 0$. $F dx$ ne sera une différentielle exacte qu'autant que F ne renfermera point y, ce qui est évident *à priori*.

2°. Si $F = M + Ny' = \frac{1}{dx}(M dx + N dy)$, on aura

$$dF = \left(\frac{dM}{dx} + y'\frac{dN}{dx}\right)dx + \left(\frac{dM}{dy} + y'\frac{dN}{dy}\right)dy + N dy',$$

et l'on en conclura que $M dx + N dy$ sera une différentielle exacte quand on aura

$$\frac{dM}{dx} + y'\frac{dN}{dy} - \frac{dN}{dx} - \frac{dN}{dy}y' = 0,$$

ou

$$\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} = 0,$$

ce que nous savions déjà.

3°. Pour mettre mieux en évidence la simplicité et la vérité du théorème d'Euler, procédons *à posteriori*. Supposons que l'on ait

$$\int F dx = \frac{xy'}{y}, \quad \text{on en tirera} \quad F = \frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{xy''}{y},$$

$$dF = \left(-\frac{y'^2}{y^2} + \frac{y''}{y}\right)dx + \left(-\frac{y'}{y^2} + \frac{2y'^2x}{y^3} - \frac{xy''}{y^2}\right)dy$$
$$+ \left(\frac{1}{y} - \frac{2xy'}{y^2}\right)dy' + \frac{x}{y}dy'',$$

et l'on aura bien

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0,$$

ce qui devait être.

222. D'après ce que nous avons vu, lorsque la condition d'intégrabilité est remplie, l'équation qui donne la valeur de l'expression $\int_{x_0}^{x_1} F dx$ se réduit à

$$\int_{x_0}^{x_1} F dx = \varphi(x_1,\ y_1,\ y'_1,\ y''_1,\ldots, x_0,\ y_0,\ y'_0,\ldots).$$

Concevons actuellement que, sans changer la fonction de x que représente y, on différentie les deux membres de cette dernière équation par rapport à x_1 qui est arbitraire; il viendra

$$F[x_1,\ y_1,\ldots,\ y_1^{(n-1)}] = \frac{d\varphi}{dx_1},$$

et par conséquent, en supprimant les indices, on voit qu'indépendamment de toute relation particulière entre y et x, F est la dérivée, par rapport à x, de la fonction φ, dans laquelle on considérerait les quantités relatives à la limite x_0 comme des constantes, et où l'on supprimerait les indices de celles qui se rapportent à la limite x_1; on en conclura immédiatement que, pour effectuer l'intégration dans le cas où la condition d'intégrabilité sera remplie, il suffira de donner à la fonction y une forme particulière telle que l'on puisse, à l'aide d'un nombre convenable de paramètres ou de constantes arbitraires, disposer des valeurs extrêmes de cette fonction et de ses $n - 1$ premières dérivées relatives à une des limites de l'intégration. L'intégrale ne se trouvera dépendre que de ces valeurs extrêmes et de celles qui se rapportent à l'autre limite, lesquelles devront être considérées comme des constantes; et, en remplaçant les premières par x, y, y',..., $y^{(n-1)}$, on aura l'intégrale cherchée.

Exemples :

$$F = 2x + y^2 + 2xyy' + xy'' + x^2y''' - y';$$

posons

$$y = a + bx + cx^2,$$

d'où

$$y' = b + 2cx, \quad y'' = 2c, \quad y''' = 0,$$
$$\mathrm{F} = 2x + (a + bx + cx^2) + 2x(a + bx + cx^2)(b + 2cx) - b,$$

il faudra intégrer cette expression entre les limites x_0, x_1; or

$$\int_{x_0}^{x_1} 2x dx = x_1^2 - x_0^2,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(a + bx + cx^2)^2 dx = x_1(a + bx_1 + cx_1^2)^2 - x_0(a + bx_0 + cx_0^2)^2$$
$$- \int_{x_0}^{x_1} 2x(b + 2cx)(a + bx + cx^2)dx;$$

en ajoutant et remarquant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} 2x(b + 2cx)(a + bx + cx^2)dx$$

disparaît, il vient, après quelques réductions,

$$x_1^2 - x_0^2 - b(x_1 - x_0) + x_1(a + bx_1 + cx_1^2)^2 - x_0(a + bx_0 + cx_0^2)^2.$$

Il reste à introduire dans cette expression les valeurs extrêmes de y et de ses dérivées y', y''; or, on a

$$a + bx_1 + cx_1^2 = y_1^2, \quad b = y'_1 - 2y''_1 x_1;$$

en substituant, regardant comme constantes les valeurs initiales x_0, y_0, y'_0, y''_0, et changeant x_1, y_1, y'_1, y''_1, en x, y, y', y'', on aura définitivement pour l'intégrale cherchée,

$$x^2 + xy^2 - xy' + x^2 y'' + C.$$

Au lieu de $ax^2 + bx + c$, on aurait pu employer toute autre fonction telle que le nombre de ses constantes permît de disposer arbitrairement de y et de ses deux premières dérivées. L'habitude du calcul indiquera, dans

chaque cas particulier, la fonction que l'on doit choisir pour rendre les intégrations plus faciles.

223. On déduit facilement de ce qui précède les conditions que la fonction F doit remplir pour être intégrable un certain nombre de fois, indépendamment de toute forme particulière attribuée à y. En effet, comme on a

$$\int dx \int F dx = x \int F dx - \int x F dx,$$

et que, par hypothèse, $\int F dx$ est une différentielle exacte, la fonction F sera deux fois intégrable si l'on a

$$D_y . xF - D_x D_{y'} . xF + D_x^2 D_{y''} . xF + \ldots = 0.$$

En développant le premier membre, et ayant égard à la première équation de condition

$$D_y F - D_x D_{y'} F + D_x^2 D_{y''} F + \ldots = 0,$$

on trouvera, pour la seconde condition cherchée,

$$D_{y'} F - 2 D_x D_{y''} F + 3 D_x^2 D_{y'''} F + \ldots = 0.$$

En partant de l'équation

$$\int dx \int dx \int F dx = \frac{x^2}{2} \int F dx - x \int x F dx + \frac{1}{2} \int F x^2 dx,$$

on trouverait de même que F sera trois fois intégrable si, en outre des deux équations déjà obtenues, on a identiquement

$$D_{y''} F - \frac{3.2}{1.2} D_x D_{y'''} F + \frac{4.3}{1.2} D_x^2 D_{y^{\text{IV}}} F + \ldots = 0.$$

En général, la fonction F sera m fois intégrable si l'on a

$$D_{y^{(m)}} F - \frac{(m+1)m \ldots 2}{1.2.3\ldots m} D_x D_{y^{(m+1)}} F + \frac{(m+2)(m+1)\ldots 3}{1.2.3\ldots m} D_x^2 D_{y^{(p+2)}} F + \ldots = 0.$$

Cette formule a été donnée d'abord par Lexell ; on en déduit toutes les conditions précédentes en donnant à m toutes les valeurs depuis o jusqu'à m et remarquant que $y^{(0)} = y$. On en conclut que les conditions qui expriment que la fonction F est n fois intégrable, ou que Fdx^n est une différentielle exacte de l'ordre n, sont au nombre de n. Il est de plus évident, d'après la manière dont nous y sommes parvenus, qu'elles ne sont pas seulement nécessaires, mais de plus suffisantes.

224. On étend sans difficulté ces raisonnements à une fonction différentielle d'un ordre quelconque, et d'un nombre quelconque de variables y, z,...,

$$F[x,\ y,\ y',\ y'',\ldots,y^{(n)},\quad z,\ z',\ z'',\ldots,\ z^{(n)},\ldots].$$

Remplaçons en effet, dans cette fonction, y par $u_1 + \alpha v_1$, z par $u_2 + \alpha v_2$,..., et désignons par $f(\alpha)$ le résultat de cette substitution, en sorte que l'on ait

$$f(\alpha) = F[x,\ u_1+\alpha v_1,\ u'+\alpha v'_1,\ldots,u_1^{(n)}+\alpha v_1^{(n)},\ u_2+\alpha v_2,\ u'_2+\alpha v'_2,\ldots].$$

En différentiant d'abord par rapport à α, puis intégrant entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, on formera, comme ci-dessus, l'équation

$$\begin{aligned} F(x,\ y,\ y',\ y'',\ldots,\ z,\ z_{,},\ z'',\ldots) = {} & F(x,\ u_1,\ u'_1,\ldots,\ u_2,\ u'_2,\ldots) \\ & + \int_0^1 d\alpha[v_1 F'(\alpha v_1) + v'_1\ F'(\alpha v'_1) + \ldots] \\ & + \int_0^1 d\alpha\,[v_2 F'(\alpha v_2) + v'_2\ F'(\alpha v'_2) + \text{etc.}.\ ]. \end{aligned}$$

En multipliant par dx, intégrant par rapport à x, entre les limites x_0, x_1, et réduisant à l'aide de l'intégration par parties, on décomposera le second membre en deux portions : l'une, ramenée à de simples quadratures, et qui dépendra uniquement des valeurs extrêmes de $x, y, y',\ldots$,

z, z',..., mais nullement de la forme des fonctions ν_1, ν_2,...; l'autre, formée d'intégrales doubles, dépendantes de la forme des fonctions ν_1, ν_2,..., qui sera

$$\int_0^1 d\alpha \int \nu_1 dx [\mathrm{F}'(\alpha\nu_1) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(\alpha\nu'_1) + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(\alpha\nu''_1) - \ldots]$$
$$+ \int_0^1 d\alpha \int \nu_2 dx [\mathrm{F}'(\alpha\nu_2) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(\alpha\nu'_2) + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(\alpha\nu''_2) \ldots],$$

et qui devra nécessairement s'évanouir pour que $\int \mathrm{F}(x)dx$ soit une différentielle exacte ou soit immédiatement intégrable. Comme d'ailleurs les fonctions ν_1, ν_2,... sont entièrement indépendantes les unes des autres, on devra avoir

$$\mathrm{F}'(\alpha\nu') - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(\alpha\nu'_1) + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(\alpha\nu''_1) - \ldots = 0,$$
$$\mathrm{F}'(\alpha\nu_2) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(\alpha\nu'_2) + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(\alpha\nu''_2) - \ldots = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{F}'(y) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(y') + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(y'') - \ldots = 0,$$
$$\mathrm{F}'(z) - \mathrm{D}_x \mathrm{F}'(z') + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{F}'(z'') - \ldots = 0,$$

ou mieux encore

$$\mathrm{D}_y \mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y'} \mathrm{F} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} - \ldots = 0,$$
$$\mathrm{D}_z \mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{z'} \mathrm{F} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{z''} \mathrm{F} - \ldots = 0.$$

225. Terminons par quelques remarques dues à Euler. En multipliant par dx le premier membre de l'équation de condition

$$\mathrm{D}_y \mathrm{F} - \mathrm{D}_x \mathrm{D}_{y'} \mathrm{F} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{D}_{y''} \mathrm{F} - \ldots = 0,$$

que l'on peut écrire comme il suit

$$\mathrm{N} - \mathrm{D}_x \mathrm{P} + \mathrm{D}_x^2 \mathrm{Q} - \mathrm{D}_x^3 \mathrm{R} + \ldots = 0,$$

et intégrant, il vient

$$\int \mathrm{N}dx - \mathrm{P} + \mathrm{D}_x \mathrm{Q} - \mathrm{D}_x^2 \mathrm{R} + \mathrm{D}_x^3 \mathrm{S} - \text{etc} = C_1;$$

et l'on en conclut que Ndx est une différentielle exacte en même temps que Fdx. Multipliant de nouveau par dx et intégrant, on aura

$$\int dx\left(\int \mathrm{N}dx - \mathrm{P}\right) + \mathrm{Q} - \mathrm{D}_x\mathrm{R} + \mathrm{D}_x^2\mathrm{S} - \ldots = C_1 x + C_2\,;$$

donc, $dx\left(\int \mathrm{N}dx - \mathrm{P}\right)$ est encore une différentielle exacte. Il en sera de même de

$$dx\left[\int\left(\int \mathrm{N}dx - \mathrm{P}\right)dx + \mathrm{Q}\right],$$

de

$$dx\left\{\int dx\left[\left(\int \mathrm{N}dx - \mathrm{P}\right)dx + \mathrm{Q}\right] - \mathrm{R}\right\},\ldots;$$

donc, si F désignant une fonction de x, y, y', y'',..., $y^{(n)}$, l'expression $\mathrm{F}dx$ est immédiatement intégrable, en posant

$$\mathrm{F} = \mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy + \mathrm{P}dy' + \mathrm{Q}dy'' + \mathrm{R}dy''' + \ldots,$$

$$\mathrm{P} - \int \mathrm{N}dx = P,\quad \mathrm{Q} - \int Pdx = Q,\quad \mathrm{R} - \int Q\,dx = R,\ldots,$$

les expressions $\mathrm{N}dx$, Pdx, Qdx, Rdx,..., seront elles-mêmes immédiatement intégrables, ou seront des différentielles exactes indépendamment de la forme de y. La manière dont nous sommes arrivés à cette conclusion prouve, de plus, que réciproquement, si ces diverses expressions sont des différentielles exactes, il en sera de même de $\mathrm{F}dx$; et comme on a d'ailleurs

$$\mathrm{N} = \mathrm{D}_y\mathrm{F},\quad \mathrm{P} = \mathrm{D}_{y'}\mathrm{F},\quad \mathrm{Q} = \mathrm{D}_{y''}\mathrm{F},$$

on en conclura facilement que si $\mathrm{F}dx$ est une différentielle exacte, il en sera de même de

$$dx\,\mathrm{D}_y\mathrm{F},\quad dx\,\mathrm{D}_y^2\mathrm{F},\quad dx\,\mathrm{D}_y^3\mathrm{F},\ldots.$$

Le nombre des fonctions P, Q, R,... étant égal au nombre qui indique l'ordre de l'équation différentielle, les fonctions *P*, *Q*, *R* qui en dérivent, devront, après un certain nombre de dérivations, s'évanouir ou devenir des fonctions de la seule variable x.

$$\textit{Exemples.}\quad \int \mathrm{F}dx = \frac{y(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{xdxd^2y},$$

d'où

$$=\frac{y'(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''}-\frac{y(1+y'^2)}{x^2y''}+\frac{3y'\sqrt{1+y'^2}}{x}-\frac{yy'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2},$$

$$=\frac{-(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2y''}+\frac{3y'\sqrt{1+y'^2}}{x}-\frac{y'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2},$$

$$=\frac{(1+4y'^2)\sqrt{1+y'^2}}{xy''}-\frac{3yy'\sqrt{1+y'^2}}{x^2y''}+\frac{3y\sqrt{1+2y'^2}}{x\sqrt{1+y'^2}}-\frac{3yy'y'''\sqrt{1+y'^2}}{xy''^2},$$

$$=\frac{-y'(1+y'^2)}{xy''^2}+\frac{y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2y''^2}+\frac{2yy'''(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy'''^3},\qquad \mathrm{R}=\frac{-y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''^2};$$

on trouvera

$$\int \mathrm{N}dx=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''},\quad \int Pdx=\frac{3yy'(1+y'^2)}{xy''},\quad \int Q\,dx=\frac{-y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{xy''},$$

$$R=\mathrm{R}-\int Qdx=0$$

TRENTE-SIXIÈME LEÇON.

Propriétés générales et intégration des équations linéaires de l'ordre n à coefficients variables ou constants, avec ou sans second membre.

---

226. L'équation différentielle linéaire de l'ordre n est celle dans laquelle la variable indépendante y et ses dérivées $y'=D_xy'$, $y''=D_x^2y''$, $y'''=D_x^3y$,..., $y^{(n)}=D_x^{(n)}y^{(n)}$,... entrent au premier degré, et ne sont pas multipliées l'une par l'autre. La forme générale de cette équation est

$$(1)\quad D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X\ldots,$$

A_1, A_2,..., A_n, X étant des fonctions de la seule variable x. On ne sait pas intégrer généralement cette équation, mais on a pu mettre en évidence plusieurs propriétés remarquables qui rendent plus accessible le problème de son intégration.

Première propriété. L'intégration de l'équation différentielle de l'ordre n avec second membre X, peut toujours être ramenée à l'intégration de cette même équation sans second membre

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = 0.$$

Démonstration. Faisons $y = u_1 \int v_1 dx$, u_1 et v_1 étant

deux fonctions indéterminées de x; comme on a, en vertu d'une formule connue,

$$D_x^m . uv = v D_x^m u + \frac{m}{1} D_x^{m-1} u D_x v + \frac{m(m-1)}{1.2} D_x^{m-2} u D_x^2 v + \dots + u D_x^m v,$$

on aura généralement

$$D_x^n y = D_x^n u_1 \int v_1 dx + m D_x^{n-1} u_1 v_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} D_x^{n-2} u_1 D_x v_1 + \dots + u_1 D_x^{n-1} v_1,$$

et, en substituant dans l'équation (1), pour y et ses dérivées leurs valeurs, on trouvera

$$\int v_1 dx \left[D_x^n u_1 + A_1 D_x^{n-1} u_1 + A_2 D_x^{n-2} u_1 + \dots + A_{n-1} D_x u_1 + A_n u_1 \right]$$
$$+ u_1 \left[D_x^{n-1} v_1 + B_1 D_x^{n-2} v_1 + \dots + B_{n-2} D_x v_1 + B_{n-1} v_1 \right] = X,$$

$B_1, B_2, \dots, B_{n-1}$ étant des fonctions déterminées de x et de u_1. Cela posé, si l'on sait intégrer l'équation linéaire sans second membre, on pourra choisir u_1 de manière à satisfaire à l'équation

$$D_x^n u_1 + A_1 D_x^{n-1} u_1 + A_2 D_x^{n-2} u_1 + \dots + A_{n-1} D_x u_1 + A_n u_1 = 0,$$

ce qui fera disparaître le coefficient de $\int v_1 dx$ et ramènera immédiatement l'intégration de l'équation d'ordre n avec second membre à l'intégration d'une équation de même forme, mais de l'ordre $n - 1$. Dans cette nouvelle équation, on fera $v_1 = u_2 \int v_2 dx$, et l'on n'aura plus à intégrer qu'une équation de l'ordre $n - 1$ sans second membre, avec une équation de l'ordre $n - 2$ avec second membre. Par une série de substitutions semblables, on abaissera de plus en plus l'ordre de l'équation différentielle proposée jusqu'à ce qu'on l'ait réduit à l'unité. Donc, lorsqu'on sait intégrer l'équation linéaire d'ordre n sans second membre, l'intégration de l'équation avec

second membre se trouve elle-même ramenée à l'intégration toujours possible d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et peut par conséquent être réalisée.

227. *Deuxième propriété.* L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n, avec second membre, se déduit, au moyen d'une intégrale multiple, des intégrales de n équations différentielles linéaires sans second membre.

Pour fixer les idées et rendre la démonstration plus sensible, considérons en particulier une équation du troisième ordre

$$D_x^3 y + A_1 D_x^2 y + A_2 D_x y + A_3 y = X;$$

faisons $y = u_1 \int v_1 dx$, nous en tirerons

$$D_x y = D_x u_1 \int v_1 dx + u_1 v_1,$$

$$D_x^2 y = D_x^2 u_1 \int v_1 dx + 2 D_x u_1 v_1 + u_1 D_x v_1,$$

$$D_x^3 y = D_x^3 u_1 \int v_1 dx + 3 D_x^2 u_1 v_1 + 3 D_x u_1 D_x v_1 + u_1 D_x^2 v_1.$$

Substituant ces valeurs et celle de y dans l'équation proposée, et posant, pour abréger,

$$3 D_x^2 u_1 + 2 A_1 D_x u_1 + A_2 u_1 = B_2 u_1, \quad 3 D_x u_1 + A_1 u_1 = B_1,$$

on aura

$$(D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3) \int v_1 dx$$
$$+ u_1 (D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1) = X,$$

et si l'on choisit pour u_1 une des intégrales particulières de l'équation

$$D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3 u_1 = 0,$$

il viendra

$$D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1 = \frac{X}{u_1}.$$

Faisons de nouveau $v_1 = u_2 \int v_2 dx$, u_2 et v_2 étant deux nouvelles fonctions de x; en substituant, et posant

$$C_1 = 2 D_x u_2 + B_1 u_2,$$

on aura

$$(D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2) \int v_2 dx + u_2 (D_x v_2 + C_1 v_2) = \frac{X}{u_1},$$

et si l'on choisit pour u_2 une des intégrales particulières de l'équation $D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$, il viendra

$$D_x v_2 + C_1 v_2 = \frac{X}{u_1 u_2}.$$

Faisons enfin $v_2 = u_3 \int v_3 dx$; en substituant, il viendra

$$(D_x u_3 + C_1 u_3) \int v_3 dx + u_3 v_3 = \frac{X}{u_1 u_2},$$

et en prenant pour u_3 l'intégrale de l'équation linéaire du premier ordre $D_x u_3 + C_1 u_3 = 0$, on aura

$$v_3 = \frac{X}{u_1 u_2 u_3}.$$

En remontant de proche, on déterminera tour à tour v_2, v_1, et par suite y, qui sera donné par l'équation

$$y = u_1 \int u_2 dx \int u_3 dx \int \frac{X dx}{u_1 u_2 u_3},$$

dans laquelle u_1, u_2, u_3 sont les intégrales d'équations sans seconds membres.

En généralisant ce que nous venons de dire, et appelant toujours u_1, u_2, u_3,..., u_n les intégrales des n équations sans seconds membres que l'on obtient par les sub-

stitutions successives, on aurait pour l'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n,

$$y = u_1 \int u_2 dx \int u_3 dx \ldots \int u_n dx \int \frac{X\,dx}{u_1 u_2 u_3 \ldots u_n}.$$

228. *Troisième propriété.* L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire avec second membre se déduit au moyen d'une intégrale multiple des n intégrales particulières U_1, $U_2, \ldots$, U_n de l'équation sans second membre.

Pour le prouver, il suffit de montrer qu'on peut, dans tous les cas, substituer aux n intégrales particulières u_1, u_2, $u_3, \ldots$, u_n, qui appartiennent à n équations différentes, les n intégrales $U_1, = u_1$, U_2, $U_3, \ldots$, U_n de la seule équation

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + A_2 D_x^{n-2} u + \ldots + A_{n-1} D_x u + A_n u = 0,$$

qui est l'équation proposée sans second membre.

Raisonnons encore, pour plus de simplicité, sur l'équation différentielle linéaire du troisième ordre. Multiplions l'équation $D_x^3 u_1 + A_1 D_x^2 u_1 + A_2 D_x u_1 + A_3 u_1 = 0$ par $\int u_2 dx$, et ajoutons à ce produit l'équation

$$D_x^2 v_1 + B_1 D_x v_1 + B_2 v_1 = \frac{X}{u_1};$$

après y avoir substitué pour B_1, B_2 leurs valeurs, on aura

$$\begin{aligned}
D_x^3 u_1 \int u_2 dx + 3\,D_x^2 u_1 u_2 + 3\,D_x u_1 D_x u_2 + u_1 D_x^2 u_2 \\
+ A_1\left(D_x^2 u_1 \int u_2 dx + 2\,D_x u_1 u_2 + u_1 D_x u_2\right) \\
+ A_2\left(D_x u_1 \int u_2 dx + u_1 u_2\right) + A_3 u_1 \int u_2 dx = 0.
\end{aligned}$$

Or, il est aisé de voir que les polynômes qui composent les

différents termes du premier membre sont, abstraction faite des coefficients A_3, A_2, A_1, le produit $u_1 \int u_2 dx$, et ses dérivées première, seconde, troisième, de sorte que l'équation qui précède peut se mettre sous la forme très-simple

$$D_x^3 . u_1 \int u_2 dx + A_1 D_x^2 . u_1 \int u_2 dx + A_2 D_x . u_1 \int u_2 dx + A_3 u_1 \int u_2 dx = 0,$$

et l'on en conclut que si l'une des intégrales de l'équation sans second membre

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0$$

est $u_1 = U_1$, $U_1 \int u_2 dx$ sera une seconde intégrale de cette même équation; et, en appelant cette seconde intégrale U_2, on aura

$$U_2 = U_1 \int u_2 dx, \quad \text{et par suite} \quad u_2 = D_x \frac{U_2}{U_1}:$$

u_2 d'ailleurs est une intégrale de l'équation

$$D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0.$$

Si l'on désigne par u'_2 une seconde intégrale de cette même équation, on prouverait, en raisonnant comme nous venons de le faire, que $U_3 = U_1 \int u'_2 dx$ serait une troisième intégrale de l'équation sans second membre, et l'on aurait

$$u'_2 = D_x \frac{U_3}{U_1};$$

donc, si U_1, U_2, U_3 sont les trois intégrales de l'équation sans second membre

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0,$$

les intégrales de l'équation

$$D_x^2 u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$$

seront $D_x \frac{U_2}{U_1}$, $D_x \frac{U_3}{U_1}$.

Remarquons enfin que l'équation $D_x u_3 + C_1 u_3 = 0$ est, à l'égard de l'équation $D_x u_2 + B_1 D_x u_2 + B_2 u_2 = 0$, ce que cette dernière équation était par rapport à $D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0$. On aura donc aussi

$$u_3 = D_x \frac{u'_2}{u_2},.$$

et, par conséquent,

$$u_3 = D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}}.$$

Les intégrales u_2, u_3 sont donc exprimées au moyen des intégrales U_1, U_2, U_3 de la seule équation

$$D_x^3 u + A_1 D_x^2 u + A_2 D_x u + A_3 u = 0.$$

En substituant à u_1, u_2, u_3 leurs valeurs dans l'équation qui donne la valeur de y ou l'intégrale de l'équation différentielle proposée, on trouve

$$y = U_1 \int d_x \frac{U_2}{U_1} \int d_x . \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}} \int \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_2}{U_1} D_x . \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}}}.$$

Il est évident que ces raisonnements s'étendent d'eux-mêmes à une équation d'ordre quelconque. En appelant U_1, U_2, U_3, ..., U_n les n intégrales de l'équation sans second membre

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + A_2 D_x^{n-2} u + \ldots + A_{n-1} D_x u + A_n u = 0,$$

les intégrales u_2, u_3, u_4, ..., u_n des équations qu'on en déduira par les substitutions successives $y = u_1 \int v_1 dx$,

$u_1 = u_2 \int v_2 dx$, seront

$$D_x \frac{U_2}{U_1},\quad D_x \frac{D_x \frac{U_2}{U_1}}{D_x \frac{U_3}{U_1}} \cdots,$$

et la valeur générale de cette intégrale sera

$$y = U_1 \int d_x \frac{U_2}{U_1} \int d_x \frac{D_x \frac{U_3}{U_2}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots \int \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_2}{U_1} D_x \frac{D_x \frac{U_3}{U_2}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots}.$$

Appliquons cette formule à l'équation $D_x^2 y - y = x$: l'équation $D_x^2 u - u = 0$ a les deux intégrales particulières $U_1 = e^x$, $U_2 = e^{-x}$; donc

$$y = e^x \int D_x e^{-2x} \int \frac{x dx}{e^x D_x e^{-2x}} = e^x \int (-2e^{-2x} dx) \int \frac{x dx}{e^x(-2e^{-2x})}$$
$$= e^x \int e^{-2x} dx \int x e^x dx = e^x \int e^{-2x} dx (xe^x - e^x + C)$$
$$= e^x \left[\int Ce^{-2x} dx + \int e^{-x}(x-1) dx = -\frac{C}{2} e^{-x} + C_2 e^x - x \right];$$

et, en posant $-\frac{C}{2} = C_1$,

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - x.$$

Telle est l'intégrale générale cherchée.

L'expression générale de y, sous la forme qui s'est présentée d'abord, renferme n intégrations successives qu'il est facile, dans tous les cas, de réduire à des intégrales simples. Posons, en effet,

$$d_x \frac{U_2}{U_1} = du_n,\quad d_x \frac{D_x \frac{U_3}{U_2}}{D_x \frac{U_3}{U}} = du_{n-1} \cdots \frac{X dx}{U_1 D_x \frac{U_2}{U_1} D_x \frac{D_x \frac{U_3}{U_2}}{D_x \frac{U_2}{U_1}} \cdots} = du_1,$$

on aura

$$y = U_1 \int du_n \int du_{n-1} \int du_{n-2} \ldots \int du_3 \int du_2 \int du_1,$$

et, par suite, en intégrant par parties,

$$y = U_1 \int du_n \int du_{n-1} \ldots \int du_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_1 \right)$$

$$= U_1 \int du_n \int du_{n-1} \ldots \int du_4 \left[u_3 \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_1 \right) - \int u_3 d \left(u_2 u_1 - \int u_2 du_1 \right) \right]$$

et ainsi de suite.

229. *Quatrième propriété.* Si l'on connaît m intégrales particulières de l'équation différentielle linéaire sans second membre, on pourra toujours ramener l'intégration de l'équation avec second membre à l'intégration d'une nouvelle équation linéaire de l'ordre $n - m$.

Démonstration. Soient $U_1, U_2, \ldots, U_m$ les m intégrales particulières données : en posant $y = U_1 \int v dx$ et substituant dans l'équation différentielle avec second membre, le coefficient de $\int v dx$ s'évanouira, et cette équation avec second membre sera remplacée par la suivante d'ordre $n - 1$,

$$(3) \qquad D_x^{n-1} v + B_1 D_x^{n-2} v + \ldots + B_{n-2} D_x v + B_{n-1} v = X,$$

et, comme nous l'avons prouvé, des m intégrales particulières $U_1, U_2, \ldots, U_m$, on déduira $m - 1$ intégrales particulières $V_1 = D_x \frac{U_2}{U_1}$, $V_2 = D_x \frac{U_3}{U_1}, \ldots, V_{m-1} = D_x \frac{U_m}{U_1}$ de l'équation (3) sans second membre

$$D_x^{n-1} v + B_1 D_x^{n-2} v + \ldots + B_{n-2} D_x v + B_{n-1} v = 0.$$

En faisant d'ailleurs dans l'équation (3) $v = V_1 \int w dx$,

on la ramènera à une nouvelle équation d'ordre $n - 2$,

$$(4) \qquad D_x^{n-2} w + C_1 D_x^{n-3} w + \ldots + C_{n-3} D_x w + C_{n-2} w = X_y$$

et l'on connaîtra $m - 2$ intégrales $W_1 = D_x \frac{V_2}{V_1}, \ldots\ldots,$ $W_{m-2} = D_x \frac{V'_{m-1}}{V_1}$, de l'équation sans second membre

$$D_x^{n-2} w + C_1 D_x^{n-3} w + \ldots + C_{n-3} D_x w + C_{n-2} w = 0 \ldots,$$

que l'on ramènera à l'ordre $n - 3$ à l'aide de W_1 ou de U_2 qui sert à calculer W_1.

En continuant de la sorte, on verra que chacune des intégrales particulières données $U_1, U_2, \ldots, U_m$ sert à réduire d'une unité l'ordre de l'équation différentielle proposée, et que, par conséquent, cette équation peut être ramenée à une équation de l'ordre $n - m$.

230. *Cinquième propriété.* Si $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ sont n intégrales particulières de l'équation sans second membre, et y_1 une intégrale particulière de l'équation avec second membre, les intégrales générales des équations avec ou sans second membre seront respectivement

$$y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + \ldots + C_n Y_n + y_1,$$
$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + C_3 Y_3 + \ldots + C_n Y_n.$$

Démonstration. En effet, 1° il est évident, dans l'hypothèse admise, que les valeurs y, Y vérifieront respectivement les équations avec ou sans second membre; 2° ces valeurs renferment n constantes arbitraires; donc ce sont les intégrales générales cherchées.

Remarquons, toutefois, que y, Y ne seront les intégrales générales qu'autant que les n constantes étant réellement distinctes, on pourra en disposer de manière à faire prendre, pour $x = x_0$, à la fonction y et à ses $n - 1$

et l'intégrale générale sera

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

233. *Huitième propriété.* Lorsqu'on connaît les intégrales particulières d'une équation linéaire sans second membre, on peut toujours former les coefficients de cette équation par des opérations analogues à celles qui servent à former les coefficients des équations algébriques en fonction symétrique des racines.

Démonstration. Appelons $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n intégrales particulières de l'équation linéaire

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n = 0,$$

et y son intégrale générale, on aura

$$y = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n,$$

et si l'on pose $y = y_1 \int z dx$, il viendra

$$y_1 D_x^{n-1} z + (n D_x y_1 + A_1 y_1) D_x^{n-2} y + \ldots$$
$$+ (D_x^n y_1 + A_1 D_x^{n-1} y_1 + \ldots + A_n y_1) \int z dx = 0;$$

ou bien, en remarquant que le coefficient de $\int z dx$ est nul, et divisant par y_1,

$$D_x^{n-1} z + B_1 D_x^{n-2} z + \ldots + B_{n-1} z = 0,$$

et

$$n D_x y_1 + A_1 y_1 = B_1 y_1, \quad A_1 = -\frac{n}{y_1} D_x y_1 + B_1.$$

De plus, l'équation en z a pour intégrales particulières les $n - 1$ quantités $D_x \frac{y_2}{y_1}$, $D_x \frac{y_3}{y_1}$, $D_x \frac{y_n}{y_1}$, et si l'on répète sur cette équation l'opération que nous avons faite sur

l'équation donnée, on trouvera

$$B_1 = \frac{-(n-1)D_x . D_x \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} + C_1;$$

on calculerait C_1, D_1,..., comme on a calculé A_1, B_1, et comme, après n transformations, on parviendra nécessairement à une équation dans laquelle le coefficient du second terme sera égal à o, puisque le degré de l'équation différentielle diminue d'une unité à chaque opération, la série des termes A_1, B_1, C_1,... s'arrêtera, et l'on aura, en substituant,

$$A_1 = -\frac{n}{y_1} D_x y_1 - \frac{(n-1) D_x^2 \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} - \frac{(n-2) D_x^2 \frac{D_x \frac{y_3}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}}}{D_x \frac{D_x \frac{y_3}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}}}.$$

Pour appliquer cette formule à un exemple, supposons que l'on donne l'équation $D_x^2 y - m^2 y = 0$: les deux intégrales particulières sont $y_1 = C_1 e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$; on a d'ailleurs $n = 2$; en substituant ces valeurs dans la formule qui précède, et nous arrêtant aux deux premiers termes, il viendra

$$-A_1 = \frac{2D_x y_1}{y_1} + \frac{D_x^2 \frac{y_2}{y_1}}{D_x \frac{y_2}{y_1}} = 2m + \frac{4m^2}{-2m} = 2m - 2m = 0.$$

A_1 est donc nul, comme cela devait être, puisque l'équation donnée n'a pas de second terme.

On pourrait obtenir, par une analyse semblable, tous les coefficients A_2, $A_3, \ldots$, A_n en fonction des intégrales particulières y_1, $y_2, \ldots, y_n$.

En général, étant données n fonctions de x, $F_1(x)$, $F_2(x), \ldots$, $F_n(x)$, on pourra déterminer les coefficients de l'équation différentielle linéaire de l'ordre n qui aura pour intégrales particulières ces n fonctions; et il n'existera qu'une seule équation différentielle linéaire de l'ordre n, qui satisfasse à cette condition, comme il n'y a qu'une équation algébrique d'un degré déterminé qui ait n racines données.

On peut déterminer plus facilement les valeurs de A_2, $A_3, \ldots$, A_n de la manière suivante. Si l'on élimine successivement ces $n - 1$ quantités entre les n équations

$$D_x^n y_1 + A_1 D_x^{n-1} y_1 + \ldots + A_n y_1 = 0,$$
$$D_x^n y_2 + A_1 D_x^{n-1} y_2 + \ldots + A_n y_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$D_x^n y_n + A_1 D_x^{n-1} y_n + \ldots + A_n y_n = 0,$$

en considérant les différentielles $D_x^n y_1$, $D_x^{n-1} y_1, \ldots$ comme des coefficients connus, on aura la valeur de A_1 telle que nous l'avons déjà donnée. Pour en déduire la valeur de A_2, il est clair qu'il suffit, dans l'expression de A_1, de changer $D_x^{n-1} y_1$ en $D_x^{n-2} y_1$, $D_x^{n-1} y_2$ en $D_x^{n-2} y_2, \ldots$, et réciproquement, sans changer aucun des termes qui contiennent d'autres différentielles, on obtiendrait, par des permutations analogues, les valeurs de A_2, $A_3, \ldots$.

M. Libri fait observer que les quantités y_1, $y_2, \ldots$, y_n forment une espèce particulière de fonctions symétriques; que non-seulement on peut permuter ces quantités entre elles, d'une manière quelconque, comme les racines des équations algébriques, dans la formation des coefficients A_1, $A_2, \ldots$, mais qu'on peut encore écrire, au lieu

de l'une quelconque y_2 de ces quantités, la somme ou la différence d'un nombre quelconque d'entre elles, sans que la valeur des coefficients en soit altérée. Si, par exemple, pour l'équation $D_x^2 y = m^2 y$, au lieu de faire $y_1 = C_1 e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$, on posait $y_1 = C_1 e^{mx} - e^{mx}$, $y_2 = C_2 e^{-mx}$, on trouverait encore $A_1 = 0$. Ce nouveau genre de fonctions paraît mériter l'attention des géomètres.

234. M. Libri avait encore énoncé, relativement aux équations linéaires, le théorème suivant : « Une équation linéaire à deux variables de l'ordre n étant donnée, si l'on connaît les coefficients d'une autre équation différentielle de l'ordre m, également linéaire, entre les mêmes variables, et qui doit exister en même temps que la première, on pourra toujours, à l'aide des coefficients de ces deux équations, et sans effectuer aucune intégration, former une troisième équation linéaire de l'ordre $n - m$, de telle manière que l'équation de l'ordre n sera décomposée en deux autres qui seront respectivement de l'ordre m et de l'ordre $n - m$, et à l'aide desquelles on pourra intégrer l'équation proposée. » On voit qu'il n'est plus nécessaire, comme dans le théorème de Lagrange, de connaître une ou plusieurs intégrales de l'équation proposée pour opérer une réduction : il suffit d'avoir deux équations simultanées pour que l'équation de l'ordre le plus élevé puisse être réduite à deux autres équations plus simples. Cette réduction répond à la possibilité de partager une équation en deux autres lorsqu'on sait qu'elle a pour facteur un polynôme de forme donnée.

M. Liouville a publié le premier la démonstration de ce théorème fondamental. La voici telle qu'il l'a donnée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*. Soit

$$D_x^{m+n} y + A_1 D_x^{m+n-1} y + A_2 D_x^{m+n-2} y + \ldots = 0$$

une équation différentielle linéaire de l'ordre $m + n$, et

$$\mathrm{D}_x^m z + \mathrm{B}_1 \mathrm{D}_x^{m-1} z + \mathrm{B}_2 \mathrm{D}_x^{m-2} z + \ldots = 0$$

une autre équation différentielle linéaire de l'ordre m, dont toutes les intégrales appartiennent en même temps à l'équation de l'ordre $m + n$. La valeur générale de z renferme m constantes arbitraires, et celle de y doit en contenir $m + n$; cette dernière sera donc de la forme

$$y = z + C_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des constantes arbitraires. Faisons maintenant

$$u = \mathrm{D}_x^m y + \mathrm{B}_1 \mathrm{D}_x^{m-1} y + \mathrm{B}_2 \mathrm{D}_x^{m-2} y + \ldots.$$

Si l'on met pour y sa valeur dans le second membre de cette équation, z disparaîtra de lui-même en vertu de l'équation

$$\mathrm{D}_x^m z + \mathrm{B}_1 \mathrm{D}_x^{m-1} z + \mathrm{B}_2 \mathrm{D}_x^{m-2} z + \ldots = 0:$$

le résultat de la substitution sera donc une fonction linéaire des constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$; par suite, u satisfera à une certaine équation différentielle linéaire du $n^{\text{ième}}$ ordre dans laquelle les constantes n'entreront plus.

Représentons par

$$\mathrm{D}_x^n u + a_1 \mathrm{D}_x^{n-1} u + a_2 \mathrm{D}_x^{n-2} u + \ldots = 0$$

l'équation de l'ordre n dont il s'agit. Je dis que l'on peut aisément déterminer les coefficients $a_1, a_2, \ldots$.

Pour cela, j'observe qu'en différentiant la valeur de u plusieurs fois de suite, on obtient successivement les va-

leurs de $D_x u$, $D_x^2 u, \ldots, D_x^{n-1} u$, $D_x^n u$, lesquelles sont de la forme

$$\begin{aligned} D_x u &= D_x^{m+1} y + b_1 D_x^m y + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_x^{n-1} u &= D_x^{m+n-1} y + h_1 D_x^{m+n-2} y + \ldots, \\ D_x^n u &= D_x^{m+n} y + l_1 D_x^{m+n-1} y + \ldots. \end{aligned}$$

Portant toutes ces valeurs dans l'équation

$$D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} u + \ldots = 0,$$

elle deviendra

$$D_x^{m+n} y + \left.\begin{matrix} l_1 \\ + a_1 \end{matrix}\right| D_x^{m+n-1} y + \left.\begin{matrix} l_2 \\ + a_1 h_1 \\ + a_2 \end{matrix}\right| D_x^{m+n-2} + \ldots = 0.$$

De sorte qu'en comparant cette dernière équation à l'équation donnée

$$D_x^{m+n} y + A_1 D_x^{m+n-1} y + \ldots = 0,$$

on aura

$$l_1 + a_1 = A_1, \quad l_2 + A_1 h_1 + a_2 = A_2, \ldots.$$

On a donc ainsi $m + n$ équations dont les n premières fournissent successivement et sans intégration les valeurs de $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Les suivantes conduisent aux équations de condition qui doivent être remplies pour que l'équation en y de l'ordre $m + n$ soit vérifiée quand on fait $y = z$, ou pour que les intégrales de l'équation d'ordre n soient communes à l'équation d'ordre $m + n$. En supposant ces équations de condition satisfaites, l'intégration de l'équation d'ordre $m + n$ se trouve dépendre des deux

équations

$$u = D_x^m y + B_1 D_x^{m-1} y + \ldots, \qquad D_x^n u + a_1 D_x^{n-1} u + \ldots = 0,$$

qui sont respectivement de l'ordre m et de l'ordre n. De plus, d'après la manière dont les valeurs des quantités $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont formées, il est évident qu'elles ne dépendent que des n premiers coefficients des deux équations données, ce qui complète la démonstration du théorème de M. Libri. Il résulte de là une simplification remarquable : En effet, si dans les deux équations simultanées ces n premiers coefficients sont constants, l'équation $D_x^n u + \ldots = 0$ aura aussi tous ses coefficients constants et pourra, comme nous le verrons plus tard, être immédiatement intégrée, ce qui réduira l'équation de l'ordre $n + m$ à une équation de l'ordre m.

235. Pour donner encore un exemple de l'abaissement des équations linéaires, supposons qu'on nous donne les deux équations simultanées

$$\begin{aligned} D_x^2 y + A_1 D_x y + A_2 y &= A_3 z, \\ D_x^2 z + A_1 D_x z + A_2 z &= A_3 y; \end{aligned}$$

il est clair qu'en éliminant z entre ces deux équations, on aura une équation différentielle linéaire du quatrième ordre, qui sera de la forme

$$D_x^4 y + a_1 D_x^3 y + a_2 D_x^2 y + a_3 D_x y + a_4 = 0;$$

si l'on éliminait y entre ces mêmes équations, on aurait précisément la même équation en z

$$D_x^4 z + a_1 D_x^3 z + a_2 D_x^2 z + a_3 D_x z + a_4 = 0;$$

d'où il résulte que les quatre intégrales particulières dont la somme forme la valeur complète de y, sont les mêmes que celles dont se compose la valeur de z. Mais si l'on fait $z = y$ dans les deux équations données, on aura les

deux équations

$$D_x^2 y + A_1 D_x y + (A_2 - A_3) y = 0,$$
$$D_x^2 z + A_1 D_x z + (A_2 - A_3) z = 0,$$

qui serviront à connaître deux des quatre intégrales particulières que nous cherchons. Quand nous aurons trouvé les deux intégrales particulières de la première de ces équations, nous nous en servirons pour réduire au second ordre l'équation du quatrième ordre en y, et l'on voit que les deux intégrales particulières de cette équation réduite au second ordre auront entre elles un rapport exprimé par l'équation

$$D_x^2 z + A_1 D_x z + A_2 z = A_3 z,$$

et ce rapport servira pour trouver directement ces deux intégrales à l'aide d'une équation linéaire du premier ordre.

TRENTE-SEPTIÈME LEÇON.

Intégration de l'équation linéaire de l'ordre n à coefficients constants, avec ou sans dernier terme variable.

---

236. Supposons que dans l'équation

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X,$$

les coefficients A_1, A_2, $A_3, \ldots$, A_n soient des nombres, X restant une fonction quelconque de la variable indépendante x, et cherchons son intégrale générale. On peut y parvenir par diverses méthodes que nous allons exposer successivement.

1[re] *Méthode*. Réduction de l'équation différentielle de l'ordre n à un système de n équations linéaires du premier ordre. Si l'on fait

$$D_x y = y', \quad D_x y' = y'', \ldots,$$
$$D_x y^{(n-3)} = y^{(n-2)}, \quad D_x y^{(n-2)} = y^{(n-1)},$$

l'équation proposée deviendra

$$D_x y^{(n-1)} + A_1 D_x y^{(n-2)} + A_2 D_x y^{(n-3)} + \ldots$$
$$+ A_{n-1} y' + A_n y = X,$$

et l'on aura à intégrer n équations simultanées du premier ordre; or, si l'on multiplie respectivement les $n-1$ premières équations par des coefficients indéterminés $\theta^{(n-1)}$, $\theta^{(n-2)}, \ldots, \theta''$, θ' et qu'on les ajoute à la dernière, il viendra

$$D_x[y^{(n-1)} + \theta' y^{(n-2)} + \theta'' y^{(n-3)} + \ldots + \theta^{(n-2)} y' + \theta^{(n-1)} y]$$
$$+ (A_1 - \theta') y^{(n-1)} + (A_2 - \theta'') y^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ [A_{n-1} - \theta^{(n-1)}] y' + A_n y = X;$$

ou, en posant

$$t = y^{(n-1)} + \theta' y^{(n-2)} + \theta'' y^{(n-3)} + \ldots + \theta^{(n-2)} y' + \theta^{(n-1)} y,$$
$$A_1 - \theta' = \theta,\quad A_2 - \theta'' = \theta\theta',\quad A_3 - \theta''' = \theta\theta'',\ldots,$$
$$A_{n-1} - \theta^{(n-1)} = \theta\theta^{(n-2)},\quad A_n = \theta\theta^{(n-1)},$$
$$D_x t + \theta t = X,\quad dt + \theta t dx = X dx.$$

De cette dernière équation, on tire, en intégrant,

$$t = e^{-\theta x}\left(C + \int X e^{\theta x} dx\right),$$

ou

$$y^{(n-1)} + \theta' y^{(n-2)} + \ldots + \theta^{(n-2)} y' + \theta^{(n-1)} y$$
$$= e^{-\theta x}\left(C + \int X e^{\theta x} dx\right).$$

D'ailleurs, en posant $\theta = -r$, les équations qui déterminent θ', θ'', θ''', ..., $\theta^{(n-2)}$, $\theta^{(n-1)}$ donnent, par des substitutions successives,

$$\theta' = A_1 + r,\quad \theta'' = A_2 + A_1 r + r^2,\ldots,$$
$$\theta_{n-1} = A_{n-2} + A_{n-3} r + A_{n-4} r^2 + \ldots + A_1 r^{n-3} + r^{n-2},$$
$$0 = A_n + A_{n-1} r + A_{n-2} r^2 + \ldots + A_1 r^{n-1} + r^n.$$

Cette dernière équation, que l'on déduit de l'équation différentielle proposée, en remplaçant respectivement les dérivées $D_x^n y$, $D_x^{n-1} y$, ..., $D_x^2 y$, $D_x y$, par r^n, r^{n-1}, ..., r^2, r; $y = D_x^0 y$ par $r^0 = 1$; X par zéro, donnera pour r, n valeurs, et, par suite, pour θ', θ'', ..., $\theta^{(n-1)}$, n systèmes de valeurs. De ces n systèmes de valeurs résulteront n intégrales de l'équation

$$dt + \theta t dx = X dx.$$

En représentant par r_1, r_2, r_3, ..., r_n les n valeurs de r, par θ'_1, θ''_1, ..., $\theta_1^{(n-1)}$, θ'_2, θ''_2, ..., $\theta_2^{(n-1)}$, ..., θ'_n, θ''_n, ..., $\theta_n^{(r-1)}$ les n systèmes de valeurs correspondantes des coeffi-

cients θ', θ'', ..., $\theta^{(n-1)}$, les n intégrales seront

$$y^{(n-1)} + \theta'_1 y^{(n-2)} + \ldots + \theta_1^{(n-2)} y' + \theta_1^{(n-1)} y = e^{r_1 x}\left(C' + \int X e^{-r_1 x} dx\right),$$

$$y^{(n-1)} + \theta'_2 y^{(n-2)} + \ldots + \theta_2^{(n-2)} y' + \theta_2^{(n-1)} y = e^{r_2 x}\left(C'' + \int X e^{-r_2 x} dx\right),$$

....

....

$$y^{(n-1)} + \theta'_n y^{(n-2)} + \ldots + \theta_n^{(n-2)} y' + \theta_n^{(n-1)} y = e^{r_n x}\left(C^{(n)} + \int X e^{-r_n x} dx\right).$$

La valeur de y, tirée de ces n équations du premier degré, renfermera n constantes arbitraires, et sera l'intégrale générale de l'équation proposée.

La formule $x = \dfrac{\Sigma \pm k_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}}{\Sigma \pm a_0 b_1 c_2 \ldots g_{n-2} h_{n-1}}$, que nous avons déjà rappelée plusieurs fois, et qui donne la valeur de l'une quelconque des inconnues déterminées par un système de n équations du premier degré, montre immédiatement que la valeur de y, ou l'intégrale cherchée, sera composée de n termes proportionnels aux seconds membres des équations, et sera par conséquent de la forme

$$y = \lambda_1 e^{r_1 x}\left(C' + \int X e^{-r_1 x} dx\right) + \lambda_2 e^{r_2 x}\left(C'' + \int X e^{-r_2 x} dx\right) + \ldots + \lambda_n e^{r_n x}\left(C^{(n)} + \int X e^{-r_n x} dx\right),$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ désignant n constantes, fonctions des coefficients θ'_1, θ''_1, ..., $\theta_1^{(n-1)}$, ...

Comme les équations qui donnent y, y', ..., $y^{(n-1)}$ sont du premier degré, les valeurs de y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ doivent être absolument de même forme que celle de y: cette seule considération fournit un moyen facile de calculer les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Remarquons, pour plus de simplicité, que la valeur de y peut s'écrire comme il suit :

$$y = \Sigma\lambda e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx),$$

le signe Σ indiquant qu'on doit faire la somme des n termes correspondants aux n racines de l'équation en r. Cela posé, en différentiant, on trouvera

$$y' = \Sigma\lambda re^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx) + \Sigma\lambda X;$$

et puisque y' doit être de même forme que y, on aura nécessairement

$$y' = \Sigma\lambda re^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx),$$
$$\Sigma\lambda X = 0, \quad \text{et, par suite,} \quad \Sigma\lambda = 0;$$

en différentiant une seconde fois, on aura

$$y'' = \Sigma\lambda r^2e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx) + \Sigma\lambda rX = 0,$$

et par conséquent

$$y'' = \Sigma\lambda r^2e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx),$$
$$\Sigma\lambda rX = 0, \qquad \Sigma\lambda r = 0.$$

En continuant ainsi, on trouverait successivement

$$y''' = \Sigma\lambda r^3e^{rx}\ (C + \int Xe^{-rx}dx), \quad \Sigma\lambda r^2 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y^{(n-1)} = \Sigma\lambda r^{n-1}e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx), \quad \Sigma\lambda r^{n-2} = 0,$$
$$y^{(n)} = \Sigma\lambda r^ne^{rx}\ (C + \int Xe^{-rx}dx) + \Sigma\lambda r^{n-1}X.$$

Si maintenant on substitue dans l'équation proposée, à la place de y et de ses dérivées, leurs valeurs, il viendra

$$\Sigma\lambda e^{rx}(C + \int Xe^{-rx}dx)(A_n + A_{n-1}r + A_{n-2}r^2 + \ldots + A_1r^{n-1} + r^n)$$
$$+ \Sigma\lambda r^{n-1}X = X.$$

Le premier terme du premier membre est identiquement nul, puisque la somme Σ s'étend aux seules racines de l'équation

$$A_n + A_{n-1}r + A_{n-2}r^2 + \ldots + A_1r^{n-1} + r^n = 0.$$

Il en résulte

$$\Sigma \lambda r^{n-1} X = X, \quad \text{ou} \quad \Sigma \lambda r^{n-1} = 1.$$

On a donc, pour déterminer les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, les n équations du premier degré

$$\Sigma \lambda = 0, \quad \Sigma \lambda r = 0, \ldots, \quad \Sigma \lambda r^{n-2} = 0, \quad \Sigma \lambda r^{n-1} = 1,$$

ou bien

$$\begin{array}{l}
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_n = 0, \\
\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 r_3 + \ldots + \lambda_n r_n = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_1 r_1^{n-2} + \lambda_2 r_2^{n-2} + \lambda_3 r_3^{n-2} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-2} = 0, \\
\lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1} + \lambda_3 r_3^{n-1} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-1} = 1.
\end{array}$$

La formule symbolique

$$x = \frac{(b-k)(c-k)\ldots(h-k)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)}{(b-a)(c-a)\ldots(h-a)(c-b)\ldots(h-b)\ldots(h-g)},$$

qui donne la valeur générale de l'une des inconnues déterminées par n équations du premier degré, se réduit, dans le cas particulier où l'on a $k_0 = 0$, $k_1 = 0, \ldots$, $k_{n-2} = 0$, $k_{n-1} = 1$, à $x = \dfrac{1}{(a-b)(a-c)\ldots(a-h)}$, et donne, par conséquent,

$$\lambda_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n)},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)\ldots(r_2 - r_n)}\cdots$$

Si l'on représente par $f(r)$ le premier membre de l'équation

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0,$$

on aura

$$f(r) = (r-r_1)(r-r_2)\ldots(r-r_n), \quad \frac{1}{(r-r_2)(r-r_3)\ldots(r-r_n)} = \frac{r-r_1}{f(r)};$$

et, par suite, en faisant $r = r_1$, et remarquant que la vraie valeur de la fraction $\frac{r - r_1}{f(r)}$ qui, pour $r = r_1$, devient $\frac{0}{0}$, est le rapport des dérivées $\frac{1}{f'(r_1)}$, on trouvera

$$\lambda_1 = \frac{1}{f'(r_1)}:$$

on trouverait de même

$$\lambda_2 = \frac{1}{f'(r_2)}, \ldots, \quad \lambda_n = \frac{1}{f'(r_n)};$$

la valeur générale de y est donc, en comprenant $\frac{1}{f'(r)}$ dans la constante C,

$$y = \Sigma \frac{1}{f'(r)} e^{rx} (C + \int X e^{-rx} dx) = \Sigma C e^{rx} + \Sigma \frac{1}{f'(r)} e^{rx} \int X e^{-rx} dx$$

$$= C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

$$+ \frac{1}{f'(r_1)} e^{r_1 x} \int X e^{-r_1 x} dx + \ldots + \frac{1}{f'(r_n)} e^{r_n x} \int X e^{-r_n x} dx.$$

Si $X = 0$, c'est-à-dire si l'équation différentielle donnée n'a pas de second membre, son intégrale générale est simplement

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} = \Sigma C e^{rx}.$$

Il est facile de voir que cette valeur de y, contenant n constantes arbitraires, vérifie réellement l'équation

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = 0.$$

L'expression $y = \Sigma C e^{rx}$ donne, en effet,

$$D_x y = \Sigma C r e^{rx}, \quad D_x^2 y = \Sigma C r^2 e^{rx}, \ldots, \quad D_x^n y = \Sigma C r^n e^{rx};$$

et l'on a, en substituant,

$$\Sigma C e^{rx} (r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n) = 0,$$

or cette équation est identiquement satisfaite, puisque la somme du premier membre s'étend aux seules racines de l'équation auxiliaire

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0.$$

237. 2[me] *Méthode.* Par l'abaissement progressif de l'ordre de l'équation proposée.

Dans l'équation

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X,$$

faisons $y = e^{\alpha_1 x}\int u_1 dx$, α_1 représentant une constante indéterminée, et u_1 une fonction indéterminée de x. On trouvera, en différentiant n fois, ou, en recourant à une formule connue,

$$\begin{aligned} D_x y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1 \int u_1 dx + u_1), \\ D_x^2 y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1^2 \int u_1 dx + 2\alpha_1 u_1 + D_x u_1), \\ D_x^3 y &= e^{\alpha_1 x}(\alpha_1^3 \int u_1 dx + 3\alpha_1^2 u_1 + 3\alpha_1 D_x u_1 + D_x^2 u_1), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$D_x^n y = e^{\alpha_1 x}\left[\begin{aligned} &\alpha_1^n \int u_1 dx + n\alpha_1^{n-1} u_1 + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2} D_x u_1 \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha_1^{n-3} D_x^2 u_1 + \ldots D_x^{n-1} u_1 \end{aligned}\right].$$

Substituant ces valeurs dans l'équation proposée et divisant par $e^{\alpha_1 x}$, on trouvera

$$\begin{aligned} &(A_n + A_{n-1}\alpha_1 + A_{n-2}\alpha_1^2 + A_{n-3}\alpha_1^3 + \ldots + A_1 \alpha_1^{n-1} + \alpha_1^n)\int u_1 dx \\ &+ (A_{n-1} + 2A_{n-2}\alpha_1 + 3A_{n-3}\alpha_1^2 + \ldots + n\alpha_1^{n-1}) u_1 \\ &+ \left[A_{n-2} + 3A_{n-3}\alpha_1 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2}\right] D_x u_1 \\ &+ \left[A_{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\alpha_1^{n-3}\right] D_x^2 u_1 + \ldots \\ &+ D_x^{n-1} u_1 = X e^{-\alpha_1 x}. \end{aligned}$$

Or, puisque α_1 est une quantité constante indéterminée,

on pourra la choisir de manière à rendre nul le coefficient de $\int u_1 dx$; il suffit, pour cela, que α_1 soit racine de l'équation

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0.$$

Alors, pour déterminer u_1, on aura l'équation linéaire de l'ordre $(n-1)$

$$D_x^{n-1} u_1 + B_2 D_x^{n-2} u_1 + \ldots + B_{n-1} D_x u_1 + B_n u_1 = X e^{-\alpha_1 x},$$

dans laquelle

$$B_n = A_{n-1} + 2A_{n-2}\alpha_1 + 3A_{n-3}\alpha_1^2 + \ldots + n\alpha_1^{n-1},$$
$$B_{n-1} = A_{n-2} + 3A_{n-3}\alpha_1 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha^{n-2},$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$

Si l'on fait maintenant $u_1 = e^{\alpha_2 x}\int u_2 dx$, et qu'on opère de la même manière, on trouvera que si l'on prend pour α_2 une des racines de l'équation

$$r^{n-1} + B_2 r^{n-2} + \ldots + B_{n-1} r + B_n = 0,$$

la détermination de u_2 dépendra de l'équation linéaire de l'ordre $n-2$,

$$D_x^{n-2} u_2 + C_3 D_x^{n-3} u_2 + \ldots + C_{n-1} D_x u_2 + C_n u_2 = X e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} dx,$$

dans laquelle on fait, pour abréger,

$$C_n = B_{n-1} + 2B_{n-2}\alpha_2 + 3B_{n-3}\alpha_2^2 + \ldots + (n-1)\alpha_2^{n-2},$$
$$C_{n-1} = B_{n-2} + 3B_{n-3}\alpha_2 + \ldots;$$

on fera encore

$$u_2 = e^{\alpha_3 x}\int u_3 dx \ldots,$$

et, en continuant ainsi, on parviendra à faire disparaître, un à un, les termes de l'équation proposée, en abaissant son degré d'une unité à chaque opération, de telle sorte

qu'en faisant $u_{n-1} = e^{\alpha_n x}\int u_n dx$, on arrivera à l'équation

$$u_n = \mathrm{X}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_n)x}.$$

Avant de remonter à la valeur de y, remarquons que les racines $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ sont égales, respectivement, aux différences $r_2 - r_1, r_3 - r_2, r_4 - r_3, \ldots, r_n - r_{n-1}$, des n racines de l'équation auxiliaire

$$r_n + \mathrm{A}_1 r^{n-1} + \mathrm{A}_2 r^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1} r + \mathrm{A}_n = 0,$$

En effet, multiplions l'expression

$$\alpha_2^{n-1} + \mathrm{B}_2 \alpha_2^{n-2} + \ldots + \mathrm{B}_{n-1}\alpha_2 + \mathrm{B}_n$$

par α_2, ajoutons-la à l'équation

$$\alpha_1^n + \mathrm{A}_1\alpha_1^{n-1} + \mathrm{A}_2\alpha_1^{n-2} + \ldots + \mathrm{A}_{n-1}\alpha_1 + \mathrm{A}_n = 0,$$

et substituons aux coefficients $\mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \ldots, \mathrm{B}_{n-1}, \mathrm{B}_n$ leurs valeurs, il viendra

$$\begin{aligned}&\left[\alpha_1^n + n\alpha_1^{n-1}\alpha_2 + \frac{n(n-1)}{1.2}\alpha_1^{n-2}\alpha_2^2 + \ldots\alpha_2^n\right] + \ldots\\ &\quad + \mathrm{A}_{n-3}(\alpha_1^3 + 3\alpha_1^2\alpha_2 + 3\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)\\ &\quad + \mathrm{A}_{n-2}(\alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2) + \mathrm{A}_{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{A}_n = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&(\alpha_1 + \alpha_2)^n + \mathrm{A}_1(\alpha_1 + \alpha_2)^{n-1} + \ldots\\ &\qquad + \mathrm{A}_{n-2}(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + \mathrm{A}_{n-1}(\alpha_1 + \alpha_2) + \mathrm{A}_n = 0.\end{aligned}$$

Cette dernière équation prouve que $\alpha_1 + \alpha_2$ est, en même temps que α_1, racine de l'équation $f(r) = 0$; donc, si l'on désigne par r_2 une seconde racine de cette dernière équation, on aura

$$\alpha_1 + \alpha_2 = r_1 + \alpha_2 = r_2, \quad \alpha_2 = r_2 - r_1.$$

Généralement, si l'on nomme $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les n racines de l'équation $f(r) = 0$, et $\alpha_2, \alpha'_2, \ldots, \alpha_2^{(n-2)}$ les $n - 1$

racines de l'équation

$$\alpha_2^{n-1} + B_2\alpha^{n-2} + \ldots + B_{n-1}\alpha_2 + B_n = 0,$$

on aura

$$\alpha_2 = r_2 - r_1, \quad \alpha'_2 = r_3 - r_1,$$
$$\alpha''_2 = r_4 - r_1, \ldots, \quad \alpha_2^{(n-2)} = r_n - r_1.$$

On prouverait de la même manière, que les $n - 2$ valeurs de α_3 seront données par les équations

$$\alpha_3 = \alpha'_2 - \alpha_2, \quad \alpha'_3 = \alpha''_2 - \alpha_2, \ldots, \quad \alpha_3^{(n-3)} = \alpha_2^{(n-2)} - \alpha_2,$$

ou, en substituant pour α_2, α'_2, α''_2, ... leurs valeurs trouvées précédemment,

$$\alpha_3 = r_3 - r_2, \quad \alpha'_3 = r_4 - r_2, \ldots, \quad \alpha_3^{(n-3)} = r_n - r_2.$$

En continuant ainsi, on trouvera successivement les valeurs de α_4, α'_4, ..., α_5, α'_5, ..., α_n, qui seront données par les équations

$$\alpha_4 = r_4 - r_3, \quad \alpha'_4 = r_5 - r_3, \ldots,$$
$$\alpha_5 = r_5 - r_4, \quad \alpha'_5 = r_6 - r_5, \ldots, \quad \alpha_n = r_n - r_{n-1}.$$

Il est donc démontré que α_2, α_3, α_4, ..., α_n sont bien les différences $r_2 - r_1$, $r_3 - r_2$, ..., $r_n - r_{n-1}$ des racines de l'équation $f(r = 0)$; on aura, dès lors,

$$y = e^{r_1 x}\int u_1 dx, \quad u_1 = e^{(r_2 - r_1)x}\int u_2 dx, \ldots,$$
$$u_{n-1} = e^{(r_n - r_{n-1})x}\int u_n dx, \quad u_n = Xe^{-r_n x},$$

puis, en éliminant u_1, u_2, ..., u_n, et ajoutant une constante arbitraire à chaque intégrale, on trouvera

$$(A)\left\{\begin{aligned} ye^{-r_1 x} &= \int e^{(r_2 - r_1)x}dx \int e^{(r_3 - r_2)x}dx \int \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x}dx \int Xe^{-r_n x}dx \\ &\quad + C'\int e^{(r_2 - r_1)x}dx \int e^{(r_3 - r_2)x}dx \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x}dx \\ &\quad + C''\int e^{(r_2 - r_1)x}dx \ldots \int e^{(r_{n-1} - r_{n-2})x}dx + \ldots + C^{(n-1)}\int e^{(r_2 - r_1)x}dx + C^{(n)}. \end{aligned}\right.$$

En représentant par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les combinaisons des constantes C', C'', ..., $C^{(n)}$, dans l'état primitif où se trouvent ces constantes avant le développement des intégrales multiples qu'elles affectent, avec les racines r_1, r_2, ..., r_n de l'équation auxiliaire, après ces développements, on trouvera, dans le cas où toutes les racines seront inégales,

$$\text{(B)} \left\{ \begin{aligned} y = e^{r_1 x}\int e^{(r_2 - r_1)x}dx \int e^{(r_3 - r_2)x}dx \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x}dx \int \mathrm{X}e^{-r_n x}dx \\ + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \end{aligned} \right.$$

La substitution des intégrales multiples aux intégrales simples ne souffre aucune difficulté, il suffira, pour cela, d'observer, 1° que l'équation évidente

$$d_x\left[\frac{e^{(r_m - r_{m-1})x}}{r_m - r_{m-1}}\int \mathrm{X}e^{-r_m}dx\right] = e^{(r_m - r_{m-1}x)}dx\int \mathrm{X}e^{-r_m x}dx + \frac{1}{r_m - r_{m-1}}\mathrm{X}e^{-r_{m-1}x}dx$$

donne, quand on intègre les deux membres,

$$\int e^{(r_m - r_{m-1})x}dx\int \mathrm{X}e^{-r_m}dx = \frac{e^{(r_m - r_{m-1})x}dx}{r_m - r_{m-1}}\int \mathrm{X}e^{-r_m x}dx - \frac{1}{r_m - r_{m-1}}\int \mathrm{X}e^{-r_{m-1}x}dx;$$

2° que l'on a

$$\int e^{(r_\alpha - r_6)x}dx\int e^{(r_\gamma - r_\alpha)x}dx = \frac{e^{(r_\gamma - r_6)x}}{(r_\gamma - r_\alpha)(r_\gamma - r_6)}.$$

En employant plusieurs fois ces équations, et posant

$$\lambda_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)\ldots(r_1 - r_n)}, \ldots,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{(r_{n-1} - r_1)\ldots[r_{(n-1)} - r_n]},$$

on retrouvèrait la valeur connue de y,

$$y = \Sigma \lambda c^{rx}(C + \int \mathrm{X}e^{-rx}dx).$$

238. 3me *Méthode.* Par le passage de l'équation sans second membre, à l'équation avec second membre.

Considérons les deux équations

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X,$$

$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0,$$

et supposons qu'on satisfasse à la seconde équation par les n valeurs,

$$z = z_1, \quad z = z_2, \quad z = z_3, \ldots, \quad z = z_n;$$

on y satisfera encore par

$$z = C_1 z_1, \quad z = C_2 z_2, \quad z = C_3 z_3, \ldots, \quad z = C_n z_n,$$

C_1, $C_2, \ldots,$ C_n étant des constantes arbitraires, et par la somme

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 + \ldots + C_n z_n,$$

qui sera son intégrale générale.

Cela posé, je dis qu'il sera toujours possible de déterminer n fonctions u_1, $u_2, \ldots,$ u_n de x, de telle manière que la somme

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + \ldots + u_n z_n = \Sigma u z$$

satisfasse à l'équation avec second membre. En effet, nous avons, en différentiant une première fois,

$$D_x y = \Sigma z D_x u + \Sigma u D_x z,$$

ou, simplement,

$$D_x y = \Sigma u D_x z,$$

si l'on pose

$$\Sigma z D_x u = 0.$$

En différentiant une seconde fois, on aura

$$D_x^2 y = \Sigma u D_x^2 z + \Sigma D_x z D_x u,$$

ou, simplement,

$$D_x^2 y = \Sigma u D_x^2 z,$$

si l'on fait

$$\Sigma D_x z \, D_x u = 0.$$

En faisant ainsi successivement

$$\Sigma D_x^2 z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x^3 z D_x u = 0, \ldots, \quad \Sigma D_x^{n-2} z D_x u = 0,$$

les dérivées de y, jusqu'à l'ordre $n-1$ inclusivement, données par les équations

$$\begin{aligned}
D_x y &= \Sigma u D_x z = u_1 D_x z_1 + u_2 D_x z_2 + \ldots + u_n D_x z_n,\\
D_x^2 y &= \Sigma u D_x^2 z = u_1 D_x^2 z_1 + u_2 D_x^2 z_2 + \ldots + u_n D_x^2 z_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
D_x^{n-1} y &= \Sigma u D_x^{n-1} z = u_1 D_x^{n-1} z_1 + u_2 D_x^{n-1} z_2 + \ldots + u_n D_x^{n-1} z_n,
\end{aligned}$$

auront conservé la même forme que dans le cas où u_1, $u_2, \ldots, u_n$ étaient des constantes. En différentiant une dernière fois, nous aurons

$$D_x^n y = \Sigma u D_x^n z + \Sigma D_x u D_x^{n-1} z.$$

Si maintenant on substitue toutes ces valeurs dans l'équation avec second membre, il viendra

$$\Sigma u(D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + A_2 D_x^{n-2} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n) + \Sigma D_x u D_x^{n-1} z = X.$$

Or, le premier terme s'évanouit, car la somme désignée par Σ s'étend aux seules valeurs z_1, $z_2, \ldots, z_n$, qui, toutes par hypothèse, vérifient l'équation sans second membre. Donc, la somme

$$y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + \ldots + u_n z_n$$

vérifiera l'équation avec second membre, si, en outre des équations

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0,$$

$$\Sigma D_x^2 z D_x u = 0, \ldots, \quad \Sigma D_x^{n-2} z D_x u = 0,$$

on a

$$\Sigma D_x^{n-1} z D_x u = X.$$

En faisant, pour plus de commodité,

$$D_x u_1 = v_1 X, \quad D_x u_2 = v_2 X, \ldots, \quad D_x u_n = v_n X,$$

les équations qui précèdent pourront se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
&z_1 v_1 + z_2 v_2 + \ldots + z_n v_n = 0,\\
&z'_1 v_1 + z'_2 v_2 + \ldots + z'_n v_n = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&z_1^{(n-2)} v_1 + z_2^{(n-2)} v_2 + \ldots + z_n^{(n-2)} v_n = 0,\\
&z_1^{(n-1)} v_1 + z_2^{(n-1)} v_2 + \ldots + z_n^{(n-1)} v_n = 1,
\end{aligned}$$

et donneront les valeurs cherchées de $v_1, v_2, \ldots, v_n$, qui, substituées dans les équations

$$D_x u_1 = v_1 X, \quad D_x u_2 = v_2 X, \ldots,$$

fourniront, par une intégration facile, les valeurs suivantes de $u_1, u_2, \ldots,$

$$u_1 = C_1 + \int v_1 X dx, \quad u_2 = C_2 + \int v_2 X dx, \ldots,$$
$$u_n = C_n + \int v_n X dx;$$

l'intégrale générale de l'équation avec second membre sera donc

$$y = z_1 (C_1 + \int v_1 X dx) + \ldots + z_n (C_n + \int v_n X dx)$$
$$= \Sigma z (C + \int v X dx).$$

Ce que nous venons de dire s'applique même au cas où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_n$ seraient des fonctions de x, puisque jusqu'ici nous n'avons fait aucune restriction. Revenons au cas où ces coefficients sont constants. Il est évident qu'alors on satisfait à l'équation sans second

membre par les valeurs suivantes,

$$z_1 = C_1 e^{r_1 x}, \quad z_2 = C_2 e^{r_2 x}, \ldots, \quad z_n = C_n e^{r_n x},$$

r_1, $r_2, \ldots$, r_n étant les n racines de l'équation auxiliaire

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0,$$

et la valeur générale de z, ou l'intégrale générale de l'équation sans second membre, sera

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n.$$

Dans la même hypothèse, si l'on fait

$$v_1 z_1 = \lambda_1, \quad v_2 z_2 = \lambda_2, \ldots, \quad v_n z_n = \lambda_n,$$

les équations que donnent v_1, $v_2, \ldots$, v_n, deviendront

$$\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0, \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \ldots + \lambda_n r_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 r_1^{n-1} + \lambda_2 r_2^{n-1} + \ldots + \lambda_n r_n^{n-1} = 0, \end{array}$$

et l'intégrale générale de l'équation avec second membre sera

$$y = e^{r_1 x}\left(C_1 + \lambda_1 \int X e^{-r_1 x} dx\right) + e^{r_2 x}\left(C_2 + \lambda_2 \int X e^{-r_2 x} dx\right) + \ldots.$$

C'est précisément la valeur de y trouvée par les méthodes précédentes.

239. Si l'on connaissait seulement $n - 1$ intégrales particulières z_1, $z_2, \ldots$, z_{n-1} de l'équation différentielle privée de second membre, l'expression

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_{n-1} z_{n-1}$$

ne serait pas l'intégrale complète de cette équation ; cependant on peut encore concevoir que l'intégrale générale de l'équation avec second membre soit représentée par cette même expression, à la condition que les $m - 1$ quantités C_1, $C_2, \ldots$ seront non plus des constantes, mais des fonctions u_1, $u_2, \ldots$, u_{n-1} de x convenablement choisies. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation

donnée soit seulement du quatrième ordre,

$$D_x^4 y + A_1 D_x^3 y + A_2 D_x^2 y + A_3 D_x y + A_4 y = X,$$

il faudra prouver que l'expression $y = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3$ peut devenir son intégrale générale; comme la condition que cette fonction satisfasse à la proposée n'établit qu'une seule équation entre les trois quantités u_1, u_2, u_3, on peut les assujettir à deux autres conditions arbitraires; on peut en disposer, par exemple, de telle sorte que les dérivées première et seconde $D_x y$, $D_x^2 y$ conservent la forme qu'elles ont quand u_1, u_2, u_3 sont constants: on arrive, de cette manière, à trois équations qu'on peut écrire, pour abréger, comme il suit,

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0, \quad \Sigma(z D_x^3 z + A_1 D_x^2 z) D_x u = 0,$$

le signe Σ s'étendant aux trois valeurs particulières z_1, z_2, z_3, et aux trois quantités u_1, u_2, u_3.

Des deux premières équations on pourra tirer, par exemple, les valeurs de $D_x u_2$, $D_x u_3$ en fonction de $D_x u_1$, pour les substituer dans la troisième; on arrivera de cette manière, en posant $D_x u_1 = t$, à une équation différentielle linéaire du premier ordre $D_x t + pt = q$, p et q étant des fonctions de x; en l'intégrant, on aura la valeur de t et, par suite, celle de u_1 donnée par l'équation $u_1 = C' + \int t dx$ qui, comme on voit, contiendra deux constantes arbitraires. La valeur de u_1, substituée dans les deux équations

$$\Sigma z D_x u = 0, \quad \Sigma D_x z D_x u = 0,$$

conduira à celles de u_2 et de u_3, qui seront données par de simples quadratures avec deux nouvelles constantes; on aura donc l'intégrale de l'équation proposée avec quatre constantes arbitraires.

On voit aisément que le même raisonnement s'étend à une équation différentielle de l'ordre n, qu'on arri-

vera, dans tous les cas, à une équation linéaire du premier ordre qui donnera la valeur de la première fonction u_1 avec deux constantes arbitraires, et qu'on calculera ensuite, par de simples quadratures, les autres fonctions $u_2, u_3, \ldots$.

Si l'on avait connu seulement $n - 2$ intégrales particulières de l'équation sans second membre, l'intégration de l'équation avec second membre aurait été ramenée à celle d'une équation du second ordre. Considérons toujours, pour plus de simplicité, l'équation de quatrième ordre

$$D_x^4 y + A_1 D_x^3 y + A_2 D_x^2 y + A_3 D_x y + A_4 y = X,$$

et supposons que l'expression $y = C_1 z_1 + C_2 z_2$ vérifie l'équation sans second membre.

Il s'agit de montrer qu'en considérant C_1, C_2 comme des fonctions u_1, u_2 de x, cette même expression peut vérifier l'équation avec second membre. En outre, de l'équation qui exprimera que la valeur $y = u_1 z_1 + u_2 z_2$ vérifie l'équation proposée, on ne pourra établir entre les quantités u_1, u_2 qu'une relation nouvelle ; si nous admettons que la dérivée première $D_x y$ conserve toujours la forme qu'elle avait quand u_1 et u_2 étaient deux constantes arbitraires, les fonctions u_1, u_2 seront déterminées par les deux équations

$$z_1 D_x u_1 + z_2 D_x u_2 = 0,$$

$$A_1 D_x u_1 + A_2 D_x^2 u_1 + A_3 D_x^3 u_1 + A'_1 D_x u_2 + A'_2 D_x^2 u_2 + A'_3 D_x^3 u_2 = X.$$

Si l'on substitue dans la seconde équation la valeur de $D_x u_1$, tirée de la première, et qu'on pose $D_x u_1 = t$, il est évident que t se trouvera déterminé par une équation différentielle du second ordre

$$D_x^2 t + p D_x t + q t = r;$$

p, q, r étant des fonctions de x, on intégrera cette équation, et, en remontant de la valeur de t à celle de u_1, on trouvera

$$u_1 = C' + \int t dx;$$

cette valeur de u_1, renfermant évidemment trois constantes arbitraires, servira, avec l'équation

$$z_1 D_x u_1 + z_2 D_x u_2 = 0,$$

à calculer la valeur de u_2 qui contiendra une quatrième constante, et l'on aura par conséquent, avec quatre constantes, l'intégrale générale de l'équation proposée.

En généralisant ce que nous venons de dire, on prouvera facilement que, si l'on connaît m intégrales particulières de l'équation sans second membre, la recherche de l'intégrale de l'équation avec second membre sera ramenée à l'intégration d'une équation de l'ordre $n-m$, et l'on retrouvera, de cette manière, un théorème que nous avons déjà démontré.

240. Remarquons, 1° que dans la valeur obtenue, les n constantes C_1, C_2, ..., C_n entrent seulement dans la partie de cette valeur qui compose l'intégrale générale de l'équation sans second membre; 2° qu'on peut, dans tous les cas, déterminer les n constantes par la condition que pour $x = x_0$, x_0 étant une valeur quelconque de x, la fonction y et ses $n-1$ premières dérivées prennent des valeurs données y_0, y_1, ..., y_{n-1}. Il suffit en effet, pour cela, de prendre les intégrales $\int X e^{-r_1 x} dx$, $\int X e^{-r_2 x} dx$, ..., à partir de $x = x_0$, et d'assujettir la valeur suivante de y,

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots,$$

à vérifier les conditions énoncées. Cette valeur peut d'abord se mettre sous la forme

$$y = C_1 e^{r_1(x-x_0)} + C_2 e^{r_2(x-x_0)} + \dots + C_n e^{r_n(x-x_0)},$$

car cette transformation consiste simplement à mettre en

évidence, dans chaque constante, un facteur constant $e^{-r_1 x_0}$, $e^{-r_2 x_0}, \ldots$; et si maintenant, après avoir différentié $n-1$ fois, on exprime que y et ses dérivées prennent les valeurs données $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, on aura les n équations suivantes :

$$\begin{array}{l} C_1 \quad + C_2 \quad + \ldots + C_n \quad = y_0, \\ C_1 r_1 \; + C_2 r_2 \; + \ldots + C_n r_n \; = y_1, \\ C_1 r_1^2 \; + C_2 r_2^2 \; + \ldots + C_n r_n^2 \; = y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 r_1^{n-1} + C_2 r_2^{n-1} + \ldots + C_n r_n^{n-1} = y_{n-1}. \end{array}$$

Or, les valeurs déduites de ces n équations du premier degré, et que l'on calculera à l'aide de la formule souvent rappelée, étant, en général, déterminées et finies, il en résulte que l'on poura toujours satisfaire à la condition proposée. On verra facilement que l'une quelconque des constantes C_m est donnée par l'équation

$$C_m = \frac{y_{n-1} + k_{n-2} y_{n-2} + k_{n-3} y_{n-3} + \ldots + k_1 y_1 + k_0 y_0}{f'(r_m)},$$

dans laquelle $f(r)$ représentent toujours le polynôme

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n \ldots,$$

tandis que k_{n-2}, k_{n-3}, k_1, k_0, désignent les coefficients de $r^{n-2}, r^{n-3}, \ldots, r, r_0$ dans le développement de $\frac{f(r)}{r - r_m}$.

241. 4me *Méthode*. Par changement de variable indépendante. Reprenons encore les équations

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = X = F(x),$$

$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + A_2 D_x^{n-2} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0,$$

et supposons que nous ayons trouvé une valeur de z, $z = \varphi(x, \alpha)$, qui, vérifiant la seconde de ces équations,

satisfasse pour $\alpha = x$, aux conditions suivantes,

$$z = 0,\ D_x z = 0,\ D_x^2 z = 0, \ldots,\ D_x^{n-2} z = 0,\ D_x^{n-1} z = F(\alpha),$$

et faisons

$$y = \int_0^x z d\alpha,$$

$z = \varphi(x, \alpha)$ étant une fonction de la variable x et de l'indéterminée α. En différentiant par rapport à x qui est l'une des limites de l'intégrale, et qui entre dans z, on aura (n° 53),

$$D_x y = \int_0^x D_x z d\alpha + \varphi(x, x);$$

or, $\varphi(x, x)$, qui est ce que devient z quand on y fait $\alpha = x$, est nul par hypothèse; on a donc simplement

$$D_x y = \int_0^x D_x z d\alpha.$$

En différentiant une seconde, une troisième fois, etc., et remarquant que les dérivées successives $D_x z$, $D_x^2 z, \ldots,$ $D_x^{n-2} z$, s'évanouissent aussi par hypothèse pour $\alpha = x$, tandis que la dérivée $(n-1)^{ième}$ devient alors $F(x)$, on aura

$$D_x^2 y = \int_0^x D_x^2 z d\alpha, \ldots,\quad D_x^{n-1} y = \int_0^x D_x^{n-1} z d\alpha,$$
$$D_x^n y = \int_0^x D_x^n z d\alpha + F(x);$$

en substituant ces valeurs dans l'équation avec second membre, on trouvera

$$\int_0^x \left(D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z \right) d\alpha = 0,$$

ou $0 = 0$, puisque z, par hypothèse, vérifie l'équation

sans second membre. La valeur

$$y = \int_0^x z d\alpha$$

satisfait donc à l'équation avec second membre, ou devient une intégrale particulière de cette équation. Pour en déduire l'intégrale générale, il suffit évidemment de faire

$$y = \int_0^x z d\alpha + v = u + v,$$

v étant l'intégrale générale de l'équation sans second membre; car le résultat de la substitution de cette valeur dans l'équation avec second membre se composera de deux parties, l'une identiquement nulle, puisque v vérifie l'équation sans second membre, l'autre identiquement égale à $F(x)$, puisque $u = \int_0^x z d\alpha$ satisfait à l'équation avec second membre; d'où il résulte que la valeur $y = u + v$, qui d'ailleurs renferme n constantes arbitraires, satisfera à cette même équation avec second membre et sera son intégrale générale.

Dans le cas particulier où les coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont constants, on peut prendre, comme nous l'avons vu,

$$v = C_1 e^{r_1(x-\alpha)} + C_2 e^{r_2(x-\alpha)} + \ldots + C_n e^{r_n(x-\alpha)}.$$

Il faut, de plus, déterminer une valeur de z qui, pour $\alpha = x$ satisfasse aux conditions

$$z = 0, \quad D_x z = 0, \quad D_x^2 z = 0, \ldots, \quad D_x^{n-2} z = 0, \quad D_x^{n-1} z = F(\alpha).$$

Pour y parvenir, il faudra assujettir les constantes $C_1, C_2, \ldots, C_n$ aux conditions

$$\begin{array}{llll} C_1 & + C_2 & + \ldots + C_n & = 0, \\ C_1 r_1 & + C_2 r_2 & + \ldots + C_n r_n & = 0, \\ C_1 r_1^2 & + C_2 r_2^2 & + \ldots + C_n r_n^2 & = 0, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1 r_1^{n-1} & + C_2 r_2^{n-1} & + \ldots + C_n r_n^{n-1} & = F(\alpha), \end{array}$$

qui donneront, comme nous l'avons déjà vu,

$$C_1 = \frac{F(\alpha)}{f'(r_1)}, \quad C_2 = \frac{F(\alpha)}{f'(r_2)}, \ldots, \quad C_n = \frac{F(\alpha)}{f'(r_n)},$$

$f(r)$ désignant toujours le polynôme

$$r^n + A_1 r^{n-1} + \ldots + A_{n-1} r + A_n.$$

On en déduit

$$z = \frac{F(\alpha)}{f'(r_1)} e^{r_1(x-\alpha)} + \frac{F(\alpha)}{f'(r_2)} e^{r_2(x-\alpha)} + \ldots + \frac{F(\alpha)}{f'(r_n)} e^{r_n(x-\alpha)},$$

$$e^{r_1(x-\alpha)} + \ldots + C_n e^{r_n(x-\alpha)} + \int_0^x \frac{e^{r_1(x-\alpha)} F(\alpha) d\alpha}{f'(r_1)} + \ldots + \int_0^x \frac{e^{r_n(x-\alpha)} F(\alpha) d\alpha}{f'(r_n)},$$

ou

$$\Sigma C e^{r(x-\alpha)} + \Sigma \int_0^x \frac{e^{r(x-\alpha)}}{f'(r)} F(\alpha) d\alpha = \Sigma e^{rx} \left[C + \frac{1}{f'(r)} \int_0^x X e^{-rx} dx \right];$$

la somme du second membre s'étendant à toutes les racines de l'équation

$$f(r) = r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1} r + A_n = 0.$$

242. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé, implicitement au moins, que les n racines de l'équation $f(r) = 0$ étaient inégales et réelles; en effet, si deux de ces racines étaient égales, si l'on avait, par exemple, $r_1 = r_2$, les deux intégrales particulières $C_1 e^{r_1 x}$, $C_2 e^{r_1 x}$, en s'ajoutant, donneraient

$$(C_1 + C_2) e^{r_1 x} = C' e^{r_1 x},$$

les deux constantes seraient remplacées par une seule qui est leur somme. L'intégrale générale ne renfermerait, en réalité, que $n - 1$ constantes distinctes, mais il est toujours facile de lui rendre sa généralité. On a eu recours, pour y parvenir, à divers artifices que nous allons exposer brièvement.

Remarquons d'abord qu'il suffirait d'opérer sur l'intégrale de l'équation sans second membre, car c'est elle qui apporte les n constantes arbitraires à l'intégrale de l'équation avec second membre. Cela posé :

1er *Procédé*. Chacune des intégrales particulières $y = e^{r_1 x}$, $y = e^{r_2 x}, \ldots$, ou $y - e^{r_1 x} = 0$, $y - e^{r_2 x} = 0, \ldots$, peut se mettre sous la forme $\varphi(r_1) = 0$, $\varphi(r_2) = 0, \ldots$, et l'on montrerait, comme nous l'avons fait dans le cas des équations simultanées, que si, une seconde racine r_2 devenant égale à r_1, deux intégrales se confondent, on verra apparaître une équation nouvelle

$$\varphi'(r_1) = 0, \quad \text{ou} \quad y = xe^{r_1 x};$$

de sorte que l'équation sans second membre est vérifiée par les deux valeurs $y = e^{r_1 x}$, $y = xe^{r_1 x}$, et par la somme $y = C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x}$, qui renferme deux constantes distinctes. Si une troisième racine r_3 devenait encore égale à r_1, on aurait non-seulement

$$\varphi(r_1) = 0, \quad \varphi'(r_1) = 0,$$

mais

$$\varphi''(r_1) = 0;$$

l'équation serait également vérifiée par les trois valeurs $e^{r_1 x}$, $xe^{r_1 x}$, $x^2 e^{r_1 x}$, et par la somme

$$C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x} + C'''x^2 e^{r_1 x},$$

qui contient trois constantes distinctes. En général, si $m - 1$ racines $r_2, r_3, \ldots, r_m$ sont égales à r_1, la somme

$$C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_m e^{r_m x},$$

qui équivaut à un seul terme $Ce^{r_1 x}$, sera remplacée par cette autre

$$C'e^{r_1 x} + C''xe^{r_1 x} + C'''x^2 e^{r_1 x} + \ldots + C^{(m)} x^{m-1} e^{r_1 x},$$

qui renferme m constantes et rend à l'intégrale sa généralité.

2me *Procédé.* Faisons $r_2 = r_1 + \varepsilon$. Pour que r_2 devienne égale à r_1, il faudra faire $\varepsilon = 0$; on aura

$$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{x(r_1+\varepsilon)} = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_1x}\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \frac{\varepsilon^2x^2}{1.2} + \ldots\right)$$

$$= (C_1 + C_2)e^{r_1x} + C_2\varepsilon xe^{r_1x}\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1.2} + \frac{\varepsilon^2x^2}{1.2.3} + \ldots\right),$$

ou, en posant

$$C_1 + C_2 = C', \quad C_2\varepsilon = C'',$$

et faisant ensuite $\varepsilon = 0$,

$$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C'e^{r_1x} + C''xe^{r_1x} + \ldots.$$

Si trois racines devenaient égales, on aurait, en faisant $r_3 = r_1 + \varepsilon$,

$$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x} = C'e^{r_1x} + C''xe^{r_1x} + C_3e^{x(r_1+\varepsilon)}$$

$$= e^{r_1x}\left(C' + C''x + C_3 + C_3\varepsilon x + C_3\frac{\varepsilon^2x^2}{1.2} + C_3\frac{\varepsilon^3x^3}{1.2.3} + \ldots\right),$$

ou, en faisant $C' + C_3 = C'$, $C'' + C_3\varepsilon = C''$, $C_3\varepsilon^2 = C'''$,

$$C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x} = C'e^{r_1x} + C''xe^{r_1x} + C'''x^2e^{r_1x}.$$

3me *Procédé.* Il est facile de voir que si, dans l'équation sans second membre, on fait $y = ue^{rx}$, en ayant égard à l'équation connue

$$D^n_x(uv) = vD^n_x u + nD_x v\, D^{n-1}_x u + \frac{n(n-1)}{1.2} D^2_x v\, D^{n-2}_x u + \ldots + u D^n_x v,$$

le résultat de la substitution sera

$$uf(r) + D_x u f'(r) + D^2_x u f''(r) + \ldots + D^{n-1}_x(u) f^{(n-1)}(r) + D^n_x u = 0,$$

$f(r)$ étant toujours égal à

$$r^n + A_1 r^{n-1} + A_2 r^{n-2} + \ldots + A_{n-1}r + A_n.$$

donc, quand on fera $r_3 = r_1$, $\varepsilon = 0$, l'intégrale générale deviendra, aux constantes près C_1, C_2, C_3,

$$y = \frac{1}{1.2}\varphi''_2(r_1) + \lambda_4 e^{r_4 x}\int X e^{-r_4 x} dx + \ldots.$$

Si l'on supposait 4 racines égales, on trouverait, en faisant

$$\varphi_3(r) = \frac{1}{(r - r_5)\ldots(r - r_n)} e^{rx}\int X e^{-rx} dx,$$

et raisonnant comme précédemment,

$$y = \frac{1}{1.2.3}\varphi'''_3(r_1) + \lambda_5 e^{r_5 x}\int X e^{-r_5 x} dx + \ldots.$$

En général, si m racines sont égales à r_1, on fera

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{1}{(r - r_{m+1})\ldots(r - r_n)} e^{rx}\int X e^{-rx} dx,$$

et l'on aura

$$(a)\ y = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\varphi^{(m-1)}_{m-1}(r_1) + \lambda_{m+1} e^{r_{m+1} x}\int X e^{-r_{m+1} x} dx + \ldots.$$

Pour que cette dernière formule (a) soit rigoureusement démontrée, il suffit évidemment de prouver que, si elle est vraie dans le cas de m racines égales, elle le sera encore dans le cas de $m + 1$ racines égales. Or, c'est ce que l'on fera facilement de la manière suivante : posons

$$\varphi_m(r) = \frac{1}{(r - r_{m+2})\ldots(r - r_n)} e^{rx}\int X e^{-rx} dx, \quad r_{m+1} = r_1 + \varepsilon,$$

on aura

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{\varphi_m(r)}{r - r_{m+1}},$$

$$\lambda_{m+1} e^{r_{m+1}}\int X e^{-r_{m+1} x} d = x\frac{\varphi_m(r_{m+1})}{(r_{m+1} - r_1)^m} = \frac{\varphi_m(r_1 + \varepsilon)}{\varepsilon^m};$$

d'ailleurs, en considérant

$$\frac{\varphi_m(r)}{r - r_{m+1}} = \frac{1}{r - r_{m+1}} \times \varphi_m(r)$$

comme un produit uv, on aura

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r) = -\frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(r_{m+1}-r)^m}\varphi_m(r) - \frac{(m-1)}{1}\frac{1.2.3\ldots(m-2)}{(r_{m+1}-r)^{m-1}}\varphi'_m(r) - \ldots,$$

$$\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r) = -1.2.3\ldots(m-1)\left[\frac{\varphi_m(r)}{(r_{m+1}-r)^m} + \frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r)}{(r_{m+1}-r)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{\varphi''_m(r)}{(r_{m+1}-r_m)^{m-2}} + \ldots\right],$$

et l'on en tirera

$$\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1) = -\frac{\varphi_m(r_1)}{\varepsilon^m} - \frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r_1)}{\varepsilon^{m-1}} - \frac{1}{1.2}\frac{\varphi''_m(r_1)}{\varepsilon^{m-2}} \ldots - \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{\varphi_m^{(m-1)}(r_1)}{\varepsilon},$$

$$y = \frac{\varphi_m(r_1+\varepsilon)}{\varepsilon^m} - \frac{\varphi_m(r_1)}{\varepsilon^m} - \frac{1}{1}\frac{\varphi'_m(r_1)}{\varepsilon^{m-1}} - \frac{1}{1.2}\frac{\varphi''_m(r_1)}{\varepsilon^{m-2}} \ldots - \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{\varphi_m^{(m-1)}(r_1)}{\varepsilon}$$

$$+ \lambda_{m+2}e^{r_{m+2}x}\int X e^{-r_{m+2}x}dx + \ldots = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}\varphi_m^{(m)}(r_1+\theta\varepsilon) + \lambda_{m+2}e^{r_{m+2}x}\int X e^{-r_{m+2}x}dx + \ldots$$

Enfin, si l'on fait $r_{m+1} = r_1$ ou $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$y = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)m}\varphi_m^{(m)}(r_1) + \lambda_{m+2}e^{r_{m+2}x}\int X e^{-r_{m+2}x}dx + \ldots,$$

et c'est précisément la formule (a), étendue au cas où $m+1$ racines sont égales à r_1; donc, si cette formule est vraie pour m racines égales, elle le sera encore pour $m+1$ racines égales; or, elle est vraie quand deux, trois, quatre racines sont égales à r_1; donc elle sera vraie toujours.

Il reste à déterminer la valeur de $\varphi_{m-1}^{(m-1)}(r_1)$, pour montrer que l'intégrale contient encore n constantes distinctes. Or

$$\varphi_{m-1}(r) = \frac{1}{(r-r_{m+1})(r-r_{m+2})\ldots(r-r_n)}e^{rx}\int X e^{-rx}dx = f_{(m-1)}(r) \times \mathrm{f}(r),$$

Le second membre est évidemment le développement de $e^{rx}\int\int\int\ldots\int \mathrm{X}\, e^{rx}\, dx^n$; on aura donc

$$y = e^{r_1 x}\int\int\int\ldots\int \mathrm{X} e^{r_1 x} dx^n,$$

ou, en développant,

$$y=\frac{e^{r_1 x}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\begin{array}{c} x^{n-1}\int \mathrm{X}e^{-r_1 x}dx-(n-1)x^{n-2}\int \mathrm{X}xe^{-r_1 x}dx\ldots\pm\int \mathrm{X}x^{n-1}e^{-r_1 x}dx \\ +\,\mathrm{C}'x^{n-1}+\mathrm{C}''x^{n-2}+\ldots+\mathrm{C}^{(n-1)}x+\mathrm{C}^{(n)} \end{array}\right]$$

245. Considérons enfin le cas où quelques-unes des racines de l'équation auxiliaire sont imaginaires. Comme les racines imaginaires vont toujours par couple, il suffira de chercher ce que deviennent les deux termes de la formule correspondant à deux racines imaginaires conjuguées. Supposons donc que l'on ait

$$r_1 = \alpha + 6\sqrt{-1}, \quad r_2 = \alpha - 6\sqrt{-1},$$

et représentons par R la somme des termes correspondant aux racines réelles. Les deux coefficients λ_1, λ_2 pourront être imaginaires, et l'on aura, en général,

$$\lambda_1 = \mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}, \quad \lambda_2 = \mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1};$$

les autres coefficients seront toujours réels, car ils renfermeront à la fois les deux facteurs

$$(r_m - r_1) = (r_m - \alpha - 6\sqrt{-1}), \quad r_m - r_2 = (r_m - \alpha + 6\sqrt{-1}),$$

dont le produit est $(r_m - \alpha)^2 + 6^2$. Cela posé, on aura

$$y = \frac{e^{\alpha x}\, e^{6x\sqrt{-1}}\left(\mathrm{C}_1 + \int \mathrm{X} e^{-\alpha x} e^{-6x\sqrt{-1}} dx\right)}{\mathrm{A} + \mathrm{B}\sqrt{-1}} + \frac{e^{\alpha x} e^{-6x\sqrt{-1}}\left(\mathrm{C}_2 + \int \mathrm{X} e^{-\alpha x} e^{+6x\sqrt{-1}}\right)}{\mathrm{A} - \mathrm{B}\sqrt{-1}} + \mathrm{R},$$

ou, en réduisant au même dénominateur, remarquant que

$e^{\pm 6x\sqrt{-1}} = \cos 6x \pm \sqrt{-1}\sin 6x$, et représentant par $2C'$, $2C''$ les constantes indéterminées $C_1 + C_2$ et $(C_1 - C_2)\sqrt{-1}$,

$$(C)\begin{cases} y = 2e^{\alpha x}\dfrac{(A\cos 6x + B\sin 6x)(C' + \int Xe^{-\alpha x}\cos 6x dx)}{A^2 + B^2} \\ \quad + 2e^{\alpha x}\dfrac{(A\sin 6x - B\cos 6x)(C'' + \int Xe^{-\alpha x}\sin 6x dx)}{A^2 + B^2} + R. \end{cases}$$

Il sera facile, dans chaque cas particulier, d'effectuer les intégrations du second membre; on a, en effet, n° 29,

$$\int a^x \sin bx dx = \frac{a^x}{b^2 + \text{l}a^2}(\text{l}a \sin bx - b\cos bx),$$
$$\int a^x \cos bx dx = \frac{a^x}{b^2 + \text{l}a^2}(\text{l}a \cos bx - b\sin bx);$$

or

$$d.X\int a^x \sin bx dx = dX\int a^x \sin bx dx + Xa^x \sin bx dx;$$

donc

$$\int Xa^x \sin bx dx = X\int a^x \sin bx dx - \int dX\int a^x \sin bx dx,$$

et, en substituant pour $\int a^x \sin bx dx$ sa valeur, il vient

$$\int Xa^x \sin bx dx = \frac{a^x}{b^2 + \text{l}a^2}(\text{l}a \sin bx - b\cos bx)X$$
$$- \frac{\text{l}a}{b^2 + \text{l}a^2}\int D_x X . a^x \sin bx dx + \frac{b}{b^2 + \text{l}a^2}\int D_x X . a^x \cos bx dx;$$

on trouverait de même

$$\int Xa^x \cos bx\, dx = \frac{a^x}{b^2 + \text{l}a^2}(\text{l}a \cos bx + b\sin bx)$$
$$- \frac{\text{l}a}{b^2 + \text{l}a^2}\int D_x X . a^x \cos bx dx - \frac{b}{b^2 + \text{l}a^2}\int D_x X . a^x \sin bx dx.$$

Substituant tour à tour dans ces formules $D_x X$ et $D_x^2 X$, $D_x^2 X$ et $D_x^3 X$, $D_x^3 X$ et $D_x^4 X$,...; à la place de X et $D_x X$,

on aura une série d'équations qui donneront les valeurs de

$$\int D_x X . a^x \sin bx dx, \quad \int D_x X . a^x \cos bx dx;$$
$$\int D_x^2 X . a^x \sin bx dx, \quad \int D_x^2 X . a^x \cos bx dx, \ldots,$$

et en remontant, par des substitutions successives, les valeurs des intégrales cherchées. On trouvera de cette manière, en posant $b^2 + \mathrm{l}a^2 = m$, $\mathrm{l}a = n$,

$$\int X a^x \sin bx dx = \frac{a^x}{m}(n \sin bx - b \cos bx)\left[X - \frac{n}{m} D_x X + \frac{n^2 - b^2}{m^2} D_x^2 X - \frac{n(n^2 - 3b^2)}{m^3} D_x^3 X + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{ba^x}{m^2}(n \cos bx + b \sin bx)\left(D_x X - \frac{2n}{m} D_x^2 X + \frac{3n^2 - b^2}{m^2} D_x^3 X - \ldots\right)\right],$$

$$\int X a^x \cos bx dx = \frac{a^x}{m}(n \cos bx + b \sin bx)\left[X - \frac{n}{m} D_x X + \frac{n^2 - b^2}{m^2} D_x^2 X - \frac{n(n^2 - 3b^2)}{m^3} D_x^3 X + \right.$$
$$\left. - \frac{ba^x}{m^2}(n \sin bx - b \cos bx)\left(D_x X - \frac{2n}{m} D^2 X + \frac{3n^2 - b^2}{m^2} D_x^3 X + \ldots\right.\right.$$

Si l'on fait $a = e^{-\alpha}$, $b = 6$, d'où

$$\mathrm{l}a = -\alpha, \quad \mathrm{l}a^2 = \alpha^2, \quad m = \alpha^2 + 6^2, \quad n = -\alpha,$$

il viendra

$$\int X e^{-\alpha x} \sin 6x dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + 6^2}(\alpha \sin 6x + 6 \cos 6x)\left[X + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 6^2} D_x X + \frac{\alpha^2 - 6^2}{(\alpha^2 + 6^2)^2} D_x^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 36^2)}{(\alpha^2 + 6^2)^3} D_x^3 X + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{6 e^{-\alpha x}}{(\alpha^2 + 6^2)^2}(6 \sin 6x - \alpha \cos 6x)\left[D_x X + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6^2} D_x^2 X + \frac{3\alpha^2 - 6^2}{(\alpha^2 + 6^2)^2} D_x^3 X + \ldots\right.\right.$$

$$\int X e^{-\alpha x} \cos 6x dx = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha^2 + 6^2}(\alpha \cos 6x - 6 \sin 6x)\left[X + \frac{\alpha}{\alpha^2 + 6^2} D_x X + \frac{\alpha^2 - 6^2}{(\alpha^2 + 6^2)^2} D_x^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 36^2)}{(\alpha^2 + 6^2)^3} D_x^3 X + \ldots\right.$$
$$\left. + \frac{6 e^{-\alpha x}}{(\alpha^2 + 6^2)^2}(6 \cos 6x + \alpha \sin 6x)\left[D_x X + \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 6^2} D_x^2 X + \frac{3\alpha^2 - 6^2}{(\alpha^2 + 6^2)^2} D_x^3 X + \ldots\right.\right.$$

ces formules sont d'une application facile.

Examinons encore le cas où une racine imaginaire r_1 est double ou triple : supposons, par exemple, que $r_1 = \alpha + 6\sqrt{-1}$ soit une racine triple, et appelons $r_2 = \alpha - 6\sqrt{-1}$ la racine imaginaire conjuguée; la portion de la valeur de y correspondante à ces deux racines, dans le cas où l'équation n'a pas de second membre, sera

$$= e^{r_1 x}(C' + C''x + C'''x^2) + e^{r_2 x}(c' + c''x + c'''x^2)$$
$$= e^{(\alpha+6\sqrt{-1})x}(C' + C''x + C'''x^2) + e^{(\alpha-6\sqrt{-1})x}(c' + c''x + c'''x^2)$$
$$= e^{\alpha x}\left(C'e^{6x\sqrt{-1}} + c'e^{-6x\sqrt{-1}}\right) + x\left(C''e^{6x\sqrt{-1}} + c''e^{-6x\sqrt{-1}}\right) + x^2\left(C'''e^{6x\sqrt{-1}} + c'''e^{-6x\sqrt{-1}}\right)$$
$$= e^{\alpha x}(C'\cos 6x + c'\sin 6x) + x(C''\cos 6x + c''\sin 6x) + x^2(C'''\cos 6x + c'''\sin 6x)$$
$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cos 6x + (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)\sin 6x].$$

246. *Applications :* I. Équation sans second membre :

1°. $D_x^5 y - 12 D_x^4 y + 62 D_x^3 y - 172 D_x^2 y + 266 D_x y - 160 y = 0$:

l'équation auxiliaire est

$$r^5 - 12r^4 + 62r^3 - 172r^2 + 266r - 160 = 0,$$

et elle a pour racines

$$r_1 = 2 + 2\sqrt{-1}, \quad r_2 = 2 - 2\sqrt{-1},$$
$$r_3 = 3 + \sqrt{-1}, \quad r_4 = 3 - \sqrt{-1}, \quad r_5 = 2;$$

on trouvera

$$y = e^{2x}[(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^x(C_3 \cos x + C_4 \sin x) + C_5].$$

2°. $D_x^3 y - 14 D_x^2 y + 64 D_x y - 96 y = 0$:

l'équation auxiliaire est

$$r^3 - 14r^2 + 64r - 96 = 0,$$

et a pour racines

$$r_1 = 6, \quad r_2 = 4, \quad r_3 = 4;$$

en ne prenant dans la formule (A), que les termes affectés

des constantes arbitraires, puisque X = o, on aura

$$y = e^{6x}(C_1 \int e^{-2x}dx \int dx + C_2 \int e^{-2x}dx + C_3);$$

or

$$C_1 \int e^{-2x}dx \int dx = -\frac{C_1}{2}e^{-2x}(x + \tfrac{1}{2}),$$

$$C_2 \int e^{-2x}dx = -\frac{C_2}{2}e^{-2x},$$

donc

$$y = e^{4x}(C'x + C'' + C'''e^{2x}).$$

3°. $D_x^4 y - 8D_x^3 y + 26D_x^2 y - 48D_x y + 45y = 0$:

l'équation auxiliaire est

$$r^4 - 8r^3 + 26r^2 - 48r + 45 = 0,$$

et elle a pour racines

$$r_1 = 3,\quad r_2 = 3,\quad r_3 = 1 + 2\sqrt{-1},\quad r_4 = 1 - 2\sqrt{-1}.$$

La même formule (A) donnera

$$y = e^{3x}\left[\begin{array}{l} C_1 \int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})}dx \int e^{-4x\sqrt{-1}}dx \\ + C_2 \int dx \int e^{-2(1-\sqrt{-1})x}dx + C_3 \int dx + C_4 \end{array}\right];$$

en développant, on trouvera

$$y = e^x[C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + e^{2x}(C_3 x + C_4)].$$

4°. $$D_x^n y - nr_1 D_x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^2 D_x^{n-2} y \ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^{n-2} D_x^2 y \mp nr_1^{n-1} D_x y \pm r_1^n = 0:$$

l'équation auxiliaire

$$r^n - nAr^{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2}A^2 r^{n-2} \ldots \mp nA^{n-1} \pm A^n = (r - A)^n = 0$$

a toutes ses racines égales ; et l'intégrale générale sera

$$y = e^{r_1 x}(C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + C_3 x^{n-3} + \ldots + C_{n-1}x + C_n).$$

247. II. Équation avec second membre constant:

$$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y = A.$$

Dans la formule (B), on pourra faire sortir la constante $X = A$ du signe d'intégration qui l'affecte, puis successivement en dehors de tous les signes d'intégration qui précèdent, et l'on aura

$$y = A e^{r_1 x} \int e^{(r_2 - r_1)x} dx \int e^{(r_3 - r_2)x} dx \ldots \int e^{(r_n - r_{n-1})x} dx \int e^{-r_n x} dx$$
$$+ C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x};$$

mais

$$\int e^{-r_n x} dx = \frac{-1}{r_n} e^{-r_n x},$$

$$\int e^{(r_n - r_{n-1})x} dx \int e^{-r_n x} dx = \frac{-1}{r_n} \int e^{-r_{n-1} x} dx = \frac{1}{r_n r_{n-1}} e^{-r_{n-1} x};$$

en continuant ces intégrations successives, remontant jusqu'au premier signe $\int$, effectuant la multiplication de l'intégrale définitive par $e^{r_1 x}$, et remarquant que le produit de toutes les racines $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ de l'équation auxiliaire est égal au dernier terme A_n de cette équation, on aura, pour l'intégrale complète de l'équation donnée,

$$y = \frac{A}{A_n} + C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_{n-1} e^{r_{n-1} x} + C_n e^{r_n x}.$$

Si deux des racines de l'équation auxiliaire étaient imaginaires et égales à $\alpha \pm \beta\sqrt{-1}$, on aurait

$$y = \frac{A}{A_n} + e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + C_3 e^{r_3 x} + \ldots + C_n e^{r_n x},$$

si toutes les racines de l'équation auxiliaire étaient égales; alors, en passant toujours la constante $X = A$ en dehors de tous les signes d'intégration, l'équation (B)

donnera

$$y = e^{r_1 x}\left(\mathrm{A}\int dx \int dx \ldots \int e^{-r_1 x} dx + \mathrm{C}_1 \int\int\int \ldots \int dx^{n-1} + \mathrm{C}_2 \int\int\int \ldots dx^{n-2} +\right.$$

Mais $\mathrm{A}\int dx \int dx \ldots \int e^{-r_1 x} dx = \pm \frac{\mathrm{A}}{r_1^n} e^{-r_1 x}$, et d'ailleurs $r_1^n = \pm \mathrm{A}_n$; on aura donc

$$y = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_n} + e^{r_1 x}(\mathrm{C}_1 x^{n-1} + \mathrm{C}_2 x^{n-2} + \ldots \mathrm{C}_{n-1} x + \mathrm{C}_n).$$

248. III. Équation avec second membre variable:

1°. $$\mathrm{D}_x^3 y - 7a^2 \mathrm{D}_x^2 y + 6a^3 y = x^2:$$

l'équation auxiliaire est

$$r^3 - 7a^2 r + 6a^3 = 0,$$

et ses trois racines sont $r_1 = -3a$, $r_2 = 2a$, $r_3 = a$; en employant encore la formule (B), on trouvera

$$y = e^{-3ax}\int e^{5ax} dx \int e^{-ax} dx \int x^2 e^{-ax} dx + \mathrm{C}_1 e^{-3ax} + \mathrm{C}_2 e^{2ax} + \mathrm{C}_3 e^{ax};$$

or

$$\int x^2 e^{-ax} dx = -\frac{e^{-ax}}{a}\left(x^2 + \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right);$$

donc

$$\int e^{-ax} \int x^2 e^{-ax} dx = \frac{e^{-2ax}}{2a^2}\left(x^2 + \frac{3x}{a} + \frac{7}{2a^2}\right),$$

$$\int e^{5ax} dx \int e^{-ax} dx \int x^2 e^{-ax} dx = \frac{e^{-3ax}}{6a^3}\left(x^2 + \frac{7x}{3a} + \frac{49}{18a^2}\right).$$

En substituant, on trouvera

$$y = \frac{1}{6a^3}\left(x^2 + \frac{7x}{3a} + \frac{49}{18a^2}\right) + \mathrm{C}_1 e^{-3ax} + \mathrm{C}_2 e^{2ax} + \mathrm{C}_3 e^{ax};$$

c'est l'intégrale générale de l'équation proposée.

2°. $$\mathrm{D}_x^3 y + a\mathrm{D}_x y - 6a^3 y = b^x:$$

l'équation auxiliaire est

$$r^2 + ar - 6a^2 = 0;$$

ses deux racines sont $r_1 = 2a$, $r_2 = -3a$; la formule (B) donnera

$$y = e^{2ax} \int e^{-5ax} dx \int b^x e^{3ax} dx + C_1 e^{2ax} + C_2 e^{-3ax};$$

mais

$$\int b^x e^{3ax} dx = \int (be^{3a})^x dx = \frac{(be^{3a})^x}{lb + 3a};$$

donc

$$\int e^{-5ax} dx \int b^x e^{3ax} dx = \frac{(be^{-2a})^x}{(lb + 3a)(lb - 2a)},$$

et, en substituant, on trouvera, pour l'intégrale cherchée,

$$y = \frac{b^x}{(lb + 3a)(lb - 2a)} + C_1 e^{2ax} + C_2 e^{-3ax}.$$

3°. $$D_x^3 y - 3D_x^2 y + 7 D_x y - 5y = x^3:$$

l'équation auxiliaire est

$$r^3 - 3r^2 + 7r - 5 = 0;$$

ses trois racines sont $r_1 = 1 + 2\sqrt{-1}$, $r_2 = 1 - 2\sqrt{-1}$, $r_3 = 1$; on aura

$$\frac{1}{\lambda_1} = (r_1 - r_2)(r_1 - r_3) = -8,$$

$$\frac{1}{\lambda_2} = (r_2 - r_1)(r_2 - r_3) = -8,$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = (r_3 - r_1)(r_3 - r_2) = 4,$$

et la formule (B) donnera

$$-\frac{e^x}{4}\left[\cos 2x \left(C_1 + \int x^3 e^{-x} \cos 2x dx\right) + \sin 2x \left(C_2 + \int x^3 e^{-x} \sin 2x dx\right)\right]$$
$$+ \frac{e^x}{4}\left(C_3 + \int x^3 e^{-x} dx\right).$$

Pour avoir en termes finis l'intégrale générale cherchée,

il suffira de substituer les valeurs des deux intégrales $\int x^2 e^{-x}\cos 2x dx$, $\int x^2 e^{-x}\sin 2x dx$, déduites des formules que nous avons rappelées ci-dessus.

4°. $$D_x^2 y + A_1 D_x y + A_2 y = X:$$

l'équation auxiliaire est

$$r^2 + A_1 r + A_2 = 0.$$

Supposons que les deux racines soient imaginaires et que l'on ait

$$r_1 = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad r_2 = \alpha - \beta\sqrt{-1},$$

on aura

$$r_1 - r_2 = 2\beta\sqrt{-1}, \quad r_2 - r_1 = -2\beta\sqrt{-1},$$

$$y = \frac{e^{\alpha x}}{\beta}[\sin\beta x(C_1 + \int X e^{-\alpha x}\cos\beta x dx) + \cos\beta x(C_2 - \int X e^{-\alpha x}\sin\beta x dx,$$

Exemple :

$$D_x^2 y + 2D_x y + 2y = x,$$

$$A_1 = 2, \quad A_2 = 2, \quad X = x, \quad \alpha = -1, \quad \beta = 1,$$

$$y = \frac{C_1 \sin x + C_2 \cos x}{e^x} + \tfrac{1}{2}(x - 1).$$

5°. $$D_x^2 y + A_2 y = X:$$

c'est l'équation du fameux problème des trois corps, l'équation auxiliaire est $r^2 + A = 0$;

$$r_1 = \sqrt{A}\sqrt{-1}, \quad r_2 = -\sqrt{A}\sqrt{-1}, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{A};$$

on aura

$$y\sqrt{A} = \sin(x\sqrt{A})[C_1 + \int X\cos(x\sqrt{A})dx + \cos(x\sqrt{A})[C_2 - \int X\sin(x\sqrt{}$$

6°. $D_x^4 y - 8D_x^3 y + 23 D_x^2 y - 28 D_x y + 12 y = x$:

l'équation auxiliaire est

$$r^4 - 8r^3 + 23r^2 - 28r + 12 = 0,$$

et a pour racines

$$r_1 = 2, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1, \quad r_4 = 3;$$

l'équation (A) donnera

$$e^{2x}\left(\begin{array}{l}\int dx \int e^{-x}dx \int e^{2x}\,dx \int xe^{-3x}dx + C_1 \int dx \int e^{-x}dx \int e^{2x}dx \\ \qquad + C_2 \int dx \int e^{-x}dx + C_3 \int dx + C_4\end{array}\right),$$

et, en développant,

$$y = \frac{x}{12} + \frac{7}{36} + C_1 xe^{2x} + C_2 e^{2x} + C_3 e^{x} + C_4 e^{3x}.$$

$$D_x^n y - nr_1 D_x^{n-1} y + \frac{n(n-1)}{1.2} r_1^2 D_x^{n-2} y + \ldots - nr_1^{n-1} D_x y + r_1^n y = X.$$

L'équation auxiliaire est $(r - r_1)^n = 0$, et a toutes ses racines égales; on trouvera dans ce cas, en se servant toujours de la formule (A),

$$\frac{e^{r_1 x}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\begin{array}{l}x^{n-1}\int Xe^{-r_1 x}dx - (n-1)x^{n-2}\int Xxe^{-r_1 x}dx + \ldots \pm \int Xx^{n-1}e^{-r_1 x}dx \\ \qquad + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}x + C_n\end{array}\right].$$

8°. $$D_x^n y + a^n y = X:$$

l'équation auxiliaire est $r^n + a^n = 0$. Si n est impair, l'un des facteurs du premier degré sera $r + a$, ou l'une des racines sera $r = -a$. Tous les autres facteurs sont donnés par l'expression $r^2 - 2ar\cos\theta + a^2$, dans laquelle $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{n}$. La partie de l'intégrale correspondante à la racine réelle sera $\frac{C}{na^{n-1}} e^{-ax} \int Xe^{ax}dx$. Chaque couple de racines imaginaires donnera naissance à une intégrale particulière

$$-\frac{2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left[\begin{array}{l}C_1 \cos(\theta + ax\sin\theta)\int X e^{-ax\cos\theta}\cos(ax\sin\theta)dx \\ + C_2 \sin(\theta + ax\sin\theta)\int X e^{-ax\cos\theta}\sin(ax\sin\theta)dx\end{array}\right],$$

et, pour obtenir l'intégrale cherchée, il suffira de faire la somme de tous les termes que l'on obtiendra, en donnant tour à tour à θ pour valeurs tous les multiples impairs de $\frac{\pi}{n}$, inférieurs à π. Quand n est impair, l'un de ces multiples est $\frac{n\pi}{n}$ ou π, auquel correspond, d'une part, la racine $r = -a$; de l'autre, le terme $2\frac{e^{-ax}}{na^{n-1}}\int Xe^{ax}dx$, qu'il faudra réduire à moitié, parce que ce n'est pas $a^2 + 2ar + r^2$, mais bien $a + r$ qui est facteur de l'équation $x^n + a^n = 0$.

Si $X = 0$, chaque terme correspondant à un facteur du second degré devient

$$\frac{-2c^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}[C_1\cos(\theta + ax\sin\theta) + C_2\sin(\theta + ax\sin\theta)],$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$Ce^{ax\cos\theta}\cos(c + ax\sin\theta),$$

c étant un angle constant quelconque.

9°. $$D_x^n y - a^n y = X:$$

l'équation auxiliaire est $r^n - a^n = 0$; l'un des facteurs est $r - a$, ou l'une des racines est $r = a$; le terme correspondant de l'intégrale est $\frac{-1}{na^{n-1}} e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$. Si n est impair, $a + r$ sera aussi facteur, $-a$ sera racine et donnera naissance au terme $\frac{1}{na^{n-1}} e^{-ax}\int Xe^{ax}dx$. Chaque couple de racines imaginaires sera donné par le facteur du second degré $r^2 - 2ar\cos\theta + a^2$, dans lequel $\theta = \frac{2k\pi}{n}$,

et produira la portion d'intégrale

$$-\frac{2e^{ax\cos\theta}}{na^{n-1}}\left[\begin{array}{l} C_1\cos(\theta+ax\sin\theta)\int Xe^{-ax\cos\theta}\cos(ax\sin\theta)\,dx \\ +C_2\sin(\theta+ax\sin\theta)\int Xe^{-ax\cos\theta}\sin(ax\sin\theta)\,dx \end{array}\right],$$

et, pour arriver à l'intégrale cherchée, il suffira de faire la somme de tous les termes que l'on obtiendra en donnant tour à tour à θ pour valeurs tous les multiples pairs de $\frac{\pi}{n}$ inférieurs à π. Quand n est pair, o et $\frac{2n\pi}{n}=\pi$ sont deux de ces multiples auxquels correspondent les racines $r=a$, $r=-a$, et les termes de

$$\frac{-2}{na^{n-1}}e^{ax}\int Xe^{-ax}dx,\quad \frac{2}{na^{n-1}}e^{-ax}\int Xe^{ax}dx,$$

qu'il faudra réduire encore à moitié pour la raison que nous avons dit.

10°. $D_x^n y+D_x^{n-1}y+\ldots+D_x^3 y+D_x^2 y+D_x y+y=X$:

l'équation auxiliaire est

$$r^n+r^{n-1}+\ldots+r^4+r^3+r^2+r=0,$$

ou

$$\frac{r^{n+1}-1}{r-1}=0.$$

Si $n+1$ est pair, $r=-1$ sera l'une des racines à laquelle correspond le terme $\frac{2}{n+1}e^{-x}\int Xe^{x}dx$. Chaque couple de racines imaginaires sera donné par le facteur du second degré $r^2-2r\cos\theta+1$, dans lequel $\theta=\frac{2k\pi}{n+1}$; la partie correspondante de l'intégrale sera

$$\frac{-4}{n+1}e^{x\cos\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta\left[\begin{array}{l} C_1\sin\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)\int Xe^{-x\cos\theta}\cos(x\sin\theta)\,dx \\ -C_2\cos\frac{1}{2}(3\theta+2x\sin\theta)\int Xe^{-x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)\,dx \end{array}\right];$$

et, pour arriver à l'intégrale cherchée, il suffira de faire la somme de tous les termes que l'on obtiendra en donnant successivement à θ pour valeurs les multiples pairs de $\frac{\pi}{n+1}$.

Si X était égal à o, la partie de l'intégrale correspondante à une couple de racines imaginaires deviendrait

$$e^{x\cos\theta}\left[C_1 \sin\tfrac{1}{2}(3\theta + 2x\sin\theta) + C_2\cos\tfrac{1}{2}(3\theta + 2x\sin\theta)\right],$$

ou plus simplement

$$Ce^{x\cos\theta}\cos(c + x\sin\theta),$$

c étant un angle arbitraire quelconque et C une constante arbitraire.

11°. $$D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + A_2 D_x^{n-2} y + A_3 D_x^{n-3} y + \ldots$$
$$+ A_{n-1} D_x y + A_n y = ax^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_{m-1} x + a_m.$$

Essayons de satisfaire à l'équation proposée, par une valeur de la forme

$$y_1 = bx^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_{m-1} x + b_m;$$

en substituant pour y cette valeur, on trouvera

$$A_n b x^m + \left.\begin{matrix} A_n b_1 \\ + A_{n-1} m b \end{matrix}\right| x^{m-1} + \ldots = ax^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

et, pour déterminer les $m+1$ coefficients $b, b_1, \ldots, b_m$, on aura les $n+1$ équations du premier degré

$$A_n b = a, \quad A_n b_1 + A_{n-1} m b = a_1, \ldots.$$

Connaissant y_1, on complétera l'intégrale générale en ajoutant à cette valeur y_1 l'intégrale z de l'équation sans second membre

$$D_x^n z + A_1 D_x^{n-1} z + \ldots + A_{n-1} D_x z + A_n z = 0.$$

12°. $D_x^n y + A_1 D_x^{n-1} y + \ldots + A_{n-1} D_x y + A_n y$
$$= A\cos mx + B\sin mx,$$

A, B, m étant des constantes données.

Essayons de satisfaire à cette équation en prenant

$$y_1 = a\cos mx + a\sin mx;$$

en substituant, on arrivera à une équation de la forme

$$a(G\cos mx + H\sin mx) + b(K\cos mx + L\sin mx)$$
$$= A\cos mx + B\sin mx,$$

G, H, K, L étant des constantes dépendant de m. Or, cette dernière équation sera vérifiée si l'on a

$$a = \frac{AL - BK}{GL - HK}, \qquad b = \frac{BG - AH}{GL - HK}.$$

Ces valeurs de a et de b seront admissibles tant que le dénominateur GL — HK ne sera pas égal à zéro : nous verrons tout à l'heure comment il faudrait procéder si ce dénominateur était nul.

On obtiendrait avec autant de facilité l'intégrale particulière y_1 dans le cas où le second membre X, composé d'une suite de deux ou de plusieurs termes de la même forme, serait

$$X = A\cos mx + B\sin mx + A'\cos m'x + B'\cos m'x + \ldots,$$

et faisant $y = u + v$, u et v étant deux nouvelles variables, et substituant dans l'équation donnée, on pourra la partager en deux ou plusieurs équations nouvelles

$$D_x^n u + A_1 D_x^{n-1} u + \ldots + A_n u = A\cos mx + B\sin mx,$$

$$D_x^n v + A_1 D_x^{n-1} v + \ldots + A_n v = A'\cos m'x + B'\sin m'x.$$

En procédant comme nous l'avons déjà indiqué, on dé-

terminera deux intégrales particulières

$$u_1 = a\cos mx + b\sin mx,\quad v_1 = a'\cos m'x + b'\sin m'x,$$

de ces équations, et la somme $y = u_1 + v_1$ de ces deux intégrales vérifiera évidemment l'équation proposée, dont on complétera l'intégrale générale par la valeur de z déterminée comme nous l'avons indiqué plus haut.

12°. $$D_x^2 y + y = \cos x:$$

en appliquant la méthode précédente, on trouverait que le dénominateur des valeurs de a et de b est nul. Pour arriver, dans ce cas, à la vraie valeur de l'intégrale, partons de l'équation $D_x^2 y + y = \cos nx$. Si l'on cherchait une valeur particulière de cette équation, on trouverait

$$a = \frac{1}{1-n^2},\quad b = 0,\quad y_1 = \frac{\cos nx}{1-n^2},$$

et, en désignant par z l'intégrale de l'équation sans second membre $D_x^2 z + z = 0$, intégrale qui est évidemment égale à $C'\cos x + C''\sin x$, C' et C'' étant deux constantes arbitraires, on aurait pour l'intégrale générale de l'équation $D_x^2 y + y = \cos nx$

$$y = \frac{\cos nx}{1-n^2} + C'\cos x + C''\sin x,$$

ou, en posant $C' = C' - \frac{1}{1-n^2}$,

$$y = \frac{\cos nx - \cos x}{1-n^2} + C'\cos x + C''\sin x.$$

Or, pour $n=1$, l'expression $\frac{\cos nx - \cos x}{1-n^2}$ prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, et a pour vraie valeur $\frac{x\sin x}{2}$; donc l'inté-

grale générale de l'équation $D_x^2 y + y = \cos x$ est

$$y = \frac{x \sin x}{2} + C' \cos x + C'' \sin x.$$

On arriverait au même résultat en employant l'artifice de d'Alembert. En effet, si l'on pose $n = 1 + \varepsilon$, l'intégrale générale de l'équation $D_x^2 y + y = \cos nx$ deviendra

$$y = \frac{\cos(x + \varepsilon x)}{-\varepsilon(2 + \varepsilon)} + C' \cos x + C'' \sin x;$$

or

$$\frac{\cos(x + \varepsilon x)}{-\varepsilon(2 + \varepsilon)} = \frac{\cos x \cos \varepsilon x - \sin x \sin \varepsilon x}{-\varepsilon(2 + \varepsilon)},$$

et l'on trouvera, en développant $\cos \varepsilon x$, $\sin \varepsilon x$, et posant

$$C' + \frac{1}{-\varepsilon(2 - \varepsilon)} = C',$$

$$y = \cos x\,(C' + A\varepsilon) + \sin x\left(C'' + \frac{x}{2 + \varepsilon} + B\varepsilon\right),$$

A et B étant deux coefficients qui ne deviendront pas infinis quand on fera $\varepsilon = 0$, $n = 1$; on aura donc définitivement

$$y = \frac{x \sin x}{2} + C' \cos x + C'' \sin x,$$

comme nous l'avons déjà vu.



TRENTE-HUITIÈME LEÇON.

Intégration de quelques équations linéaires, de l'ordre n, à coefficients variables.

249. Considérons d'abord l'équation

$$D_x^n y + \frac{A_1}{a+bx} D_x^{n-1} y + \frac{A_2}{(a+bx)^2} D_x^{n-2} y + \ldots + \frac{A_n y}{(a+bx)^n} = 0.$$

Si l'on fait

$$y = (a+bx)^r,$$

il vient

$$r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) + A_1 r(r-1)\ldots(r-n+2) + \ldots + A_{n-1} r + A_n = f(r) = 0;$$

et l'on en conclut que l'expression $y = (a+bx)^r$ vérifiera l'équation proposée, si l'on donne pour valeur à r l'une quelconque des n racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation auxiliaire $f(r) = 0$. Les n quantités

$$(a+bx)^{r_1}, \quad (a+bx)^{r_2}, \ldots, \quad (a+bx)^{r_n},$$

seront donc autant d'intégrales particulières de l'équation donnée, et l'intégrale générale sera

$$y = C_1(a+bx)^{r_1} + C_2(a+bx)^{r_2} + \ldots + C_n(a+bx)^{r_n}.$$

Par une méthode tout à fait semblable à celle que nous

avons suivie dans la trente-sixième Leçon, on passera facilement de cette intégrale à celle de l'équation

$$D_x^n y + \frac{A_1}{a+bx} D_x^{n-1} y + \frac{A_2}{(a+bx)^2} D_x^{n-2} y \ldots + \frac{A_n y}{(a+bx)^n} = X.$$

Si quelques-unes des racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ étaient égales entre elles, ou imaginaires, on aurait recours à des méthodes de transformation absolument identiques avec celles que nous avons employées dans le cas de l'équation linéaire à coefficients constants.

Prenons pour exemple l'équation différentielle

$$D_x^2 y + \frac{A_1}{a+bx} D_x y + \frac{A_2 y}{(a+bx)^2} = 0,$$

l'équation auxiliaire est

$$r(r-1) + A_1 r + A_2 = 0;$$

en appelant r_1 et r_2 ses deux racines supposées inégales, l'intégrale cherchée sera

$$y = C_1 (a+bx)^{r_1} + C_2 (a+bx)^{r_2}.$$

Pour reconnaître ce qui arrive dans le cas des racines égales, mettons l'intégrale trouvée sous la forme

$$y = C_1 \varphi(r_1) + C_2 \varphi(r_2),$$

et faisons

$$r_2 = r_1 + \varepsilon;$$

on aura

$$\varphi(r_2) = \varphi(r_1 + \varepsilon) = \varphi(r_1) + \varepsilon \varphi'(r_1 + \theta\varepsilon),$$
$$y = (C_1 + C_2)\varphi(r_1) + C_2 \varepsilon \varphi'(r_1 + \theta\varepsilon) = C'\varphi(r_1) + C''\varphi'(r_1 + \theta\varepsilon);$$

en passant à la limite et remarquant que

$$\varphi'(r) = D_r (a+bx)^r = (a+bx)^r \, l\,(a+bx),$$

on verra que quand les racines sont égales, l'intégrale

devient

$$y = (a + bx)^{r_1}[C' + C'' \mathrm{l}(a + bx)];$$

on verrait de même que si trois racines r_1, r_2, r_3 sont égales, l'intégrale générale est

$$y = (a + bx)^{r_1}[C' + C'' \mathrm{l}(a + bx) + C''' \mathrm{l}(a + bx)^2]$$
$$+ C_4 (a + bx)^{r_4} + \ldots$$

250. Comme seconde application, considérons l'équation

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = X.$$

Nous avons vu qu'il suffira de connaître une intégrale particulière de l'équation sans second membre

$$D_x^2 z + X_1 D_x z + X_2 z = 0$$

pour ramener au premier ordre l'équation avec second membre. Soit z_1 cette intégrale, et posons $y = uz_1$; en différentiant il viendra

$$D_x y = u D_x z_1 + z_1 D_x u,$$
$$D_x^2 y = u D_x^2 z_1 + 2 D_x z_1 D_x u + z_1 D_x^2 u.$$

Substituant dans l'équation proposée et réduisant, on trouvera

$$(2 D_x z_1 + X_1 z_1) D_x u + z_1 D_x^2 u = X;$$

et en faisant $D_x u = v$,

$$z_1 D_x v + (2 D_x z_1 + X_1 z_1) v = X.$$

On tirera de cette dernière équation la valeur de v, et l'on en conclura

$$u = C + \int v dx, \quad y = z_1 (C + \int v dx).$$

Exemple :

$$D_x^2 y + X_2 y = X;$$

l'équation en z sera

$$D_x^2 z + X_2 z = 0,$$

l'équation en v deviendra

$$z_1 D_x v + 2v D_x z_1 = X, \quad \text{ou} \quad z_1 dv + 2v dz_1 = X dx;$$

multipliant par z_1, et intégrant, on aura

$$vz_1^2 = C_1 + \int_{x_0}^{x} X z_1 dx,$$

$$u = C_2 + \int \frac{C_1 + \int X z_1 dx}{z_1^2} dx,$$

$$y = C_2 z_1 + z_1 \int \frac{C_1 + \int X z_1 dx}{z_1^2} dx.$$

L'intégrale générale de l'équation en z sera

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2}.$$

Comme nous l'avons vu encore pour abaisser le degré de l'équation sans second membre, il n'est pas nécessaire de connaître une valeur particulière de z; mais la nouvelle équation différentielle du premier ordre ne sera plus linéaire comme la précédente: il suffit pour cela de faire $z = e^{\int_{x_0}^{x} t dx}$, d'où

$$D_x z = t e^{\int_{x_0}^{x} t dx} = tz,$$

$$D_x^2 z = t D_x z + z D_x t = (D_x t + t^2) z \ldots .$$

Substituant ces valeurs dans l'équation différentielle proposée, z sera facteur commun, et il restera une équation différentielle en t du premier ordre, mais qui ne sera pas linéaire, puisqu'elle renfermera des puissances de t.

Exemple :

$$D_x^2 z + X_2 z = 0;$$

l'équation en t sera

$$D_x t + t^2 + X_2 = 0.$$

Puisque $D_x z = z' = tz$, on aura

$$t = \frac{z'}{z},$$

et il semble que la valeur de t renfermera deux constantes ainsi que la valeur de z, ce qui ne peut être, puisque l'équation en t est du premier ordre; mais les deux constantes de la valeur de t se réduiront en réalité à une seule. En effet, la valeur de z est donnée par l'équation

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2},$$

ou

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_2,$$

en faisant $z_2 = z_1 \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{z_1^2}$, et l'on aura, par conséquent,

$$t = \frac{C_1 z'_1 + C_2 z'_2}{C_1 z_1 + C_2 z_2} = \frac{z'_1 + \frac{C_2}{C_1} z'_2}{z_1 + \frac{C_2}{C_1} z_2} = \frac{z'_1 + C z'_2}{z_1 + C z_2}.$$

251. Faisons $X_2 = -ax^m$, a étant un coefficient constant, et cherchons l'intégrale de l'équation

$$D_x^2 z - ax^m z = 0.$$

L'équation en t deviendra

$$D_x t + t^2 = ax^m, \quad \text{ou} \quad dt + t^2 dx = ax^m dx.$$

C'est l'équation de Riccati, que l'on saura intégrer, par conséquent, si l'on sait intégrer l'équation

$$D_x^2 z - ax^m z = 0.$$

Pour y parvenir, posons

$$z = \int_0^{\infty} c^{-x^\alpha u} \varphi(u)\, du,$$

et voyons si nous pourrons déterminer le nombre α et la fonction $\varphi(u)$, de manière à satisfaire à l'équation en z; on a

$$D_x z = -\alpha x^{\alpha-1}\int_0^{\infty} u\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du,$$

$$D_x^2 z = \alpha^2 x^{2\alpha-2}\int_0^{\infty} u^2\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du$$
$$-\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\int_0^{\infty} u\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du;$$

en substituant dans l'équation $D_x^2 z - ax^m z = 0$, et exprimant qu'elle est satisfaite, on trouvera d'abord que $\alpha - 2$ doit être égal à m, ou $\alpha = m+2$, et que $\varphi(u)$ sera déterminé par l'équation

$$\int_0^{\infty}[\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a]\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du = 0.$$

Or, on peut choisir $\psi(u)$ de manière que l'intégrale qui précède, prise entre des limites quelconques, soit égale à $\psi(u)e^{-x^\alpha u}$; car, en différentiant les deux membres de l'équation

$$\int[\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a]\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du = \psi(u)e^{-x^\alpha u},$$

on trouve

$$[\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a]\varphi(u) = -x^\alpha\psi(u) + \psi'(u),$$

et cette dernière équation sera satisfaite, quel que soit α, si l'on a

$$\psi(u) = -\alpha^2 u^2\varphi(u),\quad \psi'(u) = -[\alpha(\alpha-1)u + a]\varphi(u),$$
$$\frac{\psi'(u)}{\psi(u)} = \frac{\alpha-1}{\alpha u} + \frac{a}{\alpha^2 u^2},\quad l\psi(u) = \frac{\alpha-1}{\alpha}lu - \frac{a}{\alpha^2 u} + C,$$
$$\psi(u) = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}};$$

on a donc

$$\int[\alpha^2 x^\alpha u^2 - \alpha(\alpha-1)u - a]\varphi(u)e^{-x^\alpha u}du = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}e^{-x^\alpha u - \frac{a}{\alpha^2 u}},$$

et l'intégrale définie prise entre les deux limites o et ∞ s'évanouira nécessairement, puisque le second membre s'évanouit aux deux limites. D'ailleurs, des équations

$$\psi(u) = Cu^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}}, \quad \psi(u) = -\alpha^2 u^2 \varphi(u),$$

on tire

$$\varphi(u) = -\frac{C}{\alpha^2}u^{-1-\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}} = C'u^{-1-\frac{1}{\alpha}}e^{-\frac{a}{\alpha^2 u}},$$

et, en substituant pour $\varphi(u)$ sa valeur, on trouvera définitivement que l'expression

$$z = C'\int_0^\infty u^{-1-\frac{1}{\alpha}}e^{-x^\alpha u - \frac{a}{\alpha^2 u}}du$$

vérifie, lorsque $\alpha = m + 2$, l'équation proposée

$$D_x^2 z = ax^m z.$$

Si, après avoir fait, pour abréger, $\frac{a}{\alpha^2} = k^\alpha$, on change $u^{\frac{1}{\alpha}}$ en u, on trouvera que la valeur de z prend la forme plus simple

$$z = C\alpha\int_0^\infty e^{-\frac{x^\alpha}{u^\alpha} - k^\alpha u^\alpha}du.$$

Enfin, si dans cette dernière expression on change u en $\frac{u}{k}$, ce qui ne change pas encore les limites, on aura

$$z = \frac{C\alpha}{k}\int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{k^\alpha x^\alpha}{u^\alpha}}du$$

252. Il est facile de prouver, à priori, que cette valeur de z vérifie réellement l'équation proposée. Supposons en effet qu'on fasse d'abord

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{x^\alpha}{u^\alpha}} du;$$

ou bien, en changeant u en $u^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} \int u^{\frac{1}{\alpha} - 1} e^{-u - \frac{x^\alpha}{u}} du,$$

et mettons en évidence quelques propriétés de la fonction $f(x)$. En différentiant, par rapport à x, les deux membres de l'équation précédente, on trouve

$$f'(x) = -x^{\alpha-1} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha} - 2} e^{-u - \frac{x^\alpha}{u}} du,$$

et, en multipliant par x,

$$xf'(x) = -\int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} x^\alpha e^{-\frac{x^\alpha}{u}} \frac{du}{u^2}.$$

Intégrons maintenant par parties, en remarquant, 1° que si l'on fait

$$x^\alpha e^{-\frac{x^\alpha}{u}} \frac{du}{u^2} = dq,$$

on aura

$$e^{-\frac{x^\alpha}{u}} = q;$$

2° qu'en posant de plus

$$u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} = p,$$

on aura

$$xf'(x) = -\int_0^\infty p\,dq = -pq + \int_0^\infty q\,dp = \int_0^\infty q\,dp,$$

car $pq = u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}}$ s'évanouit pour $u = 0$ et $u = \infty$.

On a d'ailleurs

$$dp = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u} du - u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u} du,$$

$$q\,dp = \frac{1}{\alpha} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du - u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du,$$

et, par suite,

$$\int q\,dp = x f'(x) = f(x) - \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du.$$

En différentiant de nouveau par rapport à x, on aura

$$x f''(x) = \alpha x^{\alpha-1} \int_0^\infty u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u-\frac{x^\alpha}{u}} du = \alpha^2 x^{\alpha-1} f(x);$$

$f(x)$ satisfait donc à l'équation

$$f''(x) = \alpha^2 x^{\alpha-2} f(x),$$

qui ressemble déjà beaucoup à l'équation différentielle proposée, mais qui est moins générale parce qu'elle suppose que l'on a $a = \alpha^2 = (m+2)^2$. Pour lui donner toute la généralité qu'elle doit avoir, faisons

$$z = f(kx),$$

d'où

$$D_x^2 z = k^2 f''(kx),$$

$$\frac{D_x^2 z}{k^2} = \alpha^2 (kx)^{\alpha-2} z, \quad D_x^2 z = k^\alpha \alpha^2 x^{\alpha-2} z,$$

et, en posant $k^\alpha = \dfrac{a}{\alpha^2}$,

$$D_x^2 z = a x^{\alpha-2} z = a x^m z.$$

Il est donc bien certain que la valeur

$$z = Cf(kx) = C\int_0^{\infty} e^{-u^{\alpha}-\frac{k^{\alpha}x^{\alpha}}{u^{\alpha}}}du = C\int_0^{\infty} e^{-u^{\alpha}-\frac{ax^{\alpha}}{\alpha^2 u^{\alpha}}}du$$

vérifie l'équation différentielle $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}z$.

Exemple. Soit $\alpha = 2$, l'équation différentielle se réduit à $D_x^2 z = az$, et l'on a

$$z = C\int_0^{\infty} e^{-u^2-\frac{ax^2}{4u^2}}du;$$

or

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2-\frac{x^2}{4u^2}} = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-x},$$

et par conséquent

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2-\frac{ax^2}{4u^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\; e^{-x\sqrt{a}};$$

donc la valeur $z_1 = C_1\sqrt{\pi}\,e^{-x\sqrt{a}}$ est une intégrale particulière de l'équation $D_x^2 z = az$. Mais nous avons vu que son intégrale générale était

$$z = C_1 z_1 + C_2 z_1\int\frac{dx}{z_1^2} = C_1 e^{-x\sqrt{a}} + \frac{C_2}{2\sqrt{a}}e^{-x\sqrt{a}}\int e^{2x\sqrt{a}}dx$$
$$= C_1 e^{-x\sqrt{a}} + \frac{C_1}{4a}e^{-x\sqrt{a}}\times e^{2x\sqrt{a}};$$

donc enfin, l'intégrale générale de l'équation $D^2 z = az$ sera définitivement

$$z = C' e^{-x\sqrt{a}} + C'' e^{x\sqrt{a}}.$$

253. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$D_x^2 z = ax^{-\alpha-2}z:$$

une intégrale particulière de cette nouvelle équation sera

évidemment

$$z_1 = C' \int_0^\infty e^{-\frac{1}{u^\alpha} - \frac{a}{\alpha^2} \frac{u^\alpha}{x^\alpha}} du.$$

En changeant u en $x \sqrt{\frac{\alpha^2}{a}}\, u$, ce qui ne change rien aux limites, et réduisant, on trouvera

$$z_1 = Cx \int_0^\infty e^{-u^\alpha - \frac{a\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}{\alpha^2 u^\alpha}} du.$$

Donc si $\varphi(x)$ est l'intégrale particulière de l'équation différentielle $D^2 z = ax^{\alpha-2} z$, $z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ sera l'intégrale particulière de l'équation que l'on déduit de la précédente en changeant α en $-\alpha$. Il en sera de même de l'intégrale générale, car si $\varphi(x)$ représente l'intégrale générale de l'équation

$$D_x^2 z = ax^{\alpha-2} z,$$

on aura

$$\varphi''(x) = ax^{\alpha-2} \varphi(x),$$

et par suite

$$\varphi''\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a}{x^{\alpha-2}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right);$$

or, si l'on différentie deux fois l'expression $z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$, on trouvera

$$D_x z = \varphi\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{1}{x}\right), \quad D_x^2 z = \frac{1}{x^3}\varphi''\left(\frac{1}{x}\right);$$

et en substituant pour $\varphi''\left(\frac{1}{x}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ leurs valeurs

$$D_x^2 z = \frac{a}{x^{\alpha+1}} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{az}{x^{\alpha+2}} = ax^{-\alpha-2} z;$$

donc réellement si $\varphi(x)$ vérifie l'équation $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}z$, $x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ vérifiera l'équation $D_x^2 z = ax^{-\alpha-2}$ que l'on déduit de la première en changeant α en $-\alpha$.

Exemple. Nous avons vu que lorsque α était positif et égal à 2, l'équation différentielle se réduisait à $D_x^2 z = az$, et avait pour intégrale générale

$$z = C'e^{-x\sqrt{a}} + C''e^{x\sqrt{a}} = \varphi(x).$$

Donc si l'on change α en $-\alpha$, c'est-à-dire si l'on fait $\alpha = -2$, l'équation différentielle, qui devient $D_x^2 z = ax^{-4}z$, aura pour intégrale générale

$$z = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right) = x\left(C'e^{-\frac{\sqrt{a}}{x}} + C''e^{\frac{\sqrt{a}}{x}}\right).$$

Dans tous les cas, quand on connaîtra l'intégrale générale correspondante à une certaine valeur positive de α, on en déduira immédiatement l'intégrale correspondante à cette même valeur prise négativement.

254. On peut, dans un certain cas particulier, obtenir en termes finis l'intégrale générale de l'équation $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}z$, c'est lorsque $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{2n+1}$, n étant un nombre entier; alors, en effet, l'intégrale trouvée

$$z = C\int_0^1 e^{-u^\alpha - \frac{ax^\alpha}{\alpha^2 u^\alpha}}\,du$$

deviendra, si l'on y change successivement, 1° u en $u^{\frac{1}{\alpha}}$, 2° u en au; et si l'on fait $\frac{x^\alpha}{\alpha^2} = s$, $C\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha} = \text{C}$,

$$z = \text{C}\int_0^1 u^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-au-\frac{s}{u}}\,du.$$

Supposons un instant que α soit égal à 2, l'équation différentielle devient alors $D_x^2 z = az$, et a pour inté-

grale, comme nous avons vu,

$$z = C\int_0^\infty e^{-u^2-\frac{ax^2}{4u^2}}\,du = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\; e^{-x\sqrt{a}};$$

ou, en faisant $x^2 = 4s$,

$$z = C\int_0^\infty {}^{-u^2-\frac{4as}{4u^2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2\sqrt{a}\sqrt{s}},$$

comme la valeur précédente de z n'est qu'une transformation de celle-ci, on aura nécessairement, en remplaçant α et C par leurs valeur s, 2, $\frac{C\sqrt{a}}{2}$,

$$\int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}}\, e^{-au-\frac{s}{u}}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\, e^{-2\sqrt{a}\sqrt{s}},$$

et en différentiant n fois par rapport à a, on trouvera

$$\int_0^\infty u^{n+\frac{1}{2}-1}\, e^{-au-\frac{s}{u}}\,du = (-1)^n \sqrt{\pi}\, D_a^n\left(a^{-\frac{1}{2}}\, e^{-x\sqrt{a}}\right);$$

or, on calculera sans peine dans tous les cas, la valeur de cette dérivée de l'ordre n que l'on peut mettre sous la forme $f(x, \sqrt{a})$ et qui à une constante C_1 près, sera une intégrale particulière z_1 de l'équation $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}\, z$ dans le cas où $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$. Il est facile de voir que cette même équation sera satisfaite encore par l'expression $z_2 = f(x, -\sqrt{a})$, car la valeur de l'intégrale

$$\int_0^\infty u^{n+\frac{1}{2}-1}\, e^{-au-\frac{s}{u}}\,du$$

reste évidemment la même quand on change $\sqrt{a}$ en $-\sqrt{a}$; l'intégrale générale de l'équation $D_x^2 z = ax^{\alpha-2}$, dans le cas où $\frac{1}{\alpha} = n + \frac{1}{2}$, sera donc

$$z = C_1 f(x, \sqrt{a}) + C_2 f(x, -\sqrt{a}),$$

et s'exprime par conséquent en termes finis.

255. Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$D_x^n x - xy = 0,$$

et pour y parvenir, considérons d'abord l'équation plus générale $D_x^n y - xy = C_1$, dans laquelle C_1 désigne une constante arbitraire : faisons $y = \int e^{zx} Z\, dz$, Z étant une fonction arbitraire de la nouvelle variable indépendante z, et l'intégrale devant être prise entre des limites qu'il s'agit de déterminer. On aura

$$D_x^n y = \int e^{zx} Z z^n\, dz,$$

et en substituant dans l'équation $D_x^n y - xy = C_1$,

$$\int e^{zx} Z z^n\, dz - \int e^{zx} xZ\, dz = C_1.$$

En intégrant par parties, on a

$$\int e^{zx} xZ\, dz = e^{zx} Z - \int e^{zx}\, dZ,$$

et par conséquent

$$\int e^{zx} (Z z^n\, dz + dZ) - e^{zx} Z = C_1.$$

La fonction Z et les limites de l'intégrale étant complétement arbitraires, nous pouvons en disposer de telle sorte que la partie affectée du signe intégral s'évanouissant, la différence entre les deux valeurs aux limites de la partie intégrée $e^{zx}Z$ soit égale à $-C_1$. La première condition fournit immédiatement l'équation différentielle $\frac{dZ}{Z} = - z^n\, dz$, d'où l'on tire

$$Z = Ce^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}},\quad e^{zx} Z = Ce^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} e^{zx};$$

et la seconde sera satisfaite si, en prenant pour limites $z = 0$, $z = \infty$; on fait $C = C_1$, on aura donc

$$y = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} e^{zx}\, dz.$$

Cette valeur de y ne sera cependant qu'une intégrale particulière y_1 de l'équation proposée. Pour en obtenir une seconde, il suffit de remarquer que puisque la quantité Z ne change pas quand on y remplace z par $\alpha_1 z$, α_1 étant une des racines de l'équation $\alpha^{n+1} - 1 = 0$, et qu'il en est de même des deux limites de l'intégration, on aura une seconde intégrale particulière en prenant pour y l'expression $C_1\alpha_1 \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} e^{\alpha_1 zx}\, dz$. D'ailleurs la différence de ces deux intégrales particulières fournit nécessairement une intégrale particulière y_1 de l'équation $D_x^n y - xy = 0$; on aura donc

$$y_1 = C_1 \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} \left(e^{zx} - \alpha_1 e^{\alpha_1 zx}\right) dz,$$

C_1 désignant une constante quelconque.

Les $n-1$ autres intégrales particulières s'obtiendront évidemment en employant les $n-1$ autres racines α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$ de l'équation $\alpha^{n+1} - 1 = 0$; et par conséquent l'intégrale générale de l'équation proposée sera, en faisant $C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n = c$,

$$C_1 = -c_1, \quad C_2 = -c_2, \ldots, \quad C_n = -c_n,$$

$$y = \int_0^\infty e^{-\frac{z^{n+1}}{n+1}} dz \left(c e^{zx} + c_1\alpha_1 e^{\alpha_1 zx} + c_2\alpha_2 e^{\alpha_2 zx} + \ldots + c_n\alpha_n e^{\alpha_n zx}\right).$$

En différentiant n fois de suite, par rapport à x, cette valeur de y, on verra sans peine que dans l'hypothèse de $z = 0$, le coefficient différentiel $D_x^n y$ se réduira à la somme $c + c_1 + c_2 + \ldots + c_n$, et l'on en conclura que l'intégrale complète de l'équation $D_x^n y - xy = C_1$, s'exprimera par la même valeur de y, pourvu que les $n+1$ constantes soient assujetties à la condition

$$c + c_1 + c_2 + \ldots + c_n = C_1.$$

256. Considérons en second lieu l'intégrale

$$D_x^2 y + abx^n y = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{D_x^2 y}{x^n} = c^2 y,$$

en posant $ab = c^2$. Prenons pour variable indépendante la variable z, déterminée par l'équation

$$dz = x^{\frac{n}{2}} dx,$$

on aura

$$z = \frac{2}{n+2} x^{\frac{n}{2}+1} = \frac{1}{m} x^m,$$

en faisant

$$m = \frac{n}{2} + 1,$$

et, par suite,

$$D_x y = D_z y \times x^{m-1},$$
$$D_x^2 y = (m-1) x^{m-2} D_z y + x^{2(m-1)} D_z^2 y,$$
$$\frac{1}{x^n} D_x^2 y = \frac{m-1}{x^m} D_z y + D_z^2 y;$$

si l'on substitue ces valeurs dans la proposée, elle deviendra

$$D_z^2 y + \frac{m-1}{m} \frac{1}{z} D_z y = c^2 y.$$

Pour intégrer cette dernière équation, faisons

$$y = \int e^{-tz} T\, dt,$$

on aura successivement

$$zy = \int e^{-tz} Tz dt = -e^{-tz} T + \int e^{-tz} dT,$$
$$D_z y = -\int e^{-tz} T\, t dt,$$
$$zD_z^2 y = \int e^{-tz} Tt^2 z dt = -e^{-tz} Tt^2 + \int e^{-tz} d.Tt^2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation

$$D_z^2 y + \frac{m-1}{m} \frac{1}{z} D_z y = c^2 y,$$

mise sous la forme

$$z(D_z^2 y - c^2 y) + \frac{m-1}{m} D_z y = 0,$$

il viendra

$$e^{-tz}T(c^2 - t^2) + \int e^{-tz}\left(d.Tt^2 - c^2 dT - \frac{m-1}{m} Ttdt\right) = 0.$$

En égalant à zéro la partie soumise au signe intégral, on aura, pour déterminer T, l'équation différentielle

$$(t^2 - c^2)\, dT + \frac{m+1}{m} Ttdt = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dT}{T} = -\frac{m+1}{m}\,\frac{tdt}{t^2 - c^2},$$

et, en intégrant,

$$T = (c^2 - t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}.$$

Il reste à déterminer les limites par la condition que la différence entre les deux valeurs extrêmes de l'expression

$e^{-tz}T(c^2 - t^2) = e^{-tz}(c^2 - t^2)^{\frac{m-1}{2m}}$ soit égale à zéro; or, tant que l'exposant $\frac{m-1}{2m}$ sera positif, cette condition sera satisfaite, si l'on prend, pour valeur extrême de t, $t = 0$, $t = \infty$, et, par conséquent, une des intégrales particulières de l'équation donnée sera

$$y = C_1 \int_0^\infty e^{-tz}(c^2 - t^2)^{-\frac{m-1}{2m}} dt$$

$$= C_1 \int_0^\infty e^{\frac{-2t}{n+2} x^{\frac{n}{2}+1}} (c^2 - t^2)^{-\frac{n+4}{2n+4}} dt.$$

Mais la condition aux limites serait encore satisfaite si l'on prenait pour valeurs extrêmes $t=-c$, $t=+c$; on arrive ainsi, en changeant tour à tour t en ct, t en $-ct$, à deux nouvelles valeurs de y :

$$y=C_1\int_{-c}^{+c}e^{-tz}(c^2-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt=C_1\int_{-1}^{+1}e^{-ctz}(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt,$$

$$y=C_1\int_{+c}^{-c}e^{tz}(c^2-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt=C_1\int_{-1}^{+1}e^{+ctz}(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt;$$

d'où l'on déduirait facilement

$$y=C\int_0^1(e^{ctz}+e^{-ctz})(1-t^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dt.$$

Pour obtenir une seconde valeur particulière, faisons $y=zy_1$, l'équation proposée deviendra

$$xD_x^2y_1+2D_xy_1=c^2x^{n+1}y_1,$$

ou

$$D_z^2y_1+\frac{1+m}{+m}\frac{1}{z}D_zy_1=c^2y_1,$$

si l'on prend pour variable indépendante $dz=x^{\frac{n}{2}}dx$. En comparant la dernière équation à celle que nous avons obtenue plus haut

$$D_z^2y+\frac{m-1}{m}\frac{1}{z}D_zy=c^2y,$$

ou

$$D_z^2y+\frac{1-m}{-m}\frac{1}{z}D_zy=c^2y,$$

on arrivera à cette conclusion importante, que, si l'équation proposée est vérifiée par une certaine valeur $y=y_1$, elle le sera encore par le produit xy_1, pourvu que dans la valeur de y_1 on change m en $-m$; la somme des deux intégrales particulières, obtenues comme nous venons de le dire, sera l'intégrale générale cherchée.

M. Lobatto, à qui nous avons emprunté ces transformations, ajoute, en terminant sa Note, que les valeurs de y précédemment trouvées pour les intégrales complètes des deux équations

$$D_x^n y = xy, \quad D_x^2 y = c^2 x^n y,$$

conduisent immédiatement aux intégrales complètes des équations aux dérivées partielles $D_x^n y = x D_t^{n+1} y$, $D_x^2 y = x^n D_t^2 y$.

257. Pour rendre plus sensibles encore les théories que nous avons exposées, pour familiariser avec les artifices de calcul par lesquels on est forcé de suppléer sans cesse à l'imperfection des théories générales, pour mieux faire connaître l'état actuel de la science, nous avons cru nécessaire de passer en revue rapidement les diverses classes d'équations que les géomètres sont parvenus à intégrer directement ou à l'aide de procédés plus ou moins détournés. Les équations

$$D_x y - xy = 0, \quad D_x y - abx^n = 0,$$

si élégamment intégrées par M. Lobatto, sont déjà deux exemples remarquables de ce qu'on peut obtenir à l'aide de transformations habilement devinées.

I. Équations dans lesquelles une dérivée d'ordre quelconque est exprimée en fonction de la dérivée qui la précède d'un ou de deux rangs.

Posons

$$dy = pdx, \quad dp = qdx, \quad dq = rdx, \ldots,$$

puis désignons respectivement par Y, P, Q, R,... des fonctions de $y, p, q, r, \ldots$, de telle sorte que l'on ait

$$Y = f(y), \quad P = f(p), \quad Q = \varphi(q), \ldots.$$

et proposons-nous d'intégrer les équations

$$p = Y = f(y), \quad q = P = f(p), \quad r = Q = \varphi(q), \ldots.$$

Comme on a $p = \frac{dy}{dx}$, la première de ces équations devient

$$dx = \frac{dy}{Y},$$

et donne immédiatement

$$x = \int \frac{dy}{Y}.$$

A cause de $q = \frac{dp}{dx}$, la seconde donne

$$dx = \frac{dp}{P}, \quad dy = \frac{pdp}{P}, \quad x = \int \frac{dp}{P}, \quad y = \int \frac{pdp}{P}.$$

La troisième équation $r = Q$, quand on y substitue pour r sa valeur

$r=\frac{dq}{dx}$, donne

$$dx=\frac{dq}{Q},\quad qdx=dp=\frac{qdq}{Q},$$

d'où

$$x=\int\frac{dq}{Q},\quad p=\int\frac{qdq}{Q},$$

$$dy=pdx=\frac{dq}{Q}\int\frac{qdq}{Q},\quad y=\int\frac{dq}{Q}\int\frac{qdq}{Q}.$$

On trouvera de même que les équations $s=R$, $t=S$, donneront

$$x=\int\frac{dr}{R},\quad y=\int\frac{dr}{R}\int\frac{dr}{R}\int\frac{rdr}{R},$$

$$x=\int\frac{ds}{S},\quad y=\int\frac{ds}{S}\int\frac{ds}{S}\int\frac{ds}{S}\int\frac{sds}{S}.$$

Corollaire. Si dans les équations

$$x=\int\frac{dp}{P},\quad y=\int\frac{pdp}{P},$$

on suppose $x=P$, on aura

$$\frac{dp}{P}=dP,\quad y=\int pdP=Pp-\int Pdp,$$

ce qui devait être. Si, au contraire, on fait $x=Q$, on aura

$$dx=dQ,\quad qdx=dp=qdQ,$$
$$p=\int qdQ,\quad y=\int dQ\int qdQ=Q\int qdQ-\int qQdQ,$$

ou, en transformant,

$$y=\tfrac{1}{2}qQ^2+\tfrac{1}{2}\int Q^2dq-Q\int Qdq,$$
$$2y=Q^2q-2Q\int Q\,dq+\int Q^2dq.$$

Si l'on faisait $x=R$, $x=S$, on trouverait de même

$$6y=R^3r-3R^2\int Rdr+3R\int R^2dr-\int R^3dr\ldots \text{etc.},$$
$$24y=S^4s-4S^3\int Sds+6S^2\int S^2ds-4S\int S^3ds+\int S^4ds\ldots.$$

En conservant les mêmes notations que ci-dessus, cherchons les intégrales des équations

$$q=Y,\quad r=P,\quad s=Q,\quad t=R,\ldots:$$

pour la première équation $q = Y$, comme on a

$$q = p\frac{dp}{dy},$$

on aura

$$pdp = Ydy,\quad p^2 = 2\int Ydy,\quad p = \sqrt{2\int Ydy} = \frac{dy}{dx},$$
$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2\int Ydy}}.$$

Pour la seconde $r = P$, à cause de $r = \frac{qdq}{dp}$, on aura

$$qdq = Pdp,\quad q = \sqrt{2\int Pdp} = \frac{pdp}{dy} = \frac{dp}{dx},$$

d'où

$$x = \int \frac{dp}{\sqrt{2\int Pdp}},\quad y = \int \frac{pdp}{\sqrt{2\int Pdp}}.$$

Pour la troisième, la quatrième, etc., procédant de la même manière, on trouvera

$$x = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}},\quad y = \int \frac{dq}{\sqrt{2\int Q\,dq}} \int \frac{qdq}{\sqrt{2\int Q\,dq}},$$
$$x = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}},\quad y = \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R\,dr}} \int \frac{dr}{\sqrt{2\int R dr}} \int \frac{rdr}{\sqrt{2\int R\,dr}};$$

la loi est évidente.

Les équations qui précèdent sont toutes comprises dans les deux formules

$$F(D_x^{n-1}y,\ D_x^n y) = 0,\quad F(D_x^{n-2}y,\ D_x^n y) = 0,$$

qu'on peut intégrer comme il suit : en posant tour à tour

$$D_x^{n-1}y = z,\quad D_x^{n-2}y = z,$$

ces deux équations deviendront

$$F\left(z, \frac{dz}{dx}\right) = 0,\quad F\left(z, \frac{d^2z}{dx^2}\right) = 0;$$

et l'on en tirera

$$dx = f(z)dz,\quad x = \int f(z)\,dz + C = \varphi(z),$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(z),\quad 2\frac{dz}{dx}d\frac{dz}{dx} = f(z)dz,\quad \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = 2\int f(z)\,dz + C,$$
$$dx = \varphi(z)\,dz,\quad x = \chi(z).$$

Si l'on peut résoudre, par rapport à z, l'équation $x = \varphi(z)$, on connaîtra $D_x^{n-1} y$, et, par une suite de quadratures, on arrivera à la valeur de y. Si l'on ne peut pas la résoudre, on obtiendra y de la manière suivante : l'équation $D_x^{n-1} y = z$ donne

$$D_x^{n-2} y = \int z dx = \int z f(z) dz + C;$$

intégrant toujours par rapport à x, et remplaçant dx par $f(z)dz$ dans le second membre, on parviendra, par une suite de quadratures, à une valeur de la forme $y = \mathrm{f}(z)$, et il suffira d'éliminer z entre les deux équations $x = \varphi(z)$, $y = \mathrm{f}(z)$, pour trouver l'intégrale générale de l'équation donnée, avec n constantes arbitraires.

De même, si l'on peut résoudre, par rapport à z, l'équation $x = \chi(z)$, on connaîtra $D_{x-2}^{n} y$, et, par suite, y à l'aide de $n - 2$ quadratures qui introduiront $n - 2$ nouvelles constantes arbitraires. Sinon, on obtiendra y en fonction de z, en intégrant $n - 2$ fois l'équation $D_{x-2}^{n} y = z$, après avoir multiplié à chaque fois le premier membre par dx, et le second par $f(z)dz$ qui est égal à dx.

Plus généralement encore, si l'on a

$$F(x, D_x^m y, D_x^{m+1} y, \ldots, D_x^n y) = 0,$$

on abaissera de m unités l'ordre de cette équation, en posant $D_x^m y = z$, et, si l'on peut intégrer l'équation

$$F(x, z, D_x z, \ldots, D_x^{n-m} z) = 0,$$

puis résoudre par rapport à x ou à z, on obtiendra l'équation en x et en y par les mêmes moyens que dans les cas précédents.

Si l'équation était

$$F(y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y),$$

on pourrait, par le changement de variable indépendante, la ramener à la forme

$$F(y, D_y x, D_y^2 x, \ldots, D_y^m x) = 0,$$

et l'abaisser en posant

$$D_y x = p.$$

Exemples choisis parmi les équations que l'on rencontre le plus souvent dans les applications du calcul intégral.

1°.
$$a\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx},\quad \text{ou}\quad q=\frac{p}{a};$$
$$dx=a\frac{dp}{p},\quad x=C_1+a\,\mathrm{l}p;$$
$$dy=adp,\quad y=C_2+ap,\quad x=C_1+a\,\mathrm{l}\frac{y-C_2}{a}.$$

2°. $$\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}},\quad q=\sqrt{1+p^2},\quad x=C_1\,\mathrm{l}\frac{y+\sqrt{y^2-C_2^2}}{C_2}.$$

3°. $$-adxd^2y=(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}},\quad x=C_1-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$
$$y=C_2+\frac{a}{\sqrt{1+p^2}},\quad (x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2.$$

4°. $$\frac{ds\,dy}{d^2x}=a\frac{dx}{dy};$$

$s=\sqrt{dx^2+dy^2}$ est pris pour variable indépendante. On a
$$d^2s=0=d^2x\sqrt{1+p^2}+\frac{pdxdp}{\sqrt{1+p^2}},$$
d'où
$$d^2x=-\frac{pdxdp}{1+p^2},$$
et, en substituant dans la proposée,
$$\frac{pdx\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{-pdp}=\frac{a}{p},\quad dy=-\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},\quad y=c_2-\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}.$$
Par suite, en faisant $p=\frac{1}{u}$,
$$dx=\frac{au^2du}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{adu}{\sqrt{u^2+1}}-\frac{adu}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$
$$x=C_1-\frac{au}{\sqrt{1+u^2}}+a\,\mathrm{l}\left(u+\sqrt{1+u^2}\right),$$
ou
$$x=C_1-\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}+a\,\mathrm{l}\frac{1+\sqrt{1+p^2}}{p}.$$

5°. $$\frac{ds\,dy}{d^2y}=a\,\text{arc tang}\frac{dy}{dx},$$

ds étant encore la variable indépendante : on aura
$$-\frac{dx\,(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{dp}=a\,\text{arc tang}\,p;$$
$$dx=-\frac{adp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,p,\quad dy=-\frac{apdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,\text{arc tang}\,p;$$

et, comme la différentielle de arc tang$p$ est $\frac{dp}{1+p^2}$, on aura

$$x = -\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\text{arc tang}\, p + a\int\frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y = \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\text{arc tang}\, p - a\int\frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$x = C_1 - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}\text{arc tang}\, p,$$

$$y = C_2 - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{a}{\sqrt{1+p^2}}\text{arc tang}\, p.$$

6°. $$a\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\frac{d^2y}{dx^2}},\quad \text{ou}\quad aqdq = dx\sqrt{1+q^2},$$

$$x = C_1 + a\sqrt{1+q^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = \int qdx = \int\frac{aq^2dq}{\sqrt{1+q^2}} = \frac{aq}{2}\sqrt{1+q^2} - \frac{a}{2}\,\mathrm{l}\left(q+\sqrt{1+q^2}\right) + C_1,$$

$$y = \frac{a^2q^3}{6} - \frac{a^2}{2}\sqrt{1+q^2}\,\mathrm{l}\left(q+\sqrt{1+q^2}\right) + \frac{a^2}{2}q + aC_1\sqrt{1+q^2} + C_2:$$

l'élimination de q entre ces deux équations donnera l'intégrale cherchée.

7°. $$a\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d^3y}{dx^3},\quad a\frac{dr}{dx} = r,$$

$$x = a\,\mathrm{l}\,r + C_1,\quad y = a^3r + \frac{a^2C_1}{2}\,\mathrm{l}\,r^2 + aC_2\,\mathrm{l}\,r + C_4.$$

8°. $$\frac{d^4y}{dx^4} = a\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2}},\quad x = \frac{2\sqrt{r}}{a} + C_1,$$

$$y = \frac{2r^{\frac{5}{2}}}{3.5.a^3} + \frac{2C_2r}{a^2} + \frac{2C_3\sqrt{r}}{a} + C_4.$$

9°. $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a}{x},\quad dp = \frac{adx}{x},$$

$$p = a\,\mathrm{l}\,x + C_1,\quad y = ax\,\mathrm{l}\,x + C_1x + C_2.$$

10°. $$\frac{ds^2d^2y}{dx^4} = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{b}:$$

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2}$ est constant; par conséquent,

$$dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y = 0,\quad d^2x = -\frac{pdxdp}{1+p^2};$$

5°. $(a^2dy^2 + x^2dx^2)d^2y = nxdx^2dy$, $(a^2p^2 + x^2)dp = npxdx$,

$$(a^2p^2 + x^2)dp = npxdx,$$

équation homogène du quatrième degré, par rapport à x et à p. Faisons $x = pu$, il viendra

$$p = C_1[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}}, \quad x = C_1u[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{2(1-n)}},$$

$$y = px - \int xdp = C_1^2 u[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{n}{1-n}}$$
$$- nC_1^2\int u^2du\,[a^2 + (1-n)u^2]^{\frac{2n-1}{1-n}}.$$

Si $n = 1$, on trouvera

$$x = ap\sqrt{2\,\mathrm{l}\frac{p}{C_1}}, \quad y = ap^2\mathrm{l}.2\,\mathrm{l}\frac{p}{C_1} - a\int pdp\sqrt{2\,\mathrm{l}\frac{p}{C_1}}.$$

6°. $$adxdy^2 + x^2dxd^2y = nxdy\sqrt{dx^4 + a^2d^2y^2},$$

ou

$$ap^2dx^2 + x^2dp = npx\sqrt{dx^2 + a^2dp^2},$$

ou

$$ap^2 + qx^2 = npx\sqrt{1 + a^2q^2},$$

équation homogène par rapport à p et à x. En posant $p = zx$, on aura

$$\frac{dp}{dx} = q = \frac{az^2 + nz\sqrt{1 - n^2a^2z^2 + a^2z^4}}{n^2a^2z^2 - 1},$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{q - z} = \frac{dz}{z}\,\frac{n^2a^2z^2 - 1}{1 + az - n^2a^2z^2 + n\sqrt{1 - n^2a^2z^2 + a^4z^4}}$$
$$= \frac{dz}{z}\,\frac{1 + az - n^2a^2z^2 - n\sqrt{1 - n^2a^2z^2 + a^4z^4}}{n^2 - 1 - 2az + (n^2-1)a^2z^2};$$

on obtiendra p et q à l'aide des équations

$$p = zx, \quad y = \int pdx = \int zxdx.$$

Supposons qu'on ait $n^2 = 2$, $n = \sqrt{2}$, on trouvera

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz(1-\sqrt{2})}{z} + \frac{adz(3 - 2\sqrt{2})}{1 - az},$$

$$\mathrm{l}\,x = (1-\sqrt{2})\,\mathrm{l}\,z - (3 - 2\sqrt{2})\,\mathrm{l}\,(1 - z^2) + C_1,$$

$$xz^{\sqrt{2}-1}(1 - az)^{3-2\sqrt{2}} = C_1.$$

7°. $$dx^2dy - xds^2d^2y = adxds\sqrt{d^2x^2 + d^2y^2};$$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ est considéré comme constant : on aura

$$d^2s = 0, \quad d^2x = -\frac{pqdx^2}{1+p^2}, \quad d^2y = \frac{qdx^2}{1+p^2}, \quad p - xq = aq;$$

en différentiant, on a

$$- x dq = a dq, \quad \text{d'où} \quad dq = 0,$$

$$q = \frac{1}{C_1}, \quad p = \int q dx = \frac{x + a}{C_1}, \quad y = \int p dx = \frac{x^2 + 2ax}{2C_1} + C_2.$$

8°. $$dx^2 dy - x ds^2 d^2y = \frac{b dx^4 ds^2 d^2y}{\sqrt{dx^4 + a^2 ds^4 d^2y^2}};$$

s est encore pris pour variable indépendante : on arrivera à l'équation

$$p - qx = \frac{bq}{\sqrt{1 + a^2 q^2}};$$

différentiant, on trouvera

$$- x dq = \frac{b dq}{\sqrt{(1 + a^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}},$$

d'où

$$dq = 0, \quad q = \frac{1}{C_1},$$

ou

$$x = \frac{-b}{\sqrt{(1 + a^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}},$$

et

$$p = \frac{x}{C_1} + \frac{b}{\sqrt{C_1^2 + a^2}}, \quad y = \int p dx = \frac{x^2}{2C_1} + \frac{bx}{\sqrt{C_1^2 + a^2}} + C_2.$$

La valeur $x = -\frac{b}{(1 + a^2 q^2)^{\frac{3}{2}}}$ donnerait

$$y = -\frac{b^2 q (1 + 2a^2 q^2)}{2(1 + a^2 q^2)^2} - \frac{b^2 q}{8(1 + a^2 q^2)} + \frac{3b^2 q}{16(1 + a^2 q^2)} + \frac{3b^2}{16a} \operatorname{arc\,tang} aq + C';$$

en éliminant q entre les deux équations, on arrivera à une intégrale nouvelle qui ne sera qu'une intégrale particulière.

9°. $$abd^2y = dx\sqrt{y^2 dx^2 + a^2 dy^2}, \quad abq = \sqrt{y^2 + a^2 p^2} = \frac{abp dp}{dy},$$

équation homogène par rapport à y et p. Posons $y = pz$, on aura

$$\frac{dy}{y} = \frac{ab dz}{abz - z^2\sqrt{a^2 + z^2}};$$

et, en faisant $\sqrt{a^2 + z^2} = tz$, $z^2 = \frac{a^2}{t^2 - 1}$, $\frac{dz}{z} = -\frac{t dt}{t^2 - 1}$,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{bt dt}{bt^2 - at - b} = -\frac{t dt}{t^2 - 2nt - 1},$$

en posant $\frac{a}{b} = 2n$; donc

$$\frac{2dy\sqrt{n^2+1}}{y} = -\frac{dt(n+\sqrt{n^2+1})}{t-n-\sqrt{n^2+1}} + \frac{dt(n-\sqrt{n^2+1})}{t-n+\sqrt{n^2+1}},$$

$$y^{2\sqrt{n^2+1}} = \frac{C_1\left(t-n+\sqrt{n^2+1}\right)^{n-\sqrt{n^2+1}}}{\left(t-n-\sqrt{n^2+1}\right)^{n+\sqrt{n^2+1}}}.$$

On remontera de la valeur $y=f(t)=\mathrm{T}$ à celle de x, au moyen des équations

$$z = \frac{a}{\sqrt{t^2-1}}, \quad p = \frac{\mathrm{T}\sqrt{t^2-1}}{a}, \quad dx = \frac{a d\mathrm{T}}{\mathrm{T}\sqrt{t^2-1}} = -\frac{atdt}{(t^2-2nt-1)\sqrt{t^2-1}}.$$

10°. $$\frac{(dy^2+y^2dx^2)^{\frac{3}{2}}}{2dy^2dx+y^2dx^2-yd^2ydx} = ny, \quad \frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2+y^2-qy} = ny,$$

$dy(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 2np^2ydy + ny^2dy - ny^2pdp$, équation homogène par rapport à p et à y. On fera encore $p = zy$, et l'on aura

$$y^3dy(z^2+1)^{\frac{3}{2}} = 2nz^2y^2dy + ny^3dy - nz^2y^3dy - nzy^3dz,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{nzdz}{(z^2+1)\sqrt{1+z^2} - nz^2 - n} = \frac{nzdz}{(z^2+1)\left(n-\sqrt{1+z^2}\right)}.$$

Dans le cas où $n = 1$, on a

$$\frac{dy}{y} = -\frac{zdz}{(z^2+1)\left(\sqrt{z^2+1}-1\right)} = \frac{dz\left(1+\sqrt{1+z^2}\right)}{z(z^2+1)}$$

et

$$dx = \frac{dz\left(1+\sqrt{1+z^2}\right)}{z^2(z^2+1)};$$

or

$$\int \frac{dz}{z(z^2+1)} = 1\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}, \quad \int \frac{dz}{z^2(z^2+1)} = -\frac{1}{z} - \text{arc tang } z,$$

$$\int \frac{dz}{z\sqrt{z^2+1}} = 1\frac{\sqrt{z^2+1}-z}{z}, \quad \int \frac{dz}{z^2\sqrt{z^2+1}} = -\frac{\sqrt{z^2+1}}{z}.$$

Donc

$$y = C_1\frac{\sqrt{z^2+1}-1}{\sqrt{z^2+1}} = C_1\left(1-\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}\right),$$

$$x = C_2 - \frac{1-\sqrt{z^2+1}}{z} - \text{arc tang } z, \quad \frac{1}{\sqrt{z^2+1}} = 1 - \frac{y}{a},$$

$$z = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{a-y}, \quad x = C_2 - \frac{\sqrt{2a-y}}{y} - \text{arc cos}\frac{a-y}{a};$$

ou, en faisant arc cos $\frac{a-y}{a}=\varphi$,

$$y=a(1-\cos\varphi),\qquad x=\xi-\varphi-\cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

11°.
$$\frac{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{2p^2+y^2-qy}=a.$$

Posons $p^2+y^2=z^2$; d'où

$$pdp+ydy=qdy+ydy=zdz$$

et

$$q+y=\frac{zdz}{dy},\qquad z^2dy=2az\,dy-aydz,$$

$$y^2=\frac{C_1z}{2a-z},\quad \text{et en faisant } y^2=t,\quad dx=\frac{(C_1+t)\,dt}{2t\sqrt{4a^2t-(C_1+t)^2}}.$$

Posons encore

$$t=2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1},$$

il viendra

$$dx=-\frac{a\left(a+\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1}\right)d\varphi}{2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1}},$$

$$2dx=-d\varphi-\frac{C_1d\varphi}{2a^2-C_1+2a\cos\varphi\sqrt{a^2-C_1}}:$$

en intégrant, et posant

$$m=\frac{2a\sqrt{a^2-C_1}}{2a^2-C_1},\ \text{d'où } C_1=\frac{2a^2\sqrt{1-m^2}}{1+\sqrt{1-m^2}},\ \sqrt{a^2-C_1}=\frac{ma}{1+\sqrt{1-m^2}},$$

on aura

$$2x=\xi-\varphi-\text{arc cos}\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi},\qquad y^2=\frac{2a^2(1+m\cos\varphi)}{1+\sqrt{1-m^2}}.$$

Cette équation donne

$$\cos\varphi=\frac{y^2\left(1+\sqrt{1-m^2}\right)-2a^2}{2ma^2},$$

$$\frac{m+\cos\varphi}{1+m\cos\varphi}=\frac{y^2\left(1+\sqrt{1-m^2}\right)-2a^2(1-m^2)}{my^2\left(1+\sqrt{1-m^2}\right)},$$

et, en faisant

$$b=\frac{a\left(1-\sqrt{1-m^2}\right)}{m},\qquad y^2=a^2+b^2+2ab\cos\varphi,$$

$$m=\frac{2ab}{a^2+b^2},\qquad \sqrt{1-m^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}.$$

$$2x = \xi - \varphi - \text{arc cos}\,\frac{2ab + (a^2 + b^2)\cos\varphi}{a^2 + b^2 + ab\cos\varphi}$$

$$= \xi - \varphi - \text{arc sin}\,\frac{(a^2 - b^2)\sin\varphi}{y^2}.$$

12°. $d^2y\,(ydy + adx) = dy\,(dx^2 + dy^2)$,

$$dp\,(py + a) = dy\,(1 + p^2),\quad dy - \frac{pydp}{1+p^2} = \frac{adp}{1+p^2};$$

intégrant,

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C_1,\qquad y = ap + C_1\sqrt{1+p^2},$$

et

$$x = \int\frac{dy}{p} = a\text{l}p + C_1\text{l}\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + C_2.$$

Si l'on faisait $C_1 = 0$, on obtiendrait l'intégrale particulière

$$y = ap,\quad \text{et}\quad x = a\text{l}p + C',\quad y = C'e^{\frac{x}{a}}.$$

Si l'on faisait, au contraire, $C_1 = a$, à cause de $p + \sqrt{1+p^2} = \frac{y}{a}$ et $p = \frac{y^2 - a^2}{2ay}$, il viendrait

$$x = a\text{l}\frac{y^2 - a^2}{2a} + C'\quad \text{ou}\quad y^2 = a^2 + C'e^{\frac{x}{a}}.$$

13°. $dy^2 - yd^2y = n\sqrt{dx^2dy^2 + a^2d^2y^2}$, $p^2 - qy = n\sqrt{p^2 + a^2q^2}$;

faisons

$$q = pz\quad \text{ou}\quad p\frac{dp}{dy} = pz,\quad dp = zdy,$$

il viendra

$$p^2 - pzy = np\sqrt{1 + a^2z^2},\quad p - zy = n\sqrt{1 + a^2z^2};$$

différentiant et remarquant que $dp = zdy$, on trouvera

$$-ydz = \frac{na^2zdz}{\sqrt{1 + a^2z^2}},$$

d'où

$$dz = 0\quad \text{ou}\quad y = -\frac{na^2z}{\sqrt{1 + a^2z^2}}.$$

La première équation donne

$$z = C_1,\quad p = C_1y + C_2,\quad dx = \frac{dy}{C_1y + C_2},\quad C_1x = \text{l}(C_1y + C_2);$$

la seconde équation donnerait

$$p = zy + n\sqrt{1+a^2z^2} = \frac{n}{\sqrt{1+a^2z^2}},$$

$$dx = \frac{dy}{p} = -\frac{a^2dz}{1+a^2z^2}, \quad x = -a \text{ arc tang } az + C_1,$$

et parce que $$z = \frac{y}{a\sqrt{n^2a^2-y^2}},$$

$$\frac{C_1 - x}{a} = \text{arc tang} \frac{y}{\sqrt{n^2a^2-y^2}} = \text{arc sin} \frac{y}{na}; \quad y = na \sin\frac{b-x}{a}.$$

259. III. Équations homogènes.

Une équation différentielle est homogène lorsque, en considérant les variables x, y, et leurs différentielles dx, dy, d^2y, comme des facteurs du premier degré, tous les termes de l'équation sont du même degré. Ainsi, par exemple, l'équation $x^2d^2y + xdx^2 + ydy^2 = 0$ est homogène, parce que tous les termes sont du troisième degré. Mais si dx, dy, d^2y sont considérés comme des facteurs du premier degré, p, qui est égal à $\frac{dy}{dx}$, sera du degré 0, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ sera du degré -1, etc.; donc, si l'on ramène l'équation à ne plus contenir que $x, y, p, q, \ldots$, pour qu'elle soit homogène, il faudra qu'en accordant respectivement à ces quantités les degrés 1, 0, $-1, \ldots$, tous les termes de l'équation soient encore du même degré. On en conclura que si l'on fait $y = zx$, $q = \frac{t}{x}, \ldots$, tous les termes contiendront x à la même puissance. Cette variable disparaîtra donc, et sa disparition est précisément le caractère distinctif des équations homogènes. L'intégration de semblables équations du second ordre se ramène toujours à l'intégration d'une équation du premier ordre. En effet, puisqu'en posant $y = zx$, $q = \frac{t}{x}$, x disparaît, l'équation résultante renfermera les trois seules quantités z, t et p, et par conséquent une de ces trois quantités pourra toujours s'exprimer au moyen des deux autres. Mais, des deux équations $dy = pdx$, $zdx + xdz = dy$, on tire

$$zdx + xdz = pdx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z};$$

on a aussi

$$dp = q\,dx = \frac{t}{x}dx;$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\frac{dx}{x}$, on aura

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{t} \quad \text{ou} \quad tdz = pdp - zdp,$$

$$2x = \xi - \varphi - \text{arc cos}\,\frac{2ab + (a^2 + b^2)\cos\varphi}{a^2 + b^2 + ab\cos\varphi}$$

$$= \xi - \varphi - \text{arc sin}\,\frac{(a^2 - b^2)\sin\varphi}{y^2}.$$

12°. $d^2y\,(ydy + adx) = dy\,(dx^2 + dy^2)$,

$$dp\,(py + a) = dy\,(1 + p^2), \quad dy - \frac{pydp}{1+p^2} = \frac{adp}{1+p^2};$$

intégrant,

$$\frac{y}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} + C_1, \quad y = ap + C_1\sqrt{1+p^2},$$

et

$$x = \int\frac{dy}{p} = a\mathrm{l}p + C_1\mathrm{l}\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + C_2.$$

Si l'on faisait $C_1 = 0$, on obtiendrait l'intégrale particulière

$$y = ap, \quad \text{et} \quad x = a\mathrm{l}p + C', \quad y = C'e^{\frac{x}{a}}.$$

Si l'on faisait, au contraire, $C_1 = a$, à cause de $p + \sqrt{1+p^2} = \frac{y}{a}$ et $p = \frac{y^2 - a^2}{2ay}$, il viendrait

$$x = a\mathrm{l}\frac{y^2 - a^2}{2a} + C' \quad \text{ou} \quad y^2 = a^2 + C'e^{\frac{x}{a}}.$$

13°. $dy^2 - yd^2y = n\sqrt{dx^2dy^2 + a^2d^2y^2}, \quad p^2 - qy = n\sqrt{p^2 + a^2q^2};$

faisons

$$q = pz \quad \text{ou} \quad p\frac{dp}{dy} = pz, \quad dp = zdy,$$

il viendra

$$p^2 - pzy = np\sqrt{1 + a^2z^2}, \quad p - zy = n\sqrt{1 + a^2z^2};$$

différentiant et remarquant que $dp = zdy$, on trouvera

$$-ydz = \frac{na^2zdz}{\sqrt{1 + a^2z^2}},$$

d'où

$$dz = 0 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{na^2z}{\sqrt{1 + a^2z^2}}.$$

La première équation donne

$$z = C_1, \quad p = C_1y + C_2, \quad dx = \frac{dy}{C_1y + C_2}, \quad C_1x = \mathrm{l}(C_1y + C_2);$$

la seconde équation donnerait

$$p = zy + n\sqrt{1+a^2z^2} = \frac{n}{\sqrt{1+a^2z^2}},$$

$$dx = \frac{dy}{p} = -\frac{a^2dz}{1+a^2z^2}, \quad x = -a \text{ arc tang } az + C_1,$$

et parce que

$$z = \frac{y}{a\sqrt{n^2a^2-y^2}},$$

$$\frac{C_1 - x}{a} = \text{arc tang}\frac{y}{\sqrt{n^2a^2-y^2}} = \text{arc sin}\frac{y}{na}; \quad y = na\sin\frac{b-x}{a}.$$

259. III. Équations homogènes.

Une équation différentielle est homogène lorsque, en considérant les variables x, y, et leurs différentielles dx, dy, d^2y, comme des facteurs du premier degré, tous les termes de l'équation sont du même degré. Ainsi, par exemple, l'équation $x^2d^2y + xdx^2 + ydy^2 = 0$ est homogène, parce que tous les termes sont du troisième degré. Mais si dx, dy, d^2y sont considérés comme des facteurs du premier degré, p, qui est égal à $\frac{dy}{dx}$, sera du degré 0, $q = \frac{d^2y}{dx^2}$ sera du degré -1, etc.; donc, si l'on ramène l'équation à ne plus contenir que $x, y, p, q, \ldots$, pour qu'elle soit homogène, il faudra qu'en accordant respectivement à ces quantités les degrés $1, 0, -1, \ldots$, tous les termes de l'équation soient encore du même degré. On en conclura que si l'on fait $y = zx$, $q = \frac{t}{x}, \ldots$, tous les termes contiendront x à la même puissance. Cette variable disparaîtra donc, et sa disparition est précisément le caractère distinctif des équations homogènes. L'intégration de semblables équations du second ordre se ramène toujours à l'intégration d'une équation du premier ordre. En effet, puisqu'en posant $y = zx$, $q = \frac{t}{x}$, x disparaît, l'équation résultante renfermera les trois seules quantités z, t et p, et par conséquent une de ces trois quantités pourra toujours s'exprimer au moyen des deux autres. Mais, des deux équations $dy = pdx$, $zdx + xdz = dy$, on tire

$$zdx + xdz = pdx, \quad \frac{dx}{x} = \frac{dz}{p-z};$$

on a aussi

$$dp = q\,dx = \frac{t}{x}dx;$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t}.$$

En égalant ces deux valeurs de $\frac{dx}{x}$, on aura

$$\frac{dz}{p-z} = \frac{dp}{t} \quad \text{ou} \quad tdz = pdp - zdp,$$

équation du premier ordre que l'on intégrera d'après les procédés connus, au moins par approximation. Cette équation sera réellement intégrable à l'aide de simples quadratures, 1° si t est une fonction homogène de p et de z, car alors l'équation sera homogène et du premier degré; 2° si t est une fonction quelconque de p, parce qu'alors l'équation est du premier ordre, et du premier degré, par rapport à z : mise sous la forme

$$dz + z\frac{dp}{t} = \frac{pdp}{t},$$

elle a pour intégrale

$$e^{\int \frac{dp}{t}} z = \int e^{\int \frac{dp}{t}} \frac{pdp}{t};$$

3° si t est fonction quelconque de la différence $p - z$; car, en faisant $p - z = u$, t deviendra fonction de u, et, à cause de $p = z + u$, l'équation $tdz = pdp - zdp$ deviendra

$$tdz = udu + udt,$$

d'où

$$dz = \frac{udu}{t - u}, \quad z = \int \frac{udu}{t - u}:$$

l'intégration est ramenée à une simple quadrature; 4° si, en posant toujours $p - z = u$, et désignant par P, Q, R des fonctions quelconques de u, on avait $t = u + \frac{Pu}{Qz + Rz^n}$, car alors l'équation devient

$$Pdz = Qzdu + Rz^n du,$$

et on sait l'intégrer; 5° si, en désignant par M, N des fonctions quelconques de z, on a

$$t = u + Mu^2 + Nu^n;$$

car l'équation devient alors

$$Mudz + Nu^{n-1}dz = du.$$

En général, comme l'équation

$$tdz = pdp - zdp$$

peut se mettre sous la forme

$$udu = (t - u)dz,$$

on aura

$$t = u + Su,$$

si, en désignant par S une fonction des deux variables u et z, l'équation $du = Sdz$ est intégrable.

Exemples :

1°. $$x^2d^2y = xdxdy + 3ydx^2, \quad \text{ou} \quad x^2q = xp + 3y;$$

faisons

$$y = zx, \quad q = \frac{t}{x},$$

d'où

$$\frac{dx}{x} = \frac{dp}{t} = \frac{dp}{p+3z} = \frac{dz}{p-z},$$

$$(p+3z)dz = pdp - zdp, \quad p = z + \sqrt{4z^2 + C_1},$$

$$lx = \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}l\,\frac{2z + \sqrt{4z^2 + C_1}}{C_2} = \frac{1}{2}l\,\frac{z + \sqrt{C' + z^2}}{C_2},$$

$$x^2 = \frac{z + \sqrt{C' + z^2}}{C_2} = \frac{y + \sqrt{C'x^2 + y^2}}{C_2x}, \quad y = C_2x^3 - \frac{C'}{x}.$$

2°. $$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{mx^2dy^2 + ny^2dx^2};$$

les mêmes substitutions donneront

$$dz\sqrt{mp^2 + nz^2} = (p-z)\,dp,$$

et, en faisant $p = zs$,

$$\frac{dz}{z} = \frac{(s-1)ds}{\sqrt{ms^2+n} - s^2 + s}.$$

3°. $$nx^2d^2y = (ydx - xdy)^2;$$

les mêmes transformations donneront

$$ndp = (p-z)\,dz,$$

et, en faisant $p - z = u$, on trouvera

$$dz - \frac{ndu}{u-n} = 0, \quad x = \frac{u-n}{C_1u},$$

$$y = nx\,l\,\frac{u-n}{C_2} = nx\,l\,\frac{nC_1x}{C_2(1-C_1x)}.$$

4°. $$(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} = ndxd^2y\sqrt{x^2+y^2};$$

on trouvera

$$(1+p^2)^{\frac{3}{2}}dz = n(p-z)\,dp\sqrt{1+z^2},$$

Pour intégrer cette équation, posons

$$p = \operatorname{tang}\alpha, \quad z = \operatorname{tang}\beta,$$

on aura

$$d\alpha = \frac{d\alpha - d\beta}{1 - n\sin(\alpha - \beta)} = \frac{d\gamma}{1 - n\sin\gamma},$$

si $\gamma = \alpha - \beta$, et

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{p - z} = \frac{d\beta\cos\alpha}{\cos\beta\sin\gamma} = \frac{(\cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma)\,d\beta}{\cos\beta\sin\gamma}$$
$$= \frac{\cos\gamma\,d\beta}{\sin\gamma} - \frac{\sin\beta\,d\beta}{\cos\beta} = \frac{n\cos\gamma\,d\beta}{1 - n\sin\gamma} - \frac{\sin\beta\,d\beta}{\cos\beta},$$

puisque

$$d\beta = \frac{n\sin\gamma\,d\gamma}{1 - n\sin\gamma},$$

donc

$$x = \frac{C_1\cos\beta}{1 - n\sin\gamma}, \quad y = \frac{C_1\sin\beta}{1 - n\sin\gamma}, \quad \beta = \int \frac{n\,d\gamma}{1 - n\sin\gamma}.$$

260. IV. Équation différentielle qui devient homogène quand on y considère y comme ayant n dimensions, et, par conséquent, p et q comme des quantités de degrés $n - 1$, $n - 2$. On peut ramener une semblable équation au premier ordre; en effet, si l'on pose alors

$$y = x^n z, \quad p = x^{n-1} t, \quad q = x^{n-2} u,$$

à cause de $dy = p\,dx$, $dp = q\,dx$, on aura

$$x\,dz + nz\,dx = t\,dx, \quad x\,dt + (n - 1)\,t\,dx = u\,dx,$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - nz} = \frac{dt}{u - (n - 1)t}, \quad dz\,[u - (n - 1)t] = (t - nz)\,dt;$$

mais, par hypothèse, si dans l'équation proposée on substitue à y, p, q leurs valeurs en z, t, u, x disparaît de l'équation résultante, qui ne contiendra, par conséquent, que z, t, u : de cette équation on tirera la valeur de u, pour la substituer dans l'équation du premier ordre entre z et t. L'intégration s'achèvera alors par les procédés connus. On remontera d'ailleurs facilement de la valeur de t en z à celles de x et de y.

Exemples :

1°. $$x^2 d^2y = ay\,dx^2 + bx\,dx\,dy, \quad \text{ou} \quad qx^2 = ay + bpx :$$

ici $n = 0$; faisons

$$p = \frac{t}{x}, \quad q = \frac{u}{x^2},$$

il viendra

$$u = ay + bt;$$

l'équation différentielle

$$dz\,[u - (n - 1)t] = (t - nz)\,dt$$

deviendra

$$ay\,dy + (b + 1)\,t\,dy = t\,dt.$$

Faisons $t = yz$, il viendra

$$a dy + (b+1)\, z dy = yz dz + z^2 dy,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{z dz}{a + (b+1) z - z^2};$$

en posant

$$a + (b+1) z - z^2 = (\alpha + z)(\beta - z),$$

on aura

$$\alpha\beta = a, \quad \beta - \alpha = b + 1,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta} dz}{\alpha + z} + \frac{\frac{\beta}{\alpha+\beta} dz}{\beta - z},$$

$$1 y = C_1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta} 1(\alpha + z) - \frac{\beta}{\alpha+\beta} 1(\beta - z),$$

ou

$$y(\alpha + z)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} (\beta - z)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} = C_1;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{(\alpha + z)(\beta - z)},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\alpha + z} + \frac{1}{\alpha+\beta} \frac{dz}{\beta - z},$$

$$x = C_2 \left(\frac{\alpha + z}{\beta - z}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}, \quad \frac{\alpha + z}{\beta - z} = \left(\frac{x}{C_2}\right)^{\alpha+\beta}, \quad z = \frac{\beta x^{\alpha+\beta} - \alpha C_2^{\alpha+\beta}}{C_2^{\alpha+\beta} + x^{\alpha+\beta}};$$

substituant et posant $\frac{C_1}{\alpha+\beta} = C'$,

$$y = C' \left(\frac{C_2^\alpha}{x^\alpha} + \frac{x^\alpha}{C_2^\beta}\right).$$

2°. $$x^4 d^2 y = x^3 dx dy + 2xy dx dy - 4y^2 dx^2,$$

ou

$$x^4 q = x^3 p + 2xyp - 4y^2:$$

ici $n = 2$; posons

$$y = x^2 z, \quad p = xt, \quad q = u = q,$$

il viendra

$$u = t + 2zt - 4z^2;$$

l'équation différentielle en z et t sera

$$2z dz (t - 2z) = dt (t - 2z),$$

d'où

$$t = 2z, \quad \text{ou} \quad t = z^2 + C_1.$$

1°. Si $t = 2z$, à cause de $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{t - 2z}$, on devra avoir

$$dz = 0, \quad z = C', \quad y = C'x^2.$$

2°. Si $t = z^2 + C_1$, $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2 - 2z + C_1}$. Suivant que la constante C_1 sera égale à 1, à $1 - C_1$, à $1 + C_1$, on trouvera

$$1\frac{x}{C_1} = \frac{1}{1 - z} = \frac{x^2}{x^2 - y}, \quad x^2 = (x^2 - y)\,1\frac{x}{C'},$$

$$\text{ou} \quad 1x = -\frac{1}{2C'}1\frac{C' + z - 1}{C' - z + 1} + C'', \quad x = C_1\left[\frac{(C+1)x^2 - y}{(C-1)x^2 + y}\right]^{\frac{1}{2C}},$$

ou

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{(z - 1)^2 + C_1},$$

$$1\frac{x}{C_2} = \frac{1}{C_1}\operatorname{arc\,tang}\frac{z - 1}{C_1}, \quad \frac{z - 1}{C_1} = \frac{y - x^2}{C_1 x^2} = \operatorname{tang.} C_1 1\frac{x}{C_2}.$$

261. V. Équation dans laquelle la variable y et ses différentielles dy, d^2y, ont partout la même dimension ; une semblable équation du second dre pourra encore, dans ce cas, être ramenée au premier. En effet, si l'on pose, comme à l'ordinaire,

$$dy = pdx, \quad dp = qdx,$$

les quantités y, p, q auront les mêmes dimensions dans l'équation transformée; et, en faisant $p = uy$, $q = vy$, y entrera à la même puissance dans tous les termes et disparaîtra. L'équation résultante ne renfermera plus que x, u et v, et l'on pourra en tirer la valeur de v, par exemple, en x et u. Des deux équations

$$p = uy, \quad dp = qdx,$$

on tire d'ailleurs

$$dy = uydx, \quad udy + ydu = vydx;$$

par conséquent

$$\frac{dy}{y} = u\,dx, \quad \frac{dy}{y} = \frac{vdx - du}{u},$$

$$du + u^2dx = vdx.$$

Il ne restera donc qu'à substituer pour v, dans cette équation du premier ordre, sa valeur en u et x, pour intégrer et obtenir la valeur de u en fonction de x; on déterminera ensuite y, et l'intégrale cherchée au moyen de l'équation

$$1y = \int u\,dx, \quad y = e^{\int u\,dx}.$$

L'équation

$$du + u^2\,dx = v\,dx,$$

quand on pose

$$v = u^2 + V,$$

devient

$$du = V\,dx$$

et sera intégrable, 1° si $V = \frac{X}{U}$, X désignant une fonction de x et U une fonction de u; 2° si V est une fonction homogène de degré nul de x et de u; 3° si l'on a $V = X_1 u + X_2 u^n$, X_1, X_2 étant des fonctions de x; 4° si U_1, U_2 étant des fonctions de u, on a

$$V = \frac{1}{U_1 x + U_2 x^n}.$$

Exemple. $\alpha y d^2 y + 6dy^2 = \frac{y\,dx\,dy}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, $\alpha y q + 6 p^2 = \frac{py}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

en faisant $p = uy$, $q = vy$, il vient

$$\alpha v + 6u^2 = \frac{u}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad v = \frac{u}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{6u^2}{\alpha},$$

$$du + u^2 dx = \frac{u\,dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{6u^2 dx}{a};$$

ou, en posant $u = \frac{1}{s}$,

$$ds + \frac{s\,dx}{\alpha\sqrt{a^2 + x^2}} = \left(1 + \frac{6}{\alpha}\right) dx;$$

multipliant par $(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}$ et intégrant, on trouve

$$s(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{6}{\alpha}\right)\int dx(x + \sqrt{a^2 + x^2})^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Faisons encore

$$x + \sqrt{a^2 + x^2} = t^\alpha,$$

d'où

$$a^2 = t^{2\alpha} - 2t^\alpha x,$$

$$x = \frac{t^{2\alpha} - a^2}{2t^\alpha} = \tfrac{1}{2}t^\alpha - \tfrac{1}{2}a^2 t^{-\alpha}, \quad dx = \frac{\alpha}{2}dt\left(t^{\alpha-1} + a^2 t^{-\alpha-1}\right),$$

$$st = \left(1 + \frac{6}{\alpha}\right)\int \frac{\alpha}{2}\left(t^\alpha + a^2 t^{-\alpha}\right)dt, \quad st = C_1 + \frac{\alpha + 6}{2}\left(\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + a^2\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right);$$

mais $\frac{dy}{y} = udx = \frac{dx}{s}$, et l'on a

$$\frac{dx}{s}\left(1+\frac{6}{\alpha}\right) = \frac{ds}{s} + \frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}},$$

donc

$$\left(1+\frac{6}{\alpha}\right) ly = ls + \frac{1}{\alpha} l\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) = l.st + C_2, \quad y = C'(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+6}},$$

et, en posant $C_1 = \frac{\alpha+6}{2} C''$,

$$y = C'\left(C'' + \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \frac{a^2 t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+6}},$$

et, parce que $t = \left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$C_1 y^{\frac{\alpha+6}{\alpha}} = A + \frac{1}{\alpha+1}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + \frac{a^2}{1-\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

On intégrerait plus facilement cette équation ramenée à la forme

$$\alpha yq + 6p^2 = \frac{py}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

en la multipliant par $\frac{dx}{yp}$: en effet, à cause de $qdx = dp$, $pdx = dy$, on trouvera ainsi

$$\frac{\alpha dp}{p} + \frac{6dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$p^{\alpha} y^{6} = C^{\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right), \quad y^{\frac{6}{\alpha}} dy = Cdx\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

une seconde intégration ramènera à l'équation déjà trouvée.

La forme générale des équations qu'on peut intégrer de cette manière est

$$Pdp + Ydy + Xdx = 0 \quad \text{ou} \quad Pq + Yp + X = 0,$$

P, Y, X étant respectivement des fonctions de p seul, de y seul, de x seul.

Exemple : $xy\, d^2y = ydx\, dy + xdy^2 + \frac{bx\, dy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ou

$$xyq = yp + xp^2 + \frac{bxp^2}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

en faisant $p = uy$, $q = vy$, on a

$$du + u^2 dx = u\frac{dx}{x} + u^2 dx + \frac{bu^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$C_1 - \frac{x}{u} = -b\sqrt{a^2 - x^2},\quad u = \frac{x}{C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et, posant $\sqrt{a^2 - x^2} = t$, d'où $xdx = -tdt$,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{tdt}{C_1 + bt},\quad \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{b} + \frac{C_1\,dt}{b(C_1 + bt)},$$

$$\mathrm{l}y = -\frac{t}{b} + \frac{C_1}{b^2}\,\mathrm{l}\,(C_1 + bt) + \mathrm{l}C'',$$

et, en faisant $C_1 = C'b^2$,

$$\mathrm{l}\frac{y}{C''} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + C'\,\mathrm{l}\,\frac{C'b + \sqrt{a^2 - x^2}}{b}.$$

262. VI. Il ne sera pas inutile de donner au moins un exemple d'intégration à l'aide d'un facteur indéterminé. Considérons avec Euler l'équation

$$d^2y + \frac{aydx^2}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2} = 0;$$

essayons de rendre le premier membre intégrable en multipliant par

$$2X_1\,dy + 2X_2\,ydx,$$

X_1, X_2 étant des fonctions de x, et représentons par

$$X_1\,dy^2 + 2X_2\,ydx\,dy + Udx^2 = Cdx^2,$$

U étant une fonction de y et de x, l'intégrale du produit

$$2d^2y\,(X_1dy + X_2ydx) + \frac{2aydx^2\,(X_1\,dy + X_2\,ydx)}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2};$$

on devra dès lors avoir

$$dy^2(dX_1 + 2X_2\,dx) + 2ydx\,dX_2\,dy + dx^2dU - \frac{2aydx^2(X_1dy + X_2ydx)}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2} = 0.$$

Cette équation ne pourra donner par l'intégration la valeur de U qu'autant que l'on aura

$$dX_1 + 2X_2\,dx = 0,$$

on aura alors

$$dU = \frac{ay\,(2X_1\,dy - ydX_1)}{(by^2 + c + 2dx + ex^2)^2} - 2y\,dy\frac{dX_2}{dx};$$

le second membre est la différentielle par rapport à y de l'expression

$$\frac{-aX_1}{b(by^2 + c + 2dx + ex^2)} - y^2\frac{dX_2}{dx};$$

mais $\frac{dy}{y} = udx = \frac{dx}{s}$, et l'on a

$$\frac{dx}{s}\left(1+\frac{6}{\alpha}\right)=\frac{ds}{s}+\frac{dx}{\alpha\sqrt{a^2+x^2}},$$

donc

$$\left(1+\frac{6}{\alpha}\right)\mathrm{l}y=\mathrm{l}s+\frac{1}{\alpha}\mathrm{l}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)=\mathrm{l}.st+C_2,\quad y=C'(st)^{\frac{\alpha}{\alpha+6}},$$

et, en posant $C_1 = \frac{\alpha+6}{2}C''$,

$$y=C'\left(C''+\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}+\frac{a^2t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+6}},$$

et, parce que $t=\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$C_1y^{\frac{\alpha+6}{\alpha}}=\mathrm{A}+\frac{1}{\alpha+1}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}+\frac{a^2}{1-\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}.$$

On intégrerait plus facilement cette équation ramenée à la forme

$$\alpha yq+6p^2=\frac{py}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

en la multipliant par $\frac{dx}{yp}$: en effet, à cause de $qdx=dp$, $pdx=dy$, on trouvera ainsi

$$\frac{\alpha dp}{p}+\frac{6dy}{y}=\frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$p^{\alpha}y^{6}=C^{\alpha}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right),\quad y^{\frac{6}{\alpha}}dy=Cdx\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)^{\frac{1}{\alpha}};$$

une seconde intégration ramènera à l'équation déjà trouvée.

La forme générale des équations qu'on peut intégrer de cette manière est

$$\mathrm{P}dp+\mathrm{Y}dy+\mathrm{X}dx=0\quad\text{ou}\quad \mathrm{P}q+\mathrm{Y}p+\mathrm{X}=0,$$

P, Y, X étant respectivement des fonctions de p seul, de y seul, de x seul.

Exemple : $xy\,d^2y=ydx\,dy+xdy^2+\frac{bx\,dy^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ou

$$xyq=yp+xp^2+\frac{bxp^2}{\sqrt{a^2-x^2}};$$

en faisant $p = uy$, $q = vy$, on a

$$du + u^2 dx = u\frac{dx}{x} + u^2 dx + \frac{bu^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{xdu - udx}{u^2} = \frac{bx\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$C_1 - \frac{x}{u} = -b\sqrt{a^2 - x^2},\quad u = \frac{x}{C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}},\quad \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{C_1 + b\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et, posant $\sqrt{a^2 - x^2} = t$, d'où $xdx = -tdt$,

$$\frac{dy}{y} = -\frac{tdt}{C_1 + bt},\quad \frac{dy}{y} = -\frac{dt}{b} + \frac{C_1\,dt}{b(C_1 + bt)},$$

$$\mathrm{l}y = -\frac{t}{b} + \frac{C_1}{b^2}\,\mathrm{l}\,(C_1 + bt) + \mathrm{l}C'',$$

et, en faisant $C_1 = C'b^2$,

$$\mathrm{l}\frac{y}{C''} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{b} + C'\,\mathrm{l}\,\frac{C'b + \sqrt{a^2 - x^2}}{b}.$$

262. VI. Il ne sera pas inutile de donner au moins un exemple d'intégration à l'aide d'un facteur indéterminé. Considérons avec Euler l'équation

$$d^2y + \frac{\mathrm{a}y\,dx^2}{(\mathrm{b}y^2 + \mathrm{c} + 2\mathrm{d}x + \mathrm{e}x^2)^2} = 0;$$

essayons de rendre le premier membre intégrable en multipliant par

$$2X_1\,dy + 2X_2\,ydx,$$

X_1, X_2 étant des fonctions de x, et représentons par

$$X_1\,dy^2 + 2X_2\,ydx\,dy + \mathrm{U}dx^2 = C\,dx^2,$$

U étant une fonction de y et de x, l'intégrale du produit

$$2d^2y\,(X_1dy + X_2ydx) + \frac{2\mathrm{a}y\,dx^2\,(X_1\,dy + X_2\,ydx)}{(\mathrm{b}y^2 + \mathrm{c} + 2\mathrm{d}x + \mathrm{e}x^2)^2};$$

on devra dès lors avoir

$$dy^2(dX_1 + 2X_2\,dx) + 2ydx\,dX_2\,dy + dx^2d\mathrm{U} - \frac{2\mathrm{a}y\,dx^2(X_1dy + X_2ydx)}{(\mathrm{b}y^2 + \mathrm{c} + 2\mathrm{d}x + \mathrm{e}x^2)^2} = 0.$$

Cette équation ne pourra donner par l'intégration la valeur de U qu'autant que l'on aura

$$dX_1 + 2X_2\,dx = 0,$$

on aura alors

$$d\mathrm{U} = \frac{\mathrm{a}y\,(2X_1\,dy - y\,dX_1)}{(\mathrm{b}y^2 + \mathrm{c} + 2\mathrm{d}x + \mathrm{e}x^2)^2} - 2y\,dy\frac{dX_2}{dx};$$

le second membre est la différentielle par rapport à y de l'expression

$$\frac{-\mathrm{a}X_1}{\mathrm{b}(\mathrm{b}y^2 + \mathrm{c} + 2\mathrm{d}x + \mathrm{e}x^2)} - y^2\frac{dX_2}{dx};$$

on aura donc

$$U=\frac{-aX_1}{b(by^2+c+2dx+ex^2)}-y^2\frac{dX_2}{dx},$$

pourvu que la différentielle du second membre, prise en considérant y comme constante, soit nulle ou que l'on ait

$$\frac{-adX_1(by^2+c+2dx+ex^2)+2aX_1dx(d+ex)}{b(by^2+c+2dx+ex^2)^2}-y^2\frac{d^2X_2}{dx}$$
$$=-\frac{ay^2dX_1}{(by^2+c+2dx+ex^2)^2};$$

or on satisfera à cette équation en posant

$$\frac{d^2X_2}{dx^2}=0,\quad -dX_1(c+2dx+ex^2)+2X_1dx(d+ex)=0.$$

Il reste à savoir si ces deux conditions sont compatibles avec celle que nous avons déjà trouvée, $dX_1+2X_2dx=0$; or la seconde donne

$$X_1=c+2dx+ex^2,$$

d'où

$$X_2=-\frac{dX_1}{2dx}=-d-ex,\quad \text{et}\quad \frac{d^2X_2}{dx^2}=0.$$

Les deux conditions s'accordent, et le facteur cherché est donc

$$2dy(c+2dx+ex^2)-2ydx(d+ex),$$

et conduit à l'intégrale

$$\frac{dy^2}{dx^2}(c+2dx+ex^2)-2y\frac{dy}{dx}(d+ex)-\frac{a(c+2dx+ex^2)}{b(by^2+c+2dx+ex^2)}+ey^2=C_1,$$

ou, en ajoutant $\frac{a}{b}$ aux deux membres,

$$\frac{dy^2}{dx^2}(c+2dx+ex^2)-2y\frac{dy}{dx}(d+ex)+\frac{ay^2}{by^2+c+2dx+ex^2}+ey^2=C'.$$

Si l'on faisait

$$c+2dx+ex^2=bz^2,$$

d'où

$$d+ex=\frac{bz\,dz}{dx},$$

l'équation qui précède deviendrait

$$\frac{bz^2dy^2}{dx^2}-\frac{2byz\,dy\,dz}{dx^2}+ey^2+\frac{ay^2}{b(y^2+z^2)}=\frac{C}{b},$$

et, en posant $y=uz$,

$$\frac{bz^4du^2}{dx^2}-\frac{bu^2z^2dz^2}{dx^2}+eu^2z^2+\frac{au^2}{b(1+u^2)}=\frac{C}{b};$$

mais

$$\frac{z^2 dz^2}{dx^2} = \frac{(d + ex)^2}{b^2},$$

donc

$$\frac{bz^4 du^2}{dx^2} + \frac{ce - d^2}{b} u^2 = \frac{C + (C - a) u^2}{b(1 + u^2)},$$

ou

$$\frac{b^2 z^4 du^2}{dx^2} = \frac{C + (C - a + d^2 - ce) u^2 + (d^2 - ce) u^4}{1 + u^2},$$

et, en substituant pour z sa valeur,

$$\frac{dx}{c + 2dx + ex^2} = \frac{du\sqrt{1 + u^2}}{\sqrt{C + (C - a + d^2 - ce) u^2 + (d^2 - ce) u^4}};$$

les variables sont séparées, u est exprimé en x; on a d'ailleurs

$$y = uz = u\sqrt{\frac{c + 2dx + ex^2}{b}}.$$

Si dans l'équation proposée on fait

$$c + 2dx + ex^2 = bz^2,$$

elle devient

$$d^2 y + \frac{ay dx^2}{b^2 (y^2 + z^2)^2} = 0,$$

et, en posant $y = uz$,

$$z d^2 u + 2dz du + u d^2 z + \frac{au dx^2}{b^2 z^3 (1 + u^2)^2} = 0.$$

Le facteur qui la rend intégrable est $2b(z^2 dy - yz dz)$ ou $2bz^3 du$, ou simplement $z^3 du$: or, comme on a

$$dz = \frac{dx(d + ex)}{bz},$$

on aura

$$d^2 z = \frac{e dx^2}{bz} - \frac{dx dz (d + ex)}{bz^2} = \frac{e dx^2}{bz} - \frac{dx^2 (d + ex)^2}{b^2 z^3} = \frac{(ce - d^2) dx^2}{b^2 z^3},$$

$$z^3 d^2 z = \frac{ce - d^2}{b^2} dx^2.$$

L'équation, multipliée par $z^3 du$, devient dès lors

$$z^4 du d^2 u + 2z^3 dz du^2 + \frac{ce - d^2}{b^2} u du dx^2 + \frac{au du dx^2}{b^2 (1 + u^2)^2} = 0;$$

elle a évidemment pour intégrale immédiate

$$\tfrac{1}{2} z^4 du^2 + \frac{ce - d^2}{2b^2} u^2 dx^2 - \frac{a dx^2}{2b^2 (1 + u^2)} = \tfrac{1}{2} C_1 dx^2;$$

on en tire

$$z^2 du = dx\sqrt{C_1 + \frac{d^2 - ce}{b^2}u^2 + \frac{a}{b^2(1+u^2)}};$$

et parce que la valeur de z étant donnée en x, les variables sont immédiatement séparables, la seconde intégration est facile. Remarquons que la valeur de z satisfait à la condition $z^3 d^2 z = \frac{ce - d^2}{b^2} dx^2 = \alpha dx^2$, qui doit s'accorder avec l'équation

$$c + 2dx + ex^2 = bz^2.$$

Et en effet, de la condition $z^3 d^2 z = \alpha dx^2$ on tire

$$2dzd^2z = \frac{2\alpha dx^2 dz}{z^3}, \quad dz^2 = \beta dx^2 - \frac{\alpha dx^2}{z^2}, \quad dx = \frac{zdz}{\sqrt{\beta z^2 - \alpha}},$$

$$\beta x + \gamma = \sqrt{\beta z^2 - \alpha}, \quad \beta z^2 = \alpha + \gamma^2 + 2\beta\gamma x + \beta^2 x^2.$$

Exemple : l'équation

$$d^2 y + \frac{a^2 y dx^2}{(y^2 + x^2)^2} = 0$$

devient intégrable si on la multiplie par le facteur $2x^2 dy - 2yxdx$; son intégrale est

$$x^2 \frac{dy^2}{dx^2} - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 + \frac{a^2 y^2}{y^2 + x^2} = b^2.$$

En posant $y = ux$, on arriverait à la transformée

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{du\sqrt{1+u^2}}{\sqrt{b^2 + (b^2 - a^2)u^2}}.$$

263. VII. Empruntons à M. Liouville deux exemples remarquables d'intégrations obtenues, l'une par un procédé qui pourra souvent être employé, l'autre par une voie complétement détournée.

1°. Considérons l'équation

$$D_x^2 y + f(x) D_x y + F(y) D_x y^2 = 0,$$

et supposons un instant que le troisième terme n'existant pas, l'équation à intégrer soit

$$D_x^2 y + f(x) D_x y = 0,$$

on en tirerait

$$D_x y = Ce^{-\int f(x)\,dx}.$$

Revenons maintenant à l'équation proposée, et voyons si, en changeant la constante C en une fonction de y, on ne pourrait pas, dans le cas où $F(y)$ n'est pas nul, conserver à la dérivée première la même forme

$D_x y = Ce^{-\int f(x)\,dx}$. En différentiant, on trouvera

$$D_x^2 y = e^{-\int f(x)\,dx}\,[D_y C D_x y - C f(x)],$$

ou, en mettant pour $e^{-\int f(x)\,dx}$, sa valeur tirée de l'équation

$$D_x y = Ce^{-\int f(x)\,dx},$$

$$D_x^2 y = -f(x) D_x y + \frac{1}{C} D_y C\, D_x y^2.$$

En substituant cette valeur de $D_x^2 y$ dans l'équation proposée, on a

$$\frac{1}{C} D_y C + F(y) = 0;$$

et, en intégrant,

$$C = C' e^{-\int F(y)\,dy}.$$

On a, par suite,

$$D_x y = C' e^{-\int F(y)\,dy}\, e^{-\int f(x)\,dx},$$

équation où les variables se séparent d'elles-mêmes et qui conduit à l'intégrale cherchée,

$$\int e^{\int F(y)\,dy}\,dy = C' \int e^{-\int f(x)\,dx}\,dx + C''.$$

On serait arrivé à la même intégrale si, en supposant un instant $f(x) = 0$, on avait pris pour équation auxiliaire

$$D_x^2 y + F(y) D_x y^2 = 0.$$

En posant $D_x y = y'$, et observant que $D_x^2 y = y' D_y y'$, on aurait eu

$$D_y y' + y' F(x) = 0,$$

et, en intégrant,

$$y' = D_x y = Ce^{-\int F(y)\,dy};$$

puis, en regardant C comme une fonction de x,

$$D_x^2 y = -F(y) D_x y^2 + \frac{1}{C} D_x C\, D_x y:$$

de sorte qu'en substituant dans l'équation donnée, il viendrait

$$\frac{1}{C} D_x C + f(x) = 0, \quad C = C' e^{\int f(x)\,dx},$$

$$D_x y = C' e^{-\int F(y)\,dy}\, e^{-\int f(x)\,dx}, \quad \text{etc.}$$

2°. Supposons qu'on connaisse l'intégrale $y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, d'une équation différentielle quelconque de l'ordre n

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y) = f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0.$$

L'intégrale y et ses n dérivées y', y'', ..., $y^{(n)}$, dépendent non-seulement de x, mais des n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. La variable x, au contraire, est complétement indépendante de ces constantes, de sorte qu'en différentiant la fonction f par rapport à l'une de ces quantités, c_1 par exemple, on aura

$$D_y f D_{c_1} y + D_{y'} f D_{c_1} y' + D_{y''} f D_{c_1} y'' + \ldots + D_{y^{(n)}} f D_{c_1} y^{(n)} = 0;$$

or, si l'on pose $D_{c_1} y = z$, z étant une nouvelle variable, on aura

$$D_{c_1} y' = D_x z, \quad D_{c_1} y'' = D_x^2 z, \ldots, \quad D_{c_1} y^{(n)} = D_x^n z;$$

en effet,

$$D_{c_1} y' = D_{c_1} . D_x y = D_x . D_{c_1} y = D_x z,$$
$$D_{c_1} y'' = D_{c_1} . D_x y' = D_x . D_{c_1} y' = D_x^2 z,$$

et ainsi de suite. En substituant pour $D_{c_1} y$, $D_{c_1} y'$, ..., leurs valeurs, on trouvera

$$z D_y f + D_x z D_{y'} f + D_x^2 z D_{y''} f + \ldots + D_x^n z D_{y^{(n)}} f = 0,$$

équation dans laquelle y, y', y'', ..., $y^{(n)}$, étant des fonctions de x déterminées par l'équation

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

$D_y f$, $D_{y'} f$, ..., $D_{y^{(n)}} f$, doivent être considérées comme des fonctions connues de x, c_1, c_2, ..., c_n. Or, cette équation est une équation linéaire et homogène entre z et ses n dérivées; et l'on sait qu'elle doit être satisfaite par la valeur $z = D_{c_1} y$, puisque l'on est parvenu à cette équation en faisant précisément $D_{c_1} y = z$; de plus, ce que l'on a dit de c_1 on aurait pu le dire de c_2, c_3, ..., c_n; donc l'équation

$$z D_y f + D_x z D_{y'} f + D_x^2 z D_{y''} f + \ldots + D_x^n z D_{y^{(n)}} f = 0$$

est vérifiée par les n valeurs particulières

$$z = D_{c_1} y, \quad z = D_{c_2} y, \ldots, \quad z = D_{c_n} y,$$

et a par conséquent pour intégrale générale

$$y = C' D_{c_1} y + C'' D_{c_2} y + C''' D_{c_3} y + \ldots + C^{(n)} D_{c_n} y.$$

264. VIII. **Intégration de quelques équations simultanées.** 1°. M. Binet est parvenu, à l'aide des transformations les plus ingénieuses, à intégrer le système suivant d'équations du second ordre

$$D_t^2 x = D_x R,\quad D_t^2 y = D_y R,\quad D_t^2 z = D_z R,\ldots;$$

t est la variable indépendante, $x, y, z,\ldots$ sont les variables dépendantes, R est une fonction déterminée de la quantité $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2+\ldots}$, en sorte que

$$D_x R = \frac{x}{r} D_r R,\quad D_y R = \frac{y}{r} D_r R, \text{ etc.};$$

les équations proposées deviennent dès lors

$$D_t^2\, x = \frac{x}{r} D_r R,\quad D_t^2\, y = \frac{y}{r} D_r R,\quad D_t^2\, z = \frac{z}{r} D_r R,\ldots.$$

En les combinant deux à deux pour éliminer $D_r R$, on trouvera

$$xD_t^2 y - y D_t^2 x = 0,\quad z D_t^2 x - x D_t^2 z = 0,\quad y D_t^2 z - z D_t^2 x = 0,\ldots,$$

d'où l'on tire les intégrales premières en nombre $\dfrac{n(n-1)}{1.2}$,

$$xD_t y - y D_t x = C_1,\quad z D_t x - x D_t z = C_2,\quad y D_t z - z D_t x = C_3,\ldots$$

La somme des carrés de ces équations donnera

$$\begin{aligned}(xD_t y - yD_t x)^2 &+ (zD_t x - xD_t z)^2 + (yD_t z - zD_t x)^2 + \ldots\\ =(x^2+y^2+z^2+\ldots)&(D_t x^2+D_t y^2+D_t z^2+\ldots)-(xD_t x+yD_t y+zD_t z+\ldots)^2\\ &= A^2.\end{aligned}$$

En multipliant respectivement par dx, dy, dz,... les équations proposées, ajoutant et intégrant, on trouvera

$$D_t x^2 + D_t y^2 + D_t z^2 + \ldots = 2(R+B),$$

et par suite, en substituant,

$$(xD_t x + yD_t y + zD_t z + \ldots)^2 = 2r^2(R+B) - A^2;$$

mais

$$xD_t x + yD_t y + zD_t z + \ldots = rD_t r,$$

donc

$$r^2 D_t r^2 = 2r^2(R+B) - A^2,\quad dt = \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

$$D_t r^2 = 2R + 2B - \frac{A^2}{r^2},\quad D_t^2\, r = D_r R + \frac{A^2}{r^3}.$$

On peut, à l'aide de cette formule, éliminer $D_r R$ de la première des

équations données $D_t^2 x = \frac{x}{r} D_r R$, on trouve ainsi

$$rD_t^2 x - xD_t^2 r = D_t (rD_t x - xD_t r) = D_t . r^2 D_t \frac{x}{r} = -\frac{A^2}{r^2}\frac{x}{r},$$

et, en multipliant par $\frac{r^2}{A^2}$,

$$\frac{r^2}{A} D_t . \frac{r^2}{A} D_t \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0;$$

cette dernière équation prend une forme plus simple quand on fait

$$A\frac{dt}{r^2} = d\varphi = \frac{A\,dr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}};$$

elle devient, en effet,

$$D_\varphi^2 . \frac{x}{r} + \frac{x}{r} = 0;$$

on aura, de la même manière,

$$D_\varphi^2 . \frac{y}{r} + \frac{y}{r} = 0, \quad D_\varphi^2 . \frac{z}{r} + \frac{z}{r} = 0, \ldots;$$

ces équations s'intègrent séparément, et, en désignant par $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ des constantes arbitraires en nombre $2n$, on aura

$$\frac{x}{r} = a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi, \quad \frac{y}{r} = a_2 \cos\varphi + b_2 \sin\varphi, \quad \frac{z}{r} = a_3 \cos\varphi + b_3 \sin\varphi \ldots;$$

l'équation

$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}$$

donne d'ailleurs

$$t + \alpha = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}},$$

et comme R dépend uniquement de r, on aura r en fonction de $t + \alpha$: φ, à son tour, sera donné en fonction de r, et, par suite, en fonction de $t + \alpha$, au moyen de l'équation

$$\varphi + 6 = \int \frac{A\,dr}{r\sqrt{2r^2(R+B) - A^2}}.$$

En remontant ensuite aux formules qui donnent les valeurs de $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, .., les n variables seront exprimées elles-mêmes au moyen de $t + \alpha$, de A, B, et des $2n$ constantes $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$, c'est-à-dire que dans ces expressions il entrerait, en apparence, $2n + 4$ arbitraires, qui devront être liées entre elles par plusieurs équations, car le problème n'admet que $2n$ constantes arbitraires. Et, en effet, si l'on substitue pour $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, ... leurs

valeurs dans l'équation

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}+\ldots=1,$$

on trouve, en employant pour abréger une notation connue,

$$\cos^2\varphi\Sigma a_1^2+\sin^2\varphi\Sigma b_1^2+2\sin\varphi\cos\varphi\,\Sigma a_1 b_1=1,$$

et cette équation, qui doit avoir lieu pour toute valeur de φ, entraîne les trois suivantes

$$\Sigma a_1^2=1,\quad \Sigma b_1^2=1,\quad \Sigma a_1 b_1=0;$$

la constante 6, d'ailleurs, se confond avec a_1, b_1, qu'elle modifie seulement, car

$$a_1\cos(\varphi+6)+b_1\sin(\varphi+6)=a'\cos\varphi+b'\sin\varphi;$$

donc les $2n+4$ constantes apparentes, réduites d'abord à $2n+3$, qui sont B, A, α, a_1, $b_1,\ldots$, sont liées entre elles par trois équations, et ne forment en réalité que $2n$ constantes arbitraires.

Les deux intégrales

$$\int\frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},\quad \int\frac{dr}{r\sqrt{2r^2(R+B)-A^2}},$$

qui semblent étrangères l'une à l'autre, et indépendantes, peuvent cependant être ramenées à une origine commune. En effet, supposons que R soit une fonction de r, déterminée par l'équation

$$R=\int\frac{dr}{r}\sqrt{2r^2(R+B)-A^2},$$

il est évident qu'on aura

$$t+\alpha=D_B R,\quad \varphi+6=-D_A R;$$

les deux intégrales sont donc, au signe près, les deux dérivées partielles de la fonction R, de laquelle seule dépendent les variables x, y, $z,\ldots$.

Il résulte de ce que nous venons d'établir, que l'équation

$$D_t^2 x=D_r R.\frac{x}{r},$$

transformée successivement en

$$\frac{r^2}{A}D_t.\frac{r^2}{A}D_t\frac{x}{r}+\frac{x}{r}=0,$$

et

$$D_\varphi^2.\frac{x}{r}+\frac{x}{r}=0,$$

a pour intégrale générale

$$x = r(a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi).$$

a_1, b_1 sont les deux constantes arbitraires. Afin de donner un exemple, supposons $R = \frac{m}{r}$; l'équation à intégrer sera $D_t^2 x + \frac{mx}{r^3} = 0$, r étant donné en fonction de t par l'équation

$$t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2\left(\frac{m}{r} + B\right) - A^2}},$$

ou, en posant $B = -\frac{m}{a}$, $A^2 = ma(1 - e^2)$,

$$t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{\frac{m}{a}\,[a^2 e^2 - (a - r)^2]}};$$

faisons encore

$$a - r = ae\cos\psi, \quad \text{ou} \quad r = a(1 - e\cos\psi),$$

ψ étant une nouvelle quantité auxiliaire, on aura

$$t + \alpha = \int \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{m}}(1 - e\cos\psi)\,d\psi, \quad \psi - e\sin\psi = (t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}},$$

$$d\varphi = \frac{A}{r^2}\,dt = \frac{\sqrt{ma(1 - e^2)}\,a^{\frac{3}{2}}(1 - e\cos\psi)d\psi}{a^2\sqrt{m}\,(1 - e\cos\psi)^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}\,d\psi}{1 - e\cos\psi},$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{1 + e}}{\sqrt{1 - e}}\tan\frac{\psi}{2}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\psi - e}{1 - e\cos\psi} = \frac{a(\cos\psi - e)}{r},$$

$$\sin\varphi = \frac{a\sin\psi\sqrt{1 - e^2}}{r}, \quad x = aa_1(\cos\psi - e) + ab_1\sin\psi\sqrt{1 - e^2}.$$

On n'aura plus qu'à remplacer ψ par sa valeur en t pour obtenir l'intégrale cherchée, mais il faudrait pour cela résoudre l'équation transcendante

$$\psi - e\sin\psi = (t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}}.$$

On peut obtenir plus facilement la valeur de t en x : posons

$$aa_1 = c\cos\gamma, \quad ab_1\sqrt{1 - e^2} = c\sin\gamma,$$

c et γ étant deux nouvelles arbitraires, on aura

$$\cos(\psi - \gamma) = e\cos\gamma + \frac{x}{c}, \quad \psi = \gamma + \text{arc}\cos\left(\frac{x}{c} + e\cos\gamma\right),$$

$$(t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}} = \gamma + \text{arc}\cos\left(\frac{x}{c} + e\cos\gamma\right) - e\sin\gamma\left(\frac{x}{c} + e\cos\gamma\right) - e\cos\gamma\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c} + e\cos\gamma\right)^2}.$$

Il sera facile de faire disparaître de cette dernière équation l'arc cos en l'isolant dans un seul membre et prenant les cosinus des deux membres. Le résultat sera l'intégrale générale de l'équation du second ordre

$$D_t^2 x + \frac{mx}{r^3} = 0,$$

r étant une fonction de t donnée par les deux formules

$$r = a(1 - e\cos\psi), \quad \psi - e\sin\psi = (t + \alpha)\sqrt{\frac{m}{a^3}}.$$

Remarque. Si A^2 devenait négatif, φ serait imaginaire; dans ce cas, néanmoins, l'équation différentielle s'intègre encore. On a alors

$$t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2(R+B) + A^2}},$$

ou

$$t + \alpha = \int \frac{rdr}{\sqrt{2r^2 R + A^2}};$$

en comprenant la constante B dans R, on en conclut successivement

$$D_t r^2 = 2R + \frac{A^2}{r^2}, \quad D_t^2 r = D_r R - \frac{A^2}{r^3},$$

$$rD_t^2 x - xD_t^2 r - \frac{A^2}{r^3}\frac{x}{r} = 0, \quad \frac{r^2}{A^2} D_t . r^2 D_t \frac{x}{r} - \frac{x}{r} = 0,$$

et, en posant

$$d\varphi = \frac{A\,dt}{r^2} = \frac{A\,dr}{r\sqrt{2r^2 R + A^2}},$$

$$D_\varphi^2 . \frac{x}{r} - \frac{x}{r} = 0, \quad \frac{x}{r} = a_1 e^{\varphi} + b_1 e^{-\varphi}.$$

On serait arrivé au même résultat en passant du réel à l'imaginaire, et remplaçant r par $r\sqrt{-1}$, R par $R\sqrt{-1}$, φ par $\varphi\sqrt{-1}$, les quantités $\sin(\varphi\sqrt{-1})$, $\cos(\varphi\sqrt{-1})$ par des exponentielles imaginaires.

Scolie. Lorsque leur nombre ne surpasse pas trois, les équations que nous avons intégrées se rapportent au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe, par une force dont l'expression est $D_r R$. L'intégration de l'équation $D_t^2 x + \frac{mx}{r^3} = 0$ renferme toute la théorie du mouvement elliptique.

268. 2°. Considérons les équations

$$M_1 D_t^{m_1} y + M_2 D_t^{m_2} y + M_3 D_t^{m_3} y + \ldots = T_1,$$

$$N_1 D_t^{n_1} y + N_2 D_t^{n_2} y + N_3 D_t^{n_3} y + \ldots = T_2,$$

que l'on peut mettre sous la forme très-simple

$$\Sigma \mathrm{MD}_t^m y = \mathrm{T}_1, \quad \Sigma \mathrm{N}\,\mathrm{D}_t^n y = \mathrm{T}_2,$$

et dans laquelle T_1 et T_2 sont des fonctions quelconques de la variable indépendante t, et de une ou de plusieurs autres variables ainsi que de leurs dérivées. Si les coefficients M_1, M_2, M_3,..., N_1, N_2, N_3,..., sont constants, il suffira, pour éliminer y et ses dérivées, d'écrire, à la place de y, T_2 dans le premier membre de la première équation, T_1 dans le premier membre de la seconde, et d'égaler les résultats, en sorte que l'équation finale sera

$$\Sigma \mathrm{MD}_t^m \mathrm{T}_2 = \Sigma \mathrm{ND}_t^n \mathrm{T}_1.$$

En effet, si l'on différentie tour à tour la première équation n_1 fois, n_2 fois, n_3 fois, etc., on aura

$$\Sigma \mathrm{MD}_t^{m+n_1} y = \mathrm{D}_t^{n_1}\mathrm{T}_1, \quad \Sigma \mathrm{M}\,\mathrm{D}_t^{m+n_2} y = \mathrm{D}_t^{n_2}\mathrm{T}_1,$$

$$\Sigma \mathrm{MD}_t^{m+n_3} y = \mathrm{D}_t^{n_3}\mathrm{T}_1, \ldots$$

Multiplions respectivement ces équations par N_1, N_2, N_3,..., et ajoutons, l'équation résultante pourra évidemment se mettre sous la forme

$$\Sigma \mathrm{MD}_t^m \left(\mathrm{N}_1\mathrm{D}_t^{n_1} y + \mathrm{N}_2\mathrm{D}_t^{n_2} y + \mathrm{N}_3\mathrm{D}_t^{n_3} y + \ldots\right) = \mathrm{N}_1\mathrm{D}_t^{n_1}\mathrm{T}_1 + \mathrm{N}_2\mathrm{D}_t^{n_2}\mathrm{T}_1 + \ldots,$$

ou, en vertu de la seconde des équations données,

$$\Sigma \mathrm{M}\,\mathrm{D}_t^m \mathrm{T}_2 = \Sigma \mathrm{N}\,\mathrm{D}_t^n \mathrm{T}_1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si les deux équations proposées sont linéaires en x et en y, et ne contiennent que les deux variables, et la variable indépendante t, on pourra former à volonté, par le moyen précédent, l'équation finale en y ou en x, et, chose remarquable, ces deux équations finales différeront seulement par le terme fonction de t qui ne contiendra que cette variable. Il en résultera que les valeurs de x et de y seront de la forme

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + \ldots,$$

$$y = C' e^{\lambda_1 t} + C'' e^{\lambda_2 t} + C''' e^{\lambda_3 t},$$

C_1, C_2,... étant des fonctions de t, que l'on saura déterminer par les méthodes connues, dans chaque cas particulier ; et les quantités λ_1, λ_2, λ_3,... étant données par une équation commune.

Si l'on avait m équations entre $m+1$ variables à coefficients constants pour toutes ces variables, moins une, qui sera la variable indépendante, il suffira, pour éliminer trois d'entre elles, d'ordonner le premier membre de chaque équation, par rapport à ses dérivées, après avoir fait pas-

ser toutes les autres dans le second membre ; on comparera ensuite l'une quelconque de ces équations avec les $m - 1$ autres. On formera ainsi $m - 1$ couples d'équations entre lesquelles on éliminera la variable en question, comme il a été dit ci-dessus, et l'on n'aura plus que $m - 1$ équations entre m variables. En continuant de la même manière, on arrivera à une équation entre deux variables seulement ; on conçoit qu'il sera dès lors facile de remplacer les m équations proposées par m autres équations dans chacune desquelles entreront seulement la variable indépendante et l'une des autres variables qu'il s'agit de déterminer.

On peut conclure, *à priori,* l'ordre de l'équation finale, si, par exemple, on a m équations du premier ordre ; le procédé indiqué conduira à $m - 1$ équations du second ordre, à $m - 2$ équations du troisième ordre, à $m - (m - 1)$, ou à une équation du $m^{ième}$ ordre : et, en général, si m, n, p,... sont les plus forts indices de différentiation pour chaque variable, $m + n + p$ sera le nombre indiquant l'ordre de chaque équation finale. Cette méthode d'élimination a été donnée, pour la première fois, par M. Favre-Rollin.

constantes; mais on verra qu'alors, pour arriver à la valeur des autres variables dépendantes, il faudra effectuer certaines intégrations qui compléteront le nombre indispensable de constantes. Supposons, par exemple, qu'on donne à intégrer les trois équations

$$D_t x = y + z, \quad D_t y = x + z, \quad D_t z = y - x,$$

on tirera de la première

$$D_t^2 x = D_t y + D_t z = y + z,$$

et l'on sera dispensé de différentier une seconde fois, parce que l'on élimine immédiatement y et z entre les deux équations

$$D_t x = y + z, \quad D_t^2 x = y + z,$$

qui donnent pour équation finale

$$D_t^2 x = D_t x,$$

qui est du second ordre seulement, et qui a pour intégrale

$$x = C_1 + C_2 e^t.$$

Cette intégrale ne renferme que deux constantes; mais aussi, pour déterminer les deux autres variables, on n'aura qu'une seule équation, $C_2 e^t = y + z$, qui ne suffira pas: on en tirera

$$z = C_2 e^t - y,$$

et, en substituant pour x et z leurs valeurs dans l'équation $D_t y = x + z$, on aura

$$D_t y = C_1 + 2C_2 e^t - y.$$

Pour intégrer cette équation linéaire, il suffit de multiplier par e^t. On trouve, de cette manière,

$$y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t},$$

et l'on voit apparaître la troisième constante. Les trois

intégrales

$$x = C_1 + C_2 e^t, \quad y = C_1 + C_2 e^t + C_3 e^{-t},$$
$$z = -C_1 - C_3 e^{-t},$$

ont toute la généralité voulue.

Supposons maintenant que les n équations données renferment avec la variable indépendante t, x et ses m' premières dérivées, y et ses m'' premières dérivées, z et ses m''' premières dérivées, etc., et que l'on ait

$$m' + m'' + m''' + \ldots = m,$$

on pourra les ramener au premier ordre à l'aide des équations connues

$$D_t x = x', \quad D_t x' = x'', \ldots, \quad D_t x^{(m'-2)} = x^{(m'-1)},$$
$$D_t y = y', \ldots, \quad D_t z = z', \ldots,$$

et l'on aura à intégrer un système de $m + n$ équations simultanées du premier ordre que l'on ramènera à l'intégration d'une seule équation de l'ordre $m + n$.

268. Lorsque aucune des méthodes par lesquelles nous avons appris jusqu'ici à intégrer les équations différentielles ne réussit, on essaye l'intégration par série. Exposons en peu de mots cette nouvelle méthode, qui ne doit être employée qu'avec beaucoup de réserve.

Considérons d'abord l'équation différentielle du premier ordre $dy = f_1(x, y)dx$, et supposons qu'il s'agisse d'exprimer, au moyen d'une série, l'intégrale générale de cette équation, ou une valeur de y qui satisfasse à l'équation proposée, en prenant pour $x = x_0$ une valeur quelconque donnée y_0. L'énoncé même de la question suppose que l'intégrale cherchée est développable en série convergente; et, par conséquent, intégrer par série c'est résoudre tout simplement le problème suivant :

En supposant que la valeur la plus générale de y, qui vérifie l'équation proposée et se réduit à y_0, pour $x = x_0$,

puisse être exprimée au moyen d'une série convergente, déterminer cette série.

Or, la solution de ce problème est très-facile; car, 1° si la série convergente qui donne la valeur de y existe réellement, elle devra coïncider avec celle que donnerait la formule de Taylor; 2° de l'équation

$$dy = f_1(x, y)dx, \quad \text{ou} \quad y' = f_1(x, y),$$

on déduira, par de simples différentiations, les valeurs des dérivées successives de y,

$$y'' = f_2(x, y), \quad y''' = f_3(x, y), \quad y^{\text{iv}} = f_4(x, y), \ldots,$$

et en faisant, dans les équations obtenues, $x = x_0$, $y = y_0$, on aura

$$y'_0 = f_1(x_0, y_0), \quad y''_0 = f_2(x_0, y_0), \quad y'''_0 = f_3(x_0, y_0), \ldots,$$

et par suite, en vertu de la formule de Taylor,

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1} f_1(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^2}{1.2} f_2(x_0, y_0) + \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3} f_3(x_0, y_0) + \ldots$$

Voilà donc la valeur cherchée de y; elle sera admissible si la série du second membre est convergente. Dans ce cas, comme elle satisfait évidemment à l'équation proposée, se réduit à y_0 pour $x = x_0$, et contient une constante arbitraire y_0, ce sera nécessairement l'intégrale générale cherchée. Si l'on peut exprimer en termes finis la somme de la série convergente, on aura, en termes finis, l'intégrale générale de l'équation proposée.

Prenons pour premier exemple l'équation très-simple

$$dy = ay\,dx, \quad y' = ay,$$

on aura

$$y'' = ay' = a^2 y, \quad y''' = a^2 y' = a^3 y, \quad y^{\text{iv}} = a^3 y' = a^4 y, \ldots,$$

$$y'_0 = a y_0, \quad y''_0 = a^2 y_0, \quad y'''_0 = a^3 y_0, \quad y^{\text{iv}}_0 = a^4 y_0, \ldots,$$

$$y = y_0 \left[1 + \frac{a(x - x_0)}{1} + \frac{a^2 (x - x_0)^2}{1.2} + \frac{a^3 (x - x_0)^3}{1.2.3} + \ldots \right].$$

La série du second membre est toujours convergente et a pour somme $y_0 e^{a(x-x_0)}$; on aura donc $y = y_0 e^{a(x-x_0)}$ ou simplement $y = Ce^{ax}$, comme nous le savions déjà.

269. Ce que nous venons de dire s'étend, sans difficulté aucune, à une équation d'ordre quelconque n

$$D_x^n y = f_n(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^{n-1} y).$$

En effet, chercher l'intégrale générale d'une semblable équation, c'est, comme nous l'avons vu, chercher une valeur y qui satisfasse à cette équation, et qui soit telle, de plus, que, pour $x = x_0$, elle et ses $n-1$ dérivées premières $y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}$ prennent des valeurs données $y_0, y'_0, y''_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$. Cela posé, si la série qui exprimera cette valeur cherchée de y est convergente, elle coïncidera nécessairement avec la série que l'on déduirait de la formule de Taylor. D'ailleurs, de l'équation $y^{(n)} = f_n$ on déduira $y^{(n+1)} = f_{n+1}[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}]$, $y^{(n+2)} = f_{n+2}, \ldots$, et en faisant dans ces équations $x = x_0$ et par conséquent $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0, \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, on aura les valeurs $y_0^{(n)}, y_0^{(n+1)}, \ldots$, des dérivées de l'ordre n et des ordres suivants, correspondantes à $x = x_0$; on aura dès lors, en vertu de la formule de Taylor,

$$y = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1} y'_0 + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} y''_0 + \ldots$$
$$+ \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} y_0^{(n-1)} + \frac{(x-x_0)^n}{1.2.3\ldots n} y_0^{(n)} + \ldots.$$

Ce sera l'intégrale cherchée, car cette valeur est admissible, puisque, par hypothèse, la série du second membre est convergente; elle satisfait évidemment à l'équation proposée; elle prend pour $x = x_0$, avec ses $n-1$ premières dérivées, $y, y', y^{(n-1)}$, les valeurs données $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$; ou, ce qui revient au même, elle contient n constantes arbitraires.

Exemple : Considérons l'équation

$$D_x^2 y = y'' = ay,$$

on aura

$$y''' = ay', \quad y^{\text{iv}} = ay'' = a^2 y, \quad y^{\text{v}} = a^2 y', \quad y^{\text{vi}} = a^2 y'' = a^3 y,$$
$$y'''_0 = ay'_0, \quad y^{\text{iv}}_0 = a^2 y_0, \quad y^{\text{v}}_0 = a^2 y'_0, \quad y^{\text{vi}} = a^3 y_0, \ldots,$$

$$y = y_0 + \frac{(x-x_0)y'_0}{1} + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} a y_0 + \frac{(x-x_0)^3}{1.2.3} a y'_0 + \frac{(x-x_0)^4}{1.2.3} a^2 y_0 + \ldots$$
$$= y_0\left[1 + \frac{a(x-x_0)^2}{1.2} + \frac{a^2(x-x_0)^4}{1.2.3.4} + \ldots\right]$$
$$+ y'_0\left[\frac{(x-x_0)}{1} + \frac{a(x-x_0)^3}{1.2.3} + \frac{a^2(x-x_0)^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right].$$

Les deux séries dont se compose le second membre sont convergentes ; elles ont pour somme

$$y_0 \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)} + e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)}}{2}, \quad \frac{y'_0}{a^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)} - e^{-a^{\frac{1}{2}}(x-x_0)}}{2}.$$

En ajoutant ces deux expressions, on aura la valeur de y, qui peut se mettre sous la forme très-simple

$$y = C_1 e^{a^{\frac{1}{2}} x} + C_2 e^{-a^{\frac{1}{2}} x}.$$

Cette même méthode, appliquée à l'équation

$$x D_x^2 y + 2 D_x y + n^2 x y = 0,$$

donnera, pour son intégrale générale,

$$y = \frac{C_1 \sin nx + C_2 \cos nx}{x}.$$

270. A la formule de Taylor on peut substituer la formule de Maclaurin, en donnant à x_0 la valeur particulière 0 ; mais alors il faut bien prendre garde à la valeur correspondante que l'on assigne à y', car cette valeur peut être telle, que quelques-unes des dérivées de y deviennent

infinies ; et alors le développement sera devenu impossible. Ainsi, dans le dernier exemple que nous venons de citer, si l'on fait $x_0 = 0$, et que l'on donne à y, y' les valeurs arbitraires y_0, y'_0, l'équation

$$xD_x^2 y + 2D_x y + n^2 xy = 0,$$

qui se réduit d'abord à $xy'' + 2y'_0 = 0$, ne pourrait être vérifiée qu'autant que l'on supposerait y'' infinie ; mais dès lors on ne pourrait plus recourir à la formule de Maclaurin : il faudrait nécessairement, dans ce cas, admettre que y'_0 est aussi nul. Dans cette hypothèse, de l'équation

$$xD_x^2 y + 2D_x y + n^2 xy = 0,$$

et de ses dérivées successives

$$xD_x^3 y + 3D_x^2 y + n^2 xD_x y + n^2 y = 0,$$
$$xD_x^4 y + 4D_x^3 y + n^2 xD_x^2 y + 2n^2 D_x y = 0,$$
$$xD_x^5 y + 5D_x^4 y + n^2 xD_x^3 y + 3n^2 D_x^2 y = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on tirera

$$y''_0 = -\frac{n^2 y_0}{3}, \quad y'''_0 = 0, \quad y^{\text{IV}}_0 = \frac{n^4 y_0}{5},$$
$$y^{\text{V}}_0 = 0, \quad y^{\text{VI}} = -\frac{n^6 y_0}{7}, \ldots,$$

$$y = y_0 - \frac{x^2}{1.2.3} n^2 y_0 + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} n^4 y_0 - \ldots$$
$$= y_0 \left(1 - \frac{x^2 n^2}{1.2.3} + \frac{x^4 n^4}{1.2.3.4.5} - \ldots\right).$$

Or, le facteur entre parenthèses n'est autre chose que $\frac{\sin nx}{nx}$; donc

$$y = y_0 \frac{\sin nx}{nx} = C_1 \frac{\sin nx}{x}.$$

Cette valeur de y n'est évidemment qu'une intégrale particulière, car elle ne renferme qu'une constante

arbitraire. Mais il est facile de remonter à l'intégrale générale à l'aide d'une méthode que nous avons déjà souvent employée et qui consiste à regarder C_1, non plus comme une constante, mais comme une fonction indéterminée de x. Différentions, en effet, la valeur $y_1 = c_1 \frac{\sin nx}{x}$, en remplaçant C_1 par une variable u_1, et exprimons que cette valeur satisfait encore à l'équation proposée : nous trouverons ainsi, toute réduction faite,

$$D_x^2 u_1 + 2n D_x u_1 \cot nx = 0.$$

En posant $D_x u_1 = v$, cette équation, ramenée au premier ordre, deviendra

$$D_x v + 2nv \cot nx = 0,$$

et donnera

$$v = \frac{C_2}{\sin^2 nx},$$

et, par suite,

$$u_1 = C' + C'' \cot nx, \quad y = \frac{C' \sin nx + C'' \cos nx}{x}:$$

telle est l'intégrale générale cherchée. Si l'on considère à part la seconde intégrale particulière $y_2 = \frac{\cos nx}{x}$, on voit que réellement sa dérivée seconde devient infinie pour $x = 0$, et qu'elle ne pouvait, par conséquent, être développée au moyen de la formule de Maclaurin.

271. Souvent, aux séries de Taylor et de Maclaurin, on substitue les développements obtenus par la méthode des coefficients indéterminés. Cette marche est même quelquefois préférable ; elle est seule admissible lorsque la série qui représente l'intégrale cherchée doit renfermer des puissances négatives de la variable indépendante : on fera, dans ce cas,

$$y = y_0 + a_1(x - x_0)^\alpha + a_2(x - x_0)^{\alpha+1} + a_3(x - x_0)^{\alpha+2} + \ldots,$$

ou, en faisant $x - x_0 = z$, $dx = dz$,

$$y = x_0 + a_1 z^\alpha + a_2 z^{\alpha+1} + a_3 z^{\alpha+2} + \ldots,$$

puis on déterminera les coefficients indéterminés a_1, a_2, $a_3, \ldots$, et l'exposant α, par la condition que la valeur de y satisfera à l'équation proposée et prendra, pour $x = x_0$, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ inclusivement, les valeurs données y_0, $y'_0, \ldots$. Supposons, pour fixer les idées, qu'on demande une valeur de y qui satisfasse à l'équation

$$dy - y dx - bx^m dx = 0,$$

et se réduise à 0 pour $x = 0$. En posant, comme tout à l'heure,

$$y = a_1 z^\alpha + a_2 z^{\alpha+1} + a_3 z^{\alpha+3} + \ldots,$$

on trouvera

$$bz^m - a_1 \alpha z^{\alpha-1} + [a_1 - a_2(\alpha+1)] z^\alpha + [a_2 - a_3(\alpha+2)] z^{\alpha+1} + \ldots = 0.$$

Cette équation devra être vérifiée quel que soit z, et comme b n'est pas nul par hypothèse, il faudra d'abord faire $\alpha - 1 = m$, $\alpha = m + 1$; l'équation devient alors

$$[b - a_1(m+1)] z^m + [a_1 - a_2(m+2)] z^{m+1} + [a_2 - a_3(m+3)] z^{m+2} + \ldots = 0,$$

et entraîne les équations suivantes

$$b - a_1(m+1) = 0, \quad a_1 - a_2(m+2) = 0, \quad a_2 - a_3(m+3) = 0, \ldots,$$

d'où

$$a_1 = \frac{b}{m+1}, \quad a_2 = \frac{b}{(m+1)(m+2)},$$

$$a_3 = \frac{b}{(m+1)(m+2)(m+3)}, \ldots,$$

$$y = \frac{b}{m+1} x^{m+1} \left[1 + \frac{x}{m+2} + \frac{x^2}{(m+2)(m+3)} + \ldots\right].$$

La série du second membre est toujours convergente, puisque le rapport de deux termes consécutifs converge vers la limite o, donc la valeur précédente de y est admissible et remplit toutes les conditions énoncées.

Dans le cas particulier où $m = 0$, l'équation proposée se réduit à $dy - ydx = 0$, et l'intégrale devient

$$y = b\left[x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots\right] = b(e^x - 1),$$

comme cela devait être.

Prenons pour second exemple l'équation déjà traitée

$$D_x^2 y + \frac{2}{x} D_x y + n^2 y = 0,$$

et faisons plus généralement

$$y = ax^\alpha + bx^6 + cx^\gamma + \ldots;$$

il s'agit de déterminer les coefficients a, b, c, d,..., et les exposants α, 6, γ,...; on a

$$D_x y = a\alpha x^{\alpha-1} + b6x^{6-1} + c\gamma x^{\gamma-1} + \ldots,$$
$$D_x^2 y = a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + b6(6-1)x^{6-2} + \ldots,$$

et, en substituant dans l'équation proposée, il vient

$$a\alpha(\alpha+1)x^{\alpha-2} + n^2ax^\alpha + b6(6+1)x^{6-2} + n^2bx^6$$
$$+ c\gamma(\gamma+1)x^{\gamma-2} + n^2cx^\gamma + \ldots = 0.$$

En supposant que les nombres α, 6, γ,... soient rangés par ordre de grandeur, $\alpha - 2$ sera le plus petit des exposants de x dans la dernière équation; et comme d'ailleurs cette équation ne pourra subsister, quel que soit x, sans qu'on égale à o les coefficients des diverses puissances de x, on devra avoir, avant tout,

$$a\alpha(\alpha+1) = 0,$$

et comme a ne peut être nul, il faut que l'on ait

$$\alpha = 0, \quad \text{ou} \quad \alpha = -1.$$

Prenons d'abord $\alpha = -1$. Les deux plus petits exposants qui viennent ensuite sont α et $6 - 2$; ils peuvent être égaux ou inégaux : s'ils sont égaux, le terme $b6(6 + 1)x^{6-2}$, ne pouvant se réduire avec aucun autre, devra être nul de lui-même, ce qui ne pourra être qu'autant que 6 sera égal à 0 ou à -1 : on ne peut faire $6 = -1$, car 6 doit être plus grand que $\alpha = -1$; donc $6 = 0$. On arrivera ainsi aux exposants α et $\gamma - 2$, qu'il faudra égaler, car le terme $n^2 x^\alpha$ ne pouvant s'évanouir séparément, doit se réduire avec un autre : il en résulte

$$\gamma = 1, \quad n^2 a + c\gamma(\gamma + 1) = 0;$$

en continuant de la même manière, on trouvera

$$\delta = 2, \quad n^2 b + d\delta(\delta + 1) = 0,$$
$$\varepsilon = 3, \quad n^2 c + e\varepsilon(\varepsilon + 1) = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les deux premiers coefficients restent indéterminés, comme cela devait être, et serviront de constantes arbitraires ; les autres seront donnés par les équations

$$c = -\frac{n^2 a}{1.2}, \quad d = -\frac{n^2 b}{1.2.3},$$
$$e = \frac{n^4 a}{1.2.3.4}, \quad f = \frac{n^4 b}{1.2.3.4.5},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et l'on aura pour l'intégrale cherchée

$$y = a\left(\frac{1}{x} - \frac{n^2 x}{1.2} + \frac{n^4 x^3}{1.2.3.4} + \dots\right) + b\left(1 - \frac{n^2 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^4}{1.2.3.4} - \dots\right),$$

ou

$$y = a\frac{\cos nx}{x} + b\frac{\sin nx}{nx} = \frac{C'\cos nx + C''\sin nx}{x}.$$

Si, au lieu de faire $\alpha = -1$, on avait fait $\alpha = 0$, on aurait obtenu, au lieu de l'intégrale générale, l'intégrale particulière $y = a\frac{\cos nx}{x}$. Et, en effet, égaler à o le plus petit exposant α, c'est admettre que le développement ne contiendra aucune puissance négative de la variable, et que la dérivée seconde ne peut pas devenir infinie pour $x = 0$; c'est par conséquent exclure formellement la seconde intégrale particulière.

Exemple. Considérons l'équation

$$D_x^2 y = y'' = kx^n y;$$

faisons

$$y = ax^{\alpha} + a_1 x^{\alpha_1} + a_2 x^{\alpha_2} + a_3 x^{\alpha_3} + \ldots;$$

en substituant pour y et $D_x^2 y$ leurs valeurs, on trouvera

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + a_1\alpha_1(\alpha_1-1)x^{\alpha_1-2} + a_2\alpha_2(\alpha_2-1)x^{\alpha_2-2} + \ldots$$
$$= kax^{\alpha+n} + ka_1 x^{\alpha_1+n} + ka_2 x^{\alpha_2+n} + \ldots,$$

et cette dernière équation ne pourra devenir identique qu'autant que l'on aura, en désignant par α_m et a_m un exposant et un coefficient quelconques de la série,

$$\alpha(\alpha-1) = 0, \quad \alpha_m = \alpha + m(n+2), \quad a_m\alpha_m(\alpha_m - 1) = ka_{m-1}:$$

ces trois équations déterminent complétement tous les exposants et les coefficients de la série. On satisfait à la première en faisant $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. A ces deux valeurs correspondent deux séries distinctes, renfermant chacune un coefficient arbitraire, et qui toutes deux vérifient l'équation donnée, dont elles sont des intégrales particu-

lières ; la somme de ces deux séries sera dès lors l'intégrale cherchée, et en désignant par C_1, C_2 deux valeurs du premier coefficient a, resté indéterminé, on aura

$$y = C_1\left[1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{k^2x^{2n+4}}{(n+1)(n+2)(2n+3)(2n+4)} + \ldots\right]$$
$$+ C_2x\left[1 + \frac{kx^{n+2}}{(n+2)(n+3)} + \frac{k^2x^{2n+4}}{(n+2)(n+3)(2n+4)(2n+5)} + \ldots\right].$$

Si $n = -2$, c'est-à-dire si l'équation donnée était

$$D_x^2 y = kx^2,$$

tous les dénominateurs de la série s'évanouiraient ; mais en remontant à l'équation $\alpha_m = \alpha + m(n+2)$, qui détermine un exposant quelconque, on trouvera

$$\alpha_m = \alpha,$$

et par suite

$$y = (a + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots)\, x^\alpha = Ax^\alpha ;$$

cette valeur, substituée dans l'équation

$$D_x^2 y = kx^2,$$

donnerait

$$a\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} + [a_1\alpha(\alpha-1) + ka_1]x^{\alpha-2} + \ldots$$
$$+ [a_2\alpha(\alpha-1) + ka_2]x^{\alpha-2} + \ldots = A[\alpha(\alpha-1)+k]x^{\alpha-2} = 0,$$
$$\alpha(\alpha-1) + k = 0, \quad \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2};$$

en appelant α', α'' ces deux valeurs, et désignant par C', C'' deux valeurs arbitraires attribuées à la quantité A restée indéterminée, on trouverait définitivement

$$y = C'x^{\alpha'} + C''x^{\alpha''}.$$

272. L'équation du second ordre que nous venons d'in-

tégrer peut facilement être ramenée au premier ordre; il suffit pour cela, comme nous l'avons vu, de poser $y=e^{\int z dx}$; on trouve en effet ainsi que l'équation transformée est

$$D_x z + z^2 = kx^n:$$

c'est précisément l'équation de Riccati. Si l'on savait l'intégrer et qu'on pût, par conséquent, en déduire la valeur de z, on déterminerait y à l'aide de l'équation $y=e^{\int z dx}$ ou de la série

$$y = 1 + \int z\,dx + \frac{(\int z\,dx)^2}{1.2} + \frac{(\int z\,dx)^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Réciproquement, comme l'équation de Riccati

$$D_x y + ay^2 = bx^n$$

devient

$$D_x^2 z = abzx^n$$

quand on fait

$$y = \frac{1}{az} D_x z,$$

on pourra l'intégrer au moyen de la série trouvée, qui donnera z, et par suite y, qui se déduit de z par une simple différentiation. L'équation

$$D_x^2 y + \frac{2m}{x} D_x y = by,$$

que l'on déduit immédiatement de l'équation

$$D_x^2 y = kx^n y,$$

en changeant $x^{\frac{n}{2}+1}$ en x et faisant

$$2m = \frac{n}{n+2}, \quad b = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2},$$

est donc censée avoir été aussi intégrée par séries. Il en est encore de même de l'équation

$$y'' - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by,$$

laquelle, en faisant $y = x^m z$, devient

$$D_x^2 z + \frac{2m}{x} D_x z = bz.$$

273. Si nous avions cherché à intégrer directement par séries l'équation transformée

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by,$$

nous aurions eu à rendre identique l'équation

$$a[\alpha(\alpha-1)-m(m-1)]x^{\alpha-2}+a_1[\alpha_1(\alpha_1-1)-m(m-1)]x^{\alpha_1-2}+\ldots$$
$$= bax^\alpha + ba_1 x^{\alpha_1} + ba_2 x^{\alpha_2} + \ldots,$$

ce qui aurait entraîné les conditions

$$\alpha(\alpha-1) - m(m-1) = 0, \quad \alpha_m = \alpha + 2m,$$
$$a_m[\alpha_m(\alpha_m - 1) - m(m-1)] = ba_{m-1}.$$

La première équation fournit pour α deux valeurs

$$\alpha' = m, \quad \alpha'' = 1 - m.$$

La troisième formule, quand on y met pour α_m sa valeur tirée de la seconde, devient

$$a_m[\alpha(\alpha-1) + 2m(2m+2\alpha-1) - m(m-1)] = ba_{m-1},$$

ou plus simplement, puisque $\alpha(\alpha-1) - m(m-1) = 0$,

$$2m(2m+2\alpha-1)a_m = ba_{m-1};$$

on trouve dès lors pour l'intégrale complète exprimée en séries

$$y = C_1 x^m \left[1 + \frac{bx^2}{2(2m+1)} + \frac{b^2 x^4}{2.4(2m+1)(2m+3)} + \ldots\right]$$
$$+ C_2 x^{1-m}\left[2 + \frac{bx^2}{2(3-2m)} + \frac{b^2 x^4}{2.4(3-2m)(5-2m)} + \ldots\right].$$

Les séries qu'on vient d'obtenir ont cela de remarquable, qu'elles peuvent être sommées et remplacées par des intégrales définies. En effet, quand dans la formule (5), page 38,

$$\int \sin^\mu x \cos^\nu x\, dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{\nu-1} x}{\mu+\nu}$$
$$+ \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \sin^\mu x \cos^{\nu-2} x\, dx,$$

on fait

$$x = \theta, \quad \mu = 2\alpha - 1, \quad \nu = 2m,$$

il vient

$$\int \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2m}\theta\, d\theta = \frac{\sin^{2\alpha} x \cos^{2m-1} x}{2m+2\alpha-1} + \ldots$$
$$+ \frac{2m-1}{2m+2\alpha-1} \int \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2m-2}\theta\, d\theta.$$

Si l'on prend o et π pour limites des intégrales, la partie intégrée s'évanouit toutes les fois que α est une quantité positive, ou une quantité imaginaire à partie réelle positive, en sorte qu'on a

$$\int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2m}\theta\, d\theta = \frac{2m-1}{2m+2\alpha-1} \int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2m-2}\theta\, d\theta.$$

En vertu de cette dernière relation, l'équation

$$2m(2m+2\alpha-1)a_m = ba_{m-1}$$

sera satisfaite si l'on prend

$$a_m = \frac{ab^m}{1.2.3\ldots(2m-1)2m} \int_0^\pi \sin^{2\alpha-1}\theta \cos^{2m}\theta\, d\theta,$$

et par suite, en attribuant successivement à α les deux valeurs $m, 1-m$, on peut mettre l'intégrale obtenue sous la forme

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi \left(1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\theta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\theta + \ldots\right)\sin^{2m-1}\theta d\theta$$

$$+ C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \left(1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\theta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\theta + \ldots\right)\sin^{1-2m}\theta d\theta;$$

or

$$1 + \frac{bx^2}{1.2}\cos^2\theta + \frac{b^2x^4}{1.2.3.4}\cos^4\theta + \frac{b^3x^6}{1.2.3.4.5.6}\cos^6\theta + \ldots$$

$$= \cos.\sqrt{-1}\, x\sqrt{b}\cos\theta = \frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\theta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\theta},$$

donc

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\theta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\theta}\right)\sin^{2m-1}\theta d\theta$$

$$+ C_2 x^{1-m} \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}e^{x\sqrt{b}\cos\theta} + \frac{1}{2}e^{-x\sqrt{b}\cos\theta}\right)\sin^{1-2m}\theta d\theta.$$

Cette expression peut se simplifier encore, car on a, à cause du choix des limites, et de la nature des fonctions $\sin\theta$, $\cos\theta$,

$$\int_0^\pi e^{-\mu\cos\theta}\sin^\nu\theta\, d\theta = \int_0^\pi e^{\mu\cos\theta}\sin^\nu d\theta;$$

donc

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\theta}\sin^{2m-1}\theta d\theta + C_2 x^{1-m}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\theta}\sin^{1-2m}\theta d\theta.$$

Ces transformations supposent, comme nous l'avons dit, que α est une quantité positive, et par conséquent que m et $1-m$ sont des nombres positifs, ou que m tombe entre les limites 0 et 1; si cette condition est satis-

faite, l'intégrale générale de l'équation

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by$$

sera exprimée par des intégrales définies. Quand m est égal à 0 ou à 1, l'équation se réduit à $D_x^2 y = by$, et l'on sait que, dans ce cas, elle a pour intégrale complète

$$y = C_1 e^{x\sqrt{b}} + C_2 e^{-x\sqrt{b}}.$$

Quand on fait $m = \frac{1}{2}$, on a

$$y = (C_1 + C_2) \sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{b}\cos\theta} d\theta$$

Les deux constantes se confondent en une seule ; l'intégrale n'a plus la généralité qu'elle doit avoir. Pour obtenir l'intégrale complète, il faudra recourir à un artifice de calcul déjà employé : on fera dans le terme qui multiplie C_1, $m = \frac{1}{2}$, et dans celui qui multiplie C_2, $m = \frac{1}{2} + \varepsilon$, puis on développera $(x \sin^2\theta)^{-\varepsilon}$ par la formule toujours convergente qui donne le développement de $a^{-\varepsilon}$: de cette manière, en posant $C_1 + C_2 = C'$, $C_2\varepsilon = C''$, et faisant ensuite $\varepsilon = 0$, on trouvera

$$y = C'\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{b}\cos\theta} d\theta + C''\sqrt{x} \int_0^{\pi} e^{x\sqrt{b}\cos\theta}\, \mathrm{l}.x\sin^2\theta d\theta.$$

Si m était plus grand que 1, on ne pourrait plus admettre la série qui multiplie C_2 : ce serait au contraire la première série qu'on omettrait si m avait une valeur négative. Dans tous les cas, on obtient immédiatement, sous forme finie, une intégrale particulière y_1 de l'équation

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by.$$

On trouverait la seconde intégrale à l'aide du procédé que nous avons déjà plusieurs fois employé, c'est-à-dire en faisant $y = uy_1$, et exprimant que cette valeur, dans laquelle la constante est remplacée par une fonction de x, satisfait à l'équation proposée. On verrait, de cette manière, que l'intégrale générale est

$$y = C'y_1\left(\int \frac{dx}{y_1^2} + C''\right).$$

Si, dans l'équation

$$y = C_1 x^m \int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\theta} \sin^{2m-1}\theta d\theta \\ + C_2 x^{1-m}\int_0^\pi e^{x\sqrt{b}\cos\theta}\sin^{1-2m}\theta d\theta,$$

on pose $\cos\theta = t$, elle deviendra

$$y = C_1 x^m \int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{m-1}dt \\ + C_2 x^{1-m}\int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{-m}dt,$$

l'équation

$$D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2}y = by$$

aura pour intégrale particulière

$$y_1 = C_1 x^m \int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{m-1}dt,$$

ou

$$y_1 = C_2 x^{1-m}\int_{-1}^{+1} e^{xt\sqrt{b}}(1-t^2)^{-m}dt,$$

suivant que $m > 1$, ou $m < 1$.

La première de ces intégrations s'effectue quand m est un nombre entier positif; ce sera au contraire la seconde quand m sera un nombre entier négatif. Donc, toutes les fois que m désigne un nombre entier positif ou négatif,

on a, sous forme finie, une intégrale particulière de l'équation proposée, et, d'après la formule

$$y = C'y_1\left(\int \frac{dx}{y_1^2} + C''\right),$$

la détermination de l'intégrale générale de cette même équation se trouve ramenée aux quadratures. L'équation de Riccati $D_x y + ay^2 = bx^n$ se transforme d'abord en $D_x^2 y = kyx^n$, quand on change y en $\frac{1}{ay} D_x y$, et qu'on fait $ab = k$; et qu'elle devient successivement

$$D_x^2 y + \frac{2m}{x} D_x y = by, \quad D_x^2 y - \frac{m(m-1)}{x^2} y = by,$$

quand on y change $x^{\frac{n}{2}+1}$ en x, puis y en $x^{-m}y$, et qu'on fait

$$m = \frac{n}{2(n+2)}, \quad b = \frac{k}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}.$$

d'ailleurs, si $m = \pm \mathrm{n}$, on aura

$$n = \frac{-4\mathrm{n}}{2\mathrm{n} \mp 1};$$

donc l'intégration de l'équation de Riccati se ramène aux quadratures toutes les fois que n est de la forme $\frac{-4\mathrm{n}}{2\mathrm{n} \mp 1}$. Nous retrouvons ainsi un résultat auquel nous sommes déjà parvenus par deux méthodes essentiellement différentes.

274. Il est enfin une troisième méthode d'intégration par séries que nous exposerons en l'appliquant, pour plus de simplicité, à l'équation linéaire du second ordre sans second membre

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0,$$

X_1, X_2 étant des fonctions quelconques de x. On peut d'abord ramener cette équation à la forme plus simple

$$D_x^2 z = X z;$$

il suffit en effet pour cela, comme nous l'avons vu, de faire $y = uz$, et de déterminer u à l'aide de l'équation du premier ordre

$$2D_x u + X_1 u = 0,$$

ou de faire

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int X_1 dx}.$$

Reste maintenant à développer la valeur de z en série convergente. Admettons que pour une valeur donnée x_0 de x, z et $D_x z = z'$ doivent prendre les valeurs z_0, z'_0; z_0 et z'_0 pourront, dans l'intégrale cherchée, servir de constantes arbitraires. Cela posé, de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = Xz$$

on tire

$$d\,\frac{dz}{dx} = Xzdz,$$

et, en intégrant à partir de x_0,

$$\frac{dz}{dx} - z'_0 = \int_{x_0}^{x} Xzdx, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dx} = z'_0 + \int_{x_0}^{x} Xzdx.$$

En intégrant une seconde fois, on aura

$$z = z_0 + z'_0 (x - x_0) + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xzdx,$$

ou, en posant pour abréger, $z_0 + z'_0 (x - x_0) = t$,

$$z = t + \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} Xzdx.$$

Si, dans cette équation, on remplace sous le signe $\int$, z

par sa valeur, et qu'on remplace $\int_{x_0}^{x}$ par $\int$, en se rappelant que toutes les intégrales sont prises à partir de x_0, on trouvera

$$z = t + \int dx \int \mathrm{X}(t + \int dx \int \mathrm{X}z dx)\, dx$$
$$= t + \int dx \int \mathrm{X}t dx + \int dx \int \mathrm{X}dx \int dx \int \mathrm{X}z dx;$$

remplaçant encore z par sa valeur, on trouvera

$$z = t + \int dx \int \mathrm{X}t dx + \int dx \int \mathrm{X}dx \int \mathrm{X}t dx$$
$$+ \int dx \int \mathrm{X}dx \int dx \int \mathrm{X}dx \int dx \int \mathrm{X}z dx + \ldots$$

En continuant cette même substitution, on obtiendra la valeur de z exprimée par une série indéfinie de termes qui sont tels que chacun se déduit du précédent, en multipliant par $\mathrm{X}dx^2$, et intégrant deux fois de suite, à partir de $x = x_0$. Le dernier terme seul contient z ou la fonction inconnue qu'il s'agit de déterminer ; mais nous allons démontrer, 1° que ce dernier terme décroît indéfiniment à mesure que le nombre des termes augmente; 2° que la série tout entière approche indéfiniment d'une certaine quantité finie qu'elle ne peut pas dépasser, et dont elle peut différer autant que l'on voudra.

Supposons en effet que x croisse d'une manière continue dans l'intervalle de x_0 à x, et appelons ξ, ζ et τ les plus grandes valeurs absolues de X, z et t dans cet intervalle, ou des valeurs plus grandes, de sorte que l'on ait toujours $\mathrm{X} < \xi$, $z < \zeta$, $t < \tau$. Si l'on trouve pour ζ une valeur finie, il sera démontré par là même que z ne peut devenir infini pour des valeurs de x comprises entre les limites x_0, x. Or, puisque entre ces limites on a

$$\mathrm{X}t < \xi\tau,$$

on aura

$$\int \mathrm{X}t dx < \int \xi\tau dx = \xi\tau(x - x_0),$$

ou simplement

$$\int \mathrm{X} t dx < \xi\tau (x - x_0).$$

Si l'on multiplie les deux membres de cette inégalité par dx et qu'on intègre entre les limites x_0, X : pour multiplier de nouveau par $\mathrm{X}dx$ et intégrer, pour multiplier encore par dx et intégrer une troisième fois, et ainsi de suite, on trouvera

$$\int dx \int \mathrm{X} t dx < \xi\tau \frac{(x - x_0)^2}{1.2},$$

$$\int dx \int \mathrm{X} dx \int dx \int \mathrm{X} t dx < \xi^2\tau \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4},$$

$$\int dx \int \mathrm{X} dx \int dx \int \mathrm{X} dx \int dx \int \mathrm{X} t dx < \xi^3\tau \frac{(x - x_0)^6}{1.2.3.4.5.6},$$

et ainsi de suite pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x. On a aussi, pour ces mêmes valeurs de x,

$$\mathrm{X} z < \xi\zeta,$$

et, par suite,

$$\int \mathrm{X} z dx < \int \xi\zeta dx = \xi\zeta (x - x_0),$$

$$\int dx \int \mathrm{X} z dx < \zeta\xi \frac{(x - x_0)^2}{1.2},$$

$$\int dx \int \mathrm{X} dx \int dx \int \mathrm{X} z dx < \zeta\xi^2 \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4},$$

et, en général,

$$\int dx \int \mathrm{X} dx \ldots \int dx \int \mathrm{X} z dx < \zeta\xi^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{1.2.3.4\ldots 2n}.$$

En substituant, pour chacune des intégrales dont se compose la valeur de z, sa limite supérieure, on arrivera nécessairement à l'inégalité

$$z < \tau + \tau\xi \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \tau\xi^2 \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4} + \ldots$$
$$+ \zeta\xi^n \frac{(x - x_0)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}.$$

Cette inégalité sera vraie, à plus forte raison, si l'on prolonge indéfiniment la série qui forme la première partie du second membre, mais cette série ainsi prolongée a pour somme

$$\frac{1}{2}\zeta\left[e^{(x-x_0)\sqrt{\xi}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{\xi}}\right],$$

et cette somme conserve évidemment une valeur finie pour toutes les valeurs de x comprises entre x_0 et x; on peut dès lors assigner une limite L qui lui soit constamment supérieure. D'ailleurs, l'expression

$$\frac{\xi^n(x-x_0)^{2n}}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{\left[(x-x_0)\sqrt{\xi}\right]^{2n}}{1.2.3\ldots 2n},$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{1}\cdot\frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{2}\cdot\frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{3}\cdots\frac{(x-x_0)\sqrt{\xi}}{2n},$$

décroît indéfiniment à mesure que n augmente, et peut devenir plus petite que toute quantité donnée ε, quelque petite qu'elle soit; on aura donc, en prenant n suffisamment grand,

$$z < L + \varepsilon\zeta;$$

et comme cette inégalité est vraie pour toutes les valeurs de ζ comprises entre x_0, x, on pourra, à la place de z, mettre sa valeur maximum ζ; on aura donc

$$\zeta < L + \varepsilon\zeta, \quad \zeta < \frac{L}{1-\varepsilon},$$

ou, parce que ε peut devenir aussi petit que l'on voudra,

$$\zeta < L.$$

Donc, d'une part, le dernier terme de la série, qui est plus petit que $\zeta\varepsilon$, décroît indéfiniment à mesure que le nombre de ses termes augmente, et, de l'autre, z reste toujours inférieur à une limite fixe et finie L. Donc la série qui

forme le second membre de l'équation

$$z = t + \int dx \int Xt dx + \int dx \int X dx \int dx \int Xt dx$$
$$+ \int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int Xt dx + \ldots,$$

prolongée à l'infini, est convergente et a précisément pour somme l'intégrale cherchée z.

275. On peut aussi développer en série l'intégrale générale de l'équation $D_x^2 z = Xz$ de la manière suivante : on pose

$$z = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n,$$

$u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ étant $n+1$ fonctions de x qu'il s'agit de déterminer, et qui sont liées entre elles par l'équation

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + D_x^2 u_2 + \ldots + D_x^2 u_{(n)}$$
$$= Xu_0 + Xu_1 + Xu_2 + \ldots + Xu_n,$$

ou

$$\Sigma D_x^2 u = \Sigma X u.$$

Admettons encore que pour $x = x_0$, z et z' doivent prendre des valeurs arbitraires z_0, z'_0, et que les inconnues u_0, $u_1, \ldots$ vérifient d'abord les équations

$$D_x^2 u_0 = 0, \quad D_x^2 u_1 = Xu_0, \quad D_x^2 u_2 = Xu_1, \ldots, \quad D_x^2 u_n = Xu_{n-1}.$$

Puis intégrons ces équations à partir de x_0, en admettant que u_0 et u'_0 prennent les mêmes valeurs que z et z', et que, par conséquent, les équations

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = z, \quad u'_0 + u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n = z'$$

se réduisent, pour $x = x_0$, à $u_0 = z_0$, $u'_0 = z'_0$,

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0, \quad u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n = 0,$$

supposons enfin que l'on ait, pour $x = x_0$,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \ldots, \quad u_n = 0, \quad u'_1 = 0, \quad u'_2 = 0, \ldots, \quad u'_n = 0,$$

il viendra

$$u_0 = z_0 + z'_0(x - x_0) = t, \quad u_1 = \int dx \int Xt\,dx,$$

$$u_2 = \int dx \int X dx \int dx \int Xt\,dx,$$

$$u_3 = \int dx \int X dx \int dx \int X dx \int dx \int Xt\,dx, \ldots, \quad u_4 = \ldots, \quad u_n = \ldots,$$

les intégrales étant toutes prises à partir de x_0.

La valeur ainsi obtenue pour z ne satisfait pas proprement à l'équation proposée

$$D_x^2 z = Xz,$$

ou

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + \ldots + D_x^2 u_n = Xu_0 + Xu_1 + \ldots + Xu_n,$$

elle vérifie seulement celle-ci

$$D_x^2 u_0 + D_x^2 u_1 + \ldots + D_x^2 u_n = Xu_0 + Xu_1 + \ldots + Xu_{n-1};$$

mais on fait voir, à l'aide de raisonnements tout à fait semblables à ceux que nous avons employés ci-dessus, 1° que la somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ tend toujours vers une limite finie à mesure que n augmente; 2° que si l'on prend un nombre suffisant de fonctions u_0, u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$, déduites successivement l'une de l'autre, comme nous l'avons indiqué, le terme Xu_n pourra devenir aussi petit que l'on voudra, et que, par conséquent, la valeur $z = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ vérifiera alors l'équation $D_x^2 z = Xz$.

276. Pour suppléer à quelques omissions, reprenons encore l'équation du second ordre sans second membre

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 y = 0;$$

en faisant $y = e^{\int z dx}$, on la ramène à l'équation du premier ordre

$$D_x z + z^2 + zX_1 + X_2 = 0,$$

que l'on intégrera par les moyens connus; y, dès lors,

sera donné par la série

$$y = 1 + \int z dx + \frac{\left(\int z dx\right)^2}{1.2} + \frac{\left(\int z dx\right)^3}{1.2.3} + \ldots$$

Nous avons vu que lorsqu'on connaît une intégrale particulière y_1 de cette équation, on peut aisément déterminer la seconde intégrale particulière, et, par suite, l'intégrale générale. Il suffit, pour cela, de poser $y = uy_1$; on trouve, de cette manière,

$$y = y_1\left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2} dx\right).$$

Si, par exemple, on connaît l'intégrale particulière $y = C_1 x$ de l'équation

$$D_x^2 y - \frac{1}{x(lx - 1)} D_x y + \frac{y}{x^2(lx - 1)} = 0,$$

la seconde intégrale sera donnée par l'expression

$$x \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x(lx-1)}}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{l(lx-1)}}{x^2} dx = x \int \frac{lx - 1}{x^2} dx$$
$$= -\frac{x\,lx}{x} = -lx,$$

et l'intégrale générale sera

$$y = C_1 x + C_2 lx.$$

Cette méthode s'applique, ainsi que nous l'avons dit, à une équation linéaire quelconque. Il existe un moyen plus facile de passer de la première intégrale particulière à la seconde, et qui n'appartient qu'à l'équation du second ordre.

Considérons les deux équations

$$D_x^2 y + X_1 D_x y + X_2 = 0, \quad D_x^2 y_1 + X_1 D_x y_1 + X_2 = 0;$$

multiplions la première par y_1, la seconde par y, puis

retranchons-les l'une de l'autre, il viendra ainsi

$$y_1 D_x^2 y - y D_x^2 y_1 + X_1 (y_1 D_x y - y D_x y_1) = 0.$$

Comme en faisant

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = u,$$

on aura

$$y_1 D_x^2 y - y D_x^2 y_1 = D_x u,$$

l'équation qui précède prend la forme très-simple

$$D_x u + X_1 u = 0,$$

d'où

$$u = C_1 e^{-\int X_1 dx}, \quad y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx}.$$

On saurait intégrer cette dernière équation, qui est du premier ordre et linéaire, par la méthode ordinaire; mais on arrive plus rapidement au résultat en remarquant que, le premier membre étant égal à $y_1^2 D_x \frac{y}{y_1}$, on a

$$D_x \frac{y}{y_1} = C_1 \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2},$$

et, par conséquent,

$$y = C' y_1 + C'' y_1 \int \frac{e^{-\int X_1 dx}}{y_1^2} dx.$$

Scolie. L'équation

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx}$$

met en évidence plusieurs propriétés de l'équation linéaire du second ordre sans second membre. On voit d'abord que, pour une certaine valeur de x, y et sa dérivée $D_x y$ ne peuvent être nuls en même temps. En effet, s'il en était ainsi, la constante arbitraire C_1 devrait être nulle, ce qui ne peut avoir lieu dans le cas général.

On voit ensuite que, entre deux valeurs successives de x, x_0 et x_1, qui rendent y_1 nul, il se trouve une valeur de x qui fait évanouir y. En effet, si l'on suppose la constante C_1 positive, on conclut de l'équation

$$y_1 D_x y - y D_x y_1 = C_1 e^{-\int X_1 dx},$$

que, pour $x = x_0$, $x = x_1$, $y D_x y_1 < 0$, et, par suite, que y et $D_x y_1$ sont de signes contraires; mais très-peu après x_0 et très-peu avant x_1, $D_x y_1$ a des signes contraires; donc il en est de même de y, et, par suite, y doit s'évanouir au moins une fois dans l'intervalle. Réciproquement, entre deux valeurs successives de x qui annulent y, se trouve au moins une valeur de x qui fait évanouir y_1. On en conclut que si l'on fait croître x d'une manière continue, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les deux fonctions y et y_1 deviendront nulles toujours alternativement. Par exemple, l'équation

$$D_x^2 y + y = 0$$

a pour intégrale générale

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x,$$

et l'on vérifie aisément que les courbes $y = \sin x$ et $y = \cos x$ rencontrent alternativement la ligne des abscisses.

277. Terminons cette analyse complète de tous les travaux qui ont eu pour objet l'intégration des équations différentielles, par quelques considérations sur les solutions singulières.

Supposons que l'équation différentielle

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y) = f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0$$

ait pour intégrale générale

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) = 0.$$

Si, entre les équations

$$F = o,\ D_x F = o,\ D_x^2 F = o,\ \ldots,\ D_x^n F = o,$$

on élimine les n constantes c_1, c_2, c_3, ..., c_n, on retrouvera nécessairement l'équation proposée.

Ainsi, par exemple, l'équation

$$D_x^2 y + ay - 1 = o$$

a pour intégrale générale

$$F = ay - 1 + \cos.x\sqrt{a} - (c_1 \sin.x\sqrt{a} + c_2 \cos.x\sqrt{a})\sqrt{a} = o,$$

et l'on en tire

$$D_x F = aD_x y - \sqrt{a}\sin.x\sqrt{a} - (c_1 \cos.x\sqrt{a} - c_2 \sin.x\sqrt{a})a = o,$$

$$D_x^2 F = aD_x^2 y - a\cos.x\sqrt{a} + (c_1 \sin.x\sqrt{a} + c_2 \cos.x\sqrt{a})a\sqrt{a} = o;$$

or, de cette dernière équation, jointe à la première, on déduit immédiatement l'équation proposée

$$D_x^2 y + a\,y - 1 = o.$$

Cela posé, concevons que l'on différentie, par rapport aux constantes c_1, c_2, ..., c_n, les n équations

$$F = o,\ D_x F = o,\ D_x^2 F = o,\ \ldots,\ D_x^{n-1} F = o,$$

et représentons, pour abréger, par

$$\Sigma d_c F,\ \Sigma d_c D_x F, \ldots,\quad \Sigma d_c D_x^{n-1} F$$

les différentielles obtenues, on arrivera toujours à l'équation proposée; si, pour éliminer les constantes, on emploie, au lieu des équations

$$F = o,\ D_x F = o, \ldots,\ D_x^n F = o,$$

les équations nouvelles

$$F = 0, \quad D_x F + \Sigma d_c F = 0, \quad D_x^2 F + \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots,$$

$$D_x^n F + \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0,$$

pourvu que l'on ait

$$\Sigma d_c F = 0, \quad \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots, \quad \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0;$$

et il résultera de ce qui précède que si, après avoir éliminé entre les n équations

$$\Sigma d_c F = 0, \quad \Sigma d_c D_x F = 0, \ldots, \quad \Sigma d_c D_x^{n-1} F = 0,$$

les $n - 1$ rapports

$$\frac{dc_1}{dc_n}, \quad \frac{dc_2}{dc_n}, \ldots, \quad \frac{dc_{n-1}}{dc_n},$$

de manière à arriver à une équation différentielle de l'ordre $n - 1$,

$$f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^{n-1} y) = 0,$$

on élimine de nouveau les n constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ entre les n équations

$$f = 0, \quad F = 0, \quad D_x F = 0, \ldots, \quad D_x^{n-1} F = 0,$$

pour arriver à une équation différentielle de l'ordre $n - 1$ indépendante des constantes

$$\chi(x, y, D_x y, \ldots, D_x^{n-1} y) = 0;$$

cette dernière équation sera en général une solution singulière de l'équation proposée.

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$F = y - \frac{c_1}{2} x^2 - c_2 x - c_1^2 - c_2^2 = 0;$$

en éliminant les constantes c_1, c_2 entre les trois équations

$$F = 0, \quad D_x F = 0, \quad D_x^2 F = 0,$$

on trouvera pour l'équation différentielle

$$f(x, y, D_x, D_x^2 y) = y - x D_x y + \frac{x^2}{2} D_x^2 y - D_x^2 y^2 - (D_x y - x D_x^2 y)^2 = 0;$$

on a d'ailleurs

$$\frac{1}{dc_2} \Sigma\, d_c F = -\left(\frac{x^2}{2} + 2c_1\right) \frac{dc_1}{dc_2} - x - 2c_2,$$

$$\frac{1}{dc_2} \Sigma\, d_c\, D_x F = -x \frac{dc_1}{dc_2} - 1,$$

et en éliminant le rapport $\frac{dc_1}{dc_2}$ entre les deux équations

$$-\left(\frac{x^2}{2} + 2c_1\right) \frac{dc_1}{dc_2} - x - 2c_2 = 0, \qquad -x \frac{dc_1}{dc_2} - 1 = 0,$$

on aura

$$\mathrm{f} = \left(\frac{x^2}{2} + 2c_1\right) \frac{1}{x} - x - 2c_2 = 0;$$

enfin, si l'on élimine les constantes c_1, c_2, entre les trois équations

$$\mathrm{f} = 0, \quad F = 0, \quad D_x F = 0,$$

on arrivera à l'équation

$$\chi = y\,(x^2 + 1) + \frac{x}{16} - D_x y^2 - \left(x + \frac{x^3}{2}\right) D_x y = 0,$$

qui sera une solution singulière de l'équation

$$y - x D_x y + \frac{x^2}{2} D_x^2 y - D_x^2 y^2 - (D_x y - x D_x^2 y)^2 = 0.$$

Il est facile de voir que non-seulement l'équation

$$\chi(x, y, D_x y, \ldots, D_x^{n-1} y) = 0$$

sera une intégrale singulière de l'équation différentielle

$$f(x, y, D_x y, D_x^2 y, \ldots, D_x^n y) = 0,$$

mais que les intégrales successives

$$\chi_1 \quad (x, y, c', D_x y, \ldots, D_x^{n-2} y) = 0,$$

$$\chi_2 \quad (x, y, c', c'', D_x y, \ldots, D_x^{n-3} y) = 0,$$

. . . .

$$\chi_{n-1}[x, y, c', c'', \ldots, c^{(n-1)}] = 0,$$

de cette même équation $\chi = 0$, seront encore des solutions singulières de l'équation $f = 0$. Il en résulte que la solution singulière la plus générale contient au plus $n - 1$ constantes arbitraires, ce que nous savions déjà.

Il arrive quelquefois que l'équation $\mathrm{f} = 0$ ne renferme aucune des constantes arbitraires c_1, $c_2, \ldots, c_n$; alors la solution singulière $\chi = 0$ se confond avec $\mathrm{f} = 0$. Supposons, par exemple, que l'équation différentielle donnée soit

$$f = y x^2 D_x^2 y - 2x^2 D_x y^2 + 6xy D_x y - 6y^2 = 0,$$

son intégrale générale sera

$$F = xy + c_1 x^3 + c_2 y = 0,$$

et l'on aura

$$\frac{1}{dc_2} \Sigma\, d_c F = x^3 \frac{dc_1}{dc_2} + y, \quad \frac{1}{dc_2} \Sigma\, d_c D_x F = 3x^2 \frac{dc_1}{dc_2} + \frac{dy}{dx} = 0;$$

on trouvera

$$\mathrm{f} = \frac{1}{3} D_x y - \frac{y}{x} = 0:$$

l'intégrale singulière sera

$$\frac{1}{3} \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0;$$

en l'intégrant on trouvera une seconde solution singulière $y = c' x^3$.

Si l'équation $f = o$ ne renfermait que $n-m$ constantes arbitraires $c_1, c_2, \ldots, c_{n-m}$, pour arriver à la solution singulière il suffirait des équations

$$f = o,\ D_x^{n-1} F = o,\ D_x^{n-2} F = o, \ldots,\ D_x^{n-m} F = o.$$

Supposons maintenant que l'équation différentielle

$$f(x, y, D_x y, \ldots, D_x^n y) = o$$

soit vérifiée non-seulement par l'expression

$$y = F_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_m) = o,$$

mais encore par une seconde valeur de la forme

$$y + \varepsilon\varphi = F_1(x, c_1, c_2, \ldots, c_m) + \varepsilon\varphi(x, c_1, c_2, \ldots, c_m),$$

m étant inférieur ou tout au plus égal à n, et ε désignant une quantité très-petite. L'équation

$$f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = o$$

sera vérifiée non-seulement par les valeurs

$$y,\ y',\ y'', \ldots,\ y^{(n)},$$

mais encore par

$$y + \varepsilon\varphi,\quad y' + \varepsilon\varphi',\quad y'' + \varepsilon\varphi'', \ldots,\quad y^{(n)} + \varepsilon\varphi^{(n)},$$

et l'on aura par conséquent

$$f + \varepsilon\left(\frac{df}{dy}\varphi + \frac{df}{dy'}\varphi' + \ldots + \frac{df}{dy^{(n)}}\varphi^{(n)}\right) +$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2}\left(\frac{d^2 f}{dy^2}\varphi^2 + \frac{d^2 f}{dy'^2}\varphi'^2 + \ldots + \frac{2d^2 f}{dy\,dy'}\varphi\varphi' + \ldots + \varepsilon_1\right) = o,$$

ε_1 désignant une nouvelle quantité infiniment petite qui s'évanouira avec ε. Mais $f = o$; donc, en divisant par ε, puis faisant $\varepsilon = o$, on trouvera

$$\frac{df}{dy^{(n)}}\varphi^{(n)} + \frac{df}{dy^{(n-1)}}\varphi^{(n-1)} + \ldots + \frac{df}{dy'}\varphi' + \frac{df}{dy}\varphi = o.$$

Cela posé, ou le coefficient $\frac{df}{dy^{(n)}}$ a une valeur finie, ou il est nul. Dans le premier cas, l'équation qui précède sera de l'ordre n et donnera par suite pour φ une valeur renfermant n constantes arbitraires; m sera alors égal à n, et la valeur $y = F_1$ ne sera pas une intégrale particulière, mais l'intégrale complète de l'équation proposée. Dans le second cas, l'équation qui donne φ sera d'un ordre inférieur à n, m sera plus petit que n, F_1 sera une intégrale particulière ou singulière. On en conclut que dans le cas où l'équation $f[x, y', y'', \ldots, y^{(n)}] = 0$ admet des solutions singulières, on a

$$\frac{df}{dy^{(n)}} = D_{y^{(n)}} f = 0:$$

et comme

$$df = D_x f dx + D_y f.y' \, dx + D_{y'} f.y'' \, dx + \ldots$$
$$+ D_{y^{(n-1)}} f.y^{(n)} \, dx + D_{y^n} f.y^{(n+1)} dx,$$

on aura aussi, dans l'hypothèse d'une solution singulière,

$$D_x f + D_y f.y' + D_{y'} f.y'' + \ldots + D_{y^{(n-1)}} f.y^{(n)} + D_{y^{(n-1)}} f.y^n = 0,$$

et par conséquent

$$y^{(n+1)} = D_x^{n+1} y = \frac{0}{0}.$$

Les deux équations

$$D_{y^{(n)}} f = 0, \quad D_x^{n+1} y = \frac{0}{0}$$

fourniront, dans certains cas, des solutions singulières, alors même que l'on ne connaîtra pas l'intégrale générale.

Exemples :

$$1^o. \; D_x^2 y + 2x - 2\sqrt{x^2 + D_x y} = 0,$$

ou

$$y'' + 2x - 2\sqrt{x^2 + y'} = 0;$$

on peut mettre $f=0$ sous la forme

$$f=y''\sqrt{x^2+y'}+2x\sqrt{x^2+y'}-2(x^2+y')=0,$$

de sorte que

$$\frac{df}{dy''}=\sqrt{x^2+y'};$$

en égalant cette valeur à o, on trouvera

$$dy=-x^2dx,\ y=C_1-\frac{x^3}{3}:$$

cette valeur de y satisfait à l'équation proposée et en est une solution singulière.

$$2^\circ.\ f=yy'-y'\sqrt{x^2+y^2-a^2}+x=0,$$
$$D_{y'}f=y-\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

d'où $x^2-a^2=0$; mais si l'on mettait l'équation donnée sous la forme

$$f=yy'\sqrt{x^2+y^2-a^2}-y'(x^2+y^2-a^2)+x\sqrt{x^2+y^2-a^2},$$

on aurait

$$D_{y'}f=(y-\sqrt{x^2+y^2-a^2})\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0,$$

et l'on tirerait de cette équation non-seulement

$$x^2-a^2=0,$$

mais encore

$$x^2+y^2-a^2=0.$$

$$3^\circ.\ xy''^2-2y'y''+x=0;$$

on en tire

$$y'''=\frac{y''^2-1}{2(xy''-y')}:$$

en exprimant que cette dérivée prend la forme $\frac{0}{0}$, on aura

$$y''^2-1=0,\quad xy''-y'=0,$$

d'où l'on tire, en éliminant y'',

$$y'^2 - x^2 = 0, \quad dy = xdx, \quad y = C_1 + \frac{x^2}{2}.$$

4°. Enfin

$$y = xy' - a\sqrt{1+y'^2};$$

on aura

$$y'' = \frac{0}{x\sqrt{1+y'^2} - ay'},$$

et par conséquent

$$x\sqrt{1+y'^2} - ay' = 0,$$

d'où

$$y'^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}, \quad y' = \pm \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

et en éliminant y' entre cette équation et la proposée, on obtiendra les deux solutions singulières

$$y^2(a^2 - x^2) - (x^2 + a^2)^2 = 0, \quad y^2 + x^2 - a^2 = 0.$$

Dans tous les cas, pour savoir si les intégrales trouvées par la méthode que nous venons de développer sont réellement des intégrales singulières, ce qu'il y aura de mieux, comme nous l'avons déjà dit, ce sera de chercher si on peut les déduire des intégrales générales en donnant aux constantes des valeurs particulières.

Nous avons emprunté cette méthode au *Traité élémentaire de Calcul intégral* du R. P. Caraffa, professeur de Mathématiques transcendantes au collége romain. Voici comment le géomètre italien procède dans le cas des équations différentielles du premier ordre. Soit

$$f(x, y, y') = 0$$

l'équation différentielle donnée que nous mettrons sous la forme

$$y' + \varphi(x, y) = D_x y + \varphi(x, y) = 0,$$

et soit

$$F(x, y, c) = 0$$

son intégrale générale; en différentiant cette dernière équation, on trouvera

$$D_x F + D_y F . y' = 0,$$

et, en résolvant par rapport à la constante c,

$$c = \chi(x, y, y');$$

cette valeur de c, substituée dans $F(x, y, c) = 0$, donnera

$$F[x, y, \chi(x, y, y')] = 0,$$

ou, en mettant pour y' sa valeur $-\varphi(x, y)$,

$$F[x, y, \chi(x, y, -\varphi)] = 0;$$

cette dernière équation doit être évidemment une équation identique $0 = 0$, et, par conséquent, l'on aura, en différentiant tour à tour, par rapport à x et à y,

$$D_x F + (D_x \chi - D_\varphi \chi D_x \varphi) D\chi F = 0,$$
$$D_y F + (D_y \chi - D_\varphi \chi D_y \varphi) D_\chi F = 0,$$

d'où l'on tire

$$D_x \varphi = \frac{D_x F + D_\chi F D_x \chi}{D_\chi F D_\varphi \chi}, \quad D_y \varphi = \frac{D_y F + D_\chi F D_y \chi}{D_\chi F D_\varphi \chi}.$$

Mais toute solution singulière entraîne l'équation

$$D_c \ F = 0,$$

et, par suite,

$$D_\chi F = 0;$$

donc elle entraînera aussi les deux équations

$$D_x \varphi = \infty, \quad D_y \varphi = \infty,$$

et ces deux équations, ainsi établies à priori, serviront à

déterminer les solutions singulières d'une équation différentielle dont on ne connaîtrait pas l'intégrale générale.

Exemples :

$$xdx + ydy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - a^2},$$

ou

$$D_x y = -\frac{x}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

on a

$$\varphi(x,\ y) = -\frac{x}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}},$$

$$D_x\varphi = -\frac{x}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\left(-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right)},$$

$$D_y\varphi = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\left(-y + \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}\right)};$$

ces deux valeurs deviendront infinies, si l'on a

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0, \quad x^2 - a^2 = 0.$$

La première de ces équations donne

$$xdx + ydy = 0;$$

la seconde

$$xdx = 0:$$

toutes deux sont des solutions singulières de l'équation proposée.

Le premier et le dernier de ces quatre systèmes d'équations sont également propres à représenter les intégrales générales des équations données, et admettre l'existence de l'un de ces deux systèmes, c'est admettre que l'intégration des équations proposées est possible et réalisée.

Admettons, pour fixer les idées, que le système d'intégrales cherchées est représenté par les équations

$$(i_2)\left\{\begin{array}{l}\xi = \varphi_1(x, y, z, \ldots, t, \tau), \quad \eta = \varphi_2(x, y, z, \ldots, t, \tau), \\ \zeta = \varphi_3(x, y, z, \ldots, t, \tau),\end{array}\right.$$

que nous écrirons sous la forme plus simple

$$\xi = \mathrm{f}_1, \quad \eta = \mathrm{f}_2, \quad \zeta = \mathrm{f}_3, \ldots.$$

Désignons par

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

une fonction déterminée des seules variables x, y, z,..., et par

$$v = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots), \quad \mathrm{U} = f(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \ldots),$$

ce que devient la fonction u quand on y remplace les variables x, y, z, ..., 1° par les valeurs arbitraires ξ, η, ζ, ... ; 2° par les fonctions f_1, f_2, f_3, ... ; U, ainsi que f_1, f_2, f_3, dépendra uniquement des quantités x, y, z, ..., t, τ, et se réduira identiquement, pour $t = \tau$, à la nouvelle constante arbitraire désignée par v. De plus, en vertu des équations (i_2), on aura nécessairement

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \ldots), \quad \text{ou} \quad \mathrm{U} = v.$$

Cela posé, il est facile d'établir les trois propositions suivantes, qui servent de base à la nouvelle méthode d'intégration.

280. 1er *Théorème*. L'expression $\mathrm{U} = C$, C étant une constante arbitraire, et U une fonction des seules variables x, y, z, ..., t et τ, ne pourra être une intégrale des

équations données (D), qu'autant que la valeur $s = U$ sera une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles

$$(C) \qquad D_t s + F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = 0.$$

En effet, $U = C$ ne pourra être une intégrale des équations données, qu'autant que les valeurs de x, y, z, ..., tirées des équations

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots,$$

ou

$$x = \varphi_1(\xi, \eta, \zeta, \tau, t), \quad \eta = \varphi_2(\quad)\ldots,$$

réduiront U, non à une fonction de t, mais à une constante arbitraire; et U, d'ailleurs, ne pourra être réduite à une constante arbitraire qu'autant que sa différentielle totale, par rapport à t, étant nulle, on aura

$$D_t U + D_x U D_t x + D_y U D_t y + D_z U D_t z + \ldots = 0;$$

ou, en substituant à $D_t x$, $D_t y$, $D_t z$, ..., leurs valeurs tirées des équations (D),

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0.$$

Cette dernière équation doit d'ailleurs être une équation identique $0 = 0$, car, sans cela, elle établirait entre les seules quantités $x, y, z, \ldots, t$ et τ une certaine relation, et cette relation serait une conséquence nécessaire des équations

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3, \ldots.$$

Or, cela ne peut être, car, par hypothèse, ces dernières équations sont vérifiées par des valeurs entièrement arbitraires de x, y, z,..., t, τ, et par les valeurs de ξ, η, ζ,... déduites à l'aide des mêmes équations des valeurs attribuées à x, y, z, ..., t et τ. De sorte qu'il est absurde de supposer que l'on puisse éliminer, entre ces équations,

les variables ξ, η, ζ,... pour arriver à une relation entre les seules quantités x, y, z,..., t et τ. L'équation

$$(\text{A}) \qquad D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0$$

ne peut donc être en réalité qu'une équation identique exprimant que $s = U$ satisfait à l'équation (C); donc réellement, pour que $U = C$ puisse être une intégrale des équations proposées, il faut absolument que $s = U$ satisfasse à l'équation aux dérivées partielles (C).

Scolie. Si l'on nomme v la valeur particulière que prend la fonction f quand on y pose

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta, \ldots,$$

celle des intégrales générales des équations proposées qui seront de la forme $U = C$ se réduiront nécessairement, d'après ce que nous avons dit, à $U = v$, et alors aussi la valeur $s = U - v$ sera, en même temps que la valeur $s = U$, une intégrale particulière de l'équation aux dérivées partielles. Donc, 1° pour savoir si les équations proposées peuvent admettre une intégrale générale de la forme $U = C$, il suffit d'examiner si la valeur $s = U$ ou $s = U - v$ fournit ou non une intégrale particulière de l'équation (C); 2° v désignant une constante arbitraire et U une fonction des variables x, y, z,..., t qui ait la propriété de se réduire pour une valeur particulière τ de la variable t à une fonction donnée de x, y, z,..., savoir, à $u = f(x, y, z, \ldots)$. Pour obtenir celles des expressions $U = v$ qui pourraient satisfaire aux équations proposées, il faudra égaler à o la valeur de s qui a la double propriété de vérifier l'équation (C), et de se réduire à $u - v$ pour $t = \tau$, ou bien encore il suffira d'égaler à v celle des intégrales de l'équation (C) qui a la propriété de se réduire à u pour $t = \tau$.

281. 2me *Théorème.* Pour obtenir celles des valeurs de

la forme

$$\xi = f_1, \quad \eta = f_2, \quad \zeta = f_3,$$

qui peuvent former un système d'intégrales générales des équations proposées, il suffira de chercher les diverses intégrales particulières de l'équation (C), qui ont la propriété de se réduire, pour $t = \tau$, à l'une des variables $x, y, z\ldots$.

Ce théorème est un corollaire du précédent; on l'en déduit immédiatement en remplaçant tour à tour la fonction $f(x, y, z,\ldots)$ par $x, y, z,\ldots$. Dès lors, si l'on désigne par $s = f_1$, $s = f_2$, $s = f_3,\ldots$ les diverses intégrales de l'équation (C) qui, pour $t = \tau$, se réduiront à l'une des variables $x, y, z,\ldots$. On vérifiera encore cette même équation (C), en attribuant à s l'une des valeurs $s = f_1 - \xi$, $s = f_2 - \eta$, $s = f_3 - \zeta,\ldots$ et, en égalant à zéro ces dernières valeurs de s, on obtiendra, sous la forme cherchée, les intégrales des équations proposées (D).

282. 3me *Théorème*. Réciproquement, l'intégration générale de l'équation (C) entraîne l'intégration générale des équations (D), et pour obtenir les intégrales générales de ces dernières équations, il suffit d'égaler à des constantes arbitraires $\xi, \eta, \zeta,\ldots$ les valeurs $f_1, f_2, f_3,\ldots$ de s qui ont la double propriété de vérifier l'équation (C) et de se réduire à $x, y, z,\ldots$ pour $t = \tau$.

Démonstration. En effet, on obtiendra de cette manière les équations

$$\xi = f_1 = \varphi_1(x, y, z,\ldots, t, \tau), \quad \eta = f_2 = \varphi_2(\quad), \quad \zeta = f_3 = \varphi_3(\quad),\ldots,$$

en vertu desquelles $x, y, z,\ldots$, seront des fonctions de t qui pour $t = \tau$ se réduiront respectivement à $\xi, \eta, \zeta,\ldots$. Cela posé, puisque f_1 est une intégrale particulière de l'équation (C), on aura

$$D_t f_1 + F_1 D_x f_1 + F_2 D_y f_1 + F_3 D_z f_1 + \ldots = 0.$$

D'ailleurs, en faisant varier x, y, z,... avec t, on tirera de l'équation $f_1 = \xi$

$$D_t f_1 + D_x f_1 D_t x + D_y f_1 D_t y + D_z f_1 D_t z + \ldots = 0.$$

En éliminant $D_t f_1$ entre ces deux équations et opérant de même par rapport à f_2, f_3,..., on trouvera

$$D_x f_1 (D_t x - F_1) + D_y f_1 (D_t y - F_2) + D_z f_1 (D_t z - F_3) + \ldots = 0,$$
$$D_x f_2 (D_t x - F_1) + D_y f_2 (D_t y - F_2) + D_z f_2 (D_t z - F_3) + \ldots = 0,$$
$$D_x f_3 (D_t x - F_1) + D_y f_3 (D_t y - F_2) + D_z f_3 (D_t z - F_3) + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si l'on combine entre elles par voie d'addition ces dernières équations après les avoir multipliées par des facteurs choisis, de manière que toutes les différences

$$D_t x - F_1, \quad D_t y - F_2, \quad D_t z - F_3, \ldots$$

se trouvent éliminées, à l'exception d'une seule, et si l'on fait

$$K = D_x f_1 D_y f_2 D_z f_3 \ldots - D_y f_1 D_x f_2 D_z f_3 \ldots + \ldots,$$

il viendra

$$K(D_t x - F_1) = 0, \quad K(D_t y - F_2) = 0, \quad K(D_t z - F_3) = 0;$$

or la fonction de x, y, z,..., t, représentée par K, ne saurait être généralement nulle, car elle se réduit à l'unité ainsi que $D_x f_1$, $D_y f_2$, $D_z f_3$, pour $t = \tau$, puisqu'alors

$$f_1 = x, \quad f_2 = y, \quad f_3 = z, \ldots;$$

on devra donc avoir nécessairement

$$D_t x - F_1 = 0, \quad D_t y - F_2 = 0, \quad D_t z - F_3 = 0, \ldots,$$

ou enfin,

$$D_t x = F_1, \quad D_t y = F_2, \quad D_t z = F_3, \ldots;$$

les équations $\xi = f_1$, $\eta = f_2$, $\zeta = f_3$,... vérifieront par conséquent les équations proposées, et seront

leurs intégrales générales. Ces intégrales d'ailleurs sont telles, qu'étant donné un système de valeurs des variables $x, y, z, \ldots, t$, elles fournissent immédiatement les nouvelles valeurs $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ que prennent les variables dépendantes pour une nouvelle valeur τ de la variable indépendante.

Scolie. Les intégrales générales des équations (D) étant obtenues comme on vient de le dire, et représentées par les formules (i_2), la formule $U = v$, dans laquelle $U = f(\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \ldots)$ désigne une fonction quelconque de $\mathrm{f}_1, \mathrm{f}_2, \mathrm{f}_3, \ldots$, représentera une nouvelle intégrale générale des équations (D) : et, pour obtenir cette nouvelle intégrale, il suffira, comme nous l'avons vu, d'égaler à une constante arbitraire v celle des intégrales particulières de l'équation (C) qui a la propriété de se réduire à $u = f(x, y, z, \ldots)$ pour $t = \tau$.

Exemple : Supposons que les équations données soient

$$dx = xdt, \quad dy = ydt, \quad dz = zdt, \ldots,$$

on aura

$$F_1 = x, \quad F_2 = y, \quad F_3 = z, \ldots;$$

l'équation (C) deviendra

$$D_t s + x D_x s + y D_y s + z D_z s + \ldots = 0.$$

Les valeurs $s = xe^{\tau - t}$, $s = ye^{\tau - t}$, $s = ze^{\tau - t}, \ldots$, jouissent évidemment de la double propriété de vérifier l'équation aux dérivées partielles, et de se réduire pour $t = \tau$, à $x, y, z, \ldots$; les intégrales générales des équations proposées seront dès lors

$$\xi = xe^{\tau - t}, \quad \eta = ye^{\tau - t}, \quad \zeta = ze^{\tau - t}, \ldots,$$

ou

$$x = \xi e^{t - \tau}, \quad y = \eta e^{t - \tau}, \quad z = \zeta e^{t - \tau}, \ldots$$

Dans ces dernières formules, ξ, η, ζ, ... peuvent être considérés comme représentant les constantes arbitraires introduites par l'intégration.

Plus généralement : comme en désignant par u une fonction homogène quelconque de x, y, z, ..., du premier degré, on a

$$xD_x u + yD_y u + zD_z u = u,$$

le produit $ue^{k(\tau - t)}$ aura la double propriété de vérifier l'équation (C), et de se réduire à

$$u = f(x, y, z, \ldots)$$

pour $t = \tau$; donc l'expression

$$v = ue^{k(\tau - t)} \quad \text{ou} \quad u = ve^{k(t-\tau)}$$

représentera encore une intégrale générale des équations données.

283. Posons, pour abréger,

$$F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = D_x s D_t x + D_y s D_t y + \ldots = F_D s,$$

et servons-nous du signe caractéristique $S_D s$ pour indiquer l'intégrale définie $-\int_\tau^t F_D s\, dt$, de sorte que l'on ait

$$S_D s = -\int_\tau^t (F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots) dt = -\int_\tau^t F_D s\, dt \text{ [*]},$$

s étant d'ailleurs une fonction quelconque de x, y, z, ..., t. On tirera dès lors de l'équation

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0,$$

---

[*] Au lieu des notations $F_D s$, $S_D s$, qui indiquent tout naturellement, il me semble, une fonction de dérivées partielles, et la somme ou intégrale d'une expression composée de dérivées partielles, M. Cauchy a choisi les notations $\square s$, ∇s. Il m'a été impossible de les admettre, à cause de leur étrangeté, et surtout parce qu'en même temps qu'elles ne disent rien à l'esprit, on peut à peine les énoncer.

intégrée par rapport à t et à partir de $t=\tau$,

$$U-u-S_D U=0,\qquad U=u+S_D U.$$

Si dans le second membre de cette dernière équation on substitue une ou plusieurs fois de suite à la fonction U sa valeur tirée de cette même équation, alors, en écrivant, pour abréger, $S_D^2 U$, $S_D^3 U,\ldots$, au lieu de $S_D S_D U$, $S_D S_D S_D U$, etc., on trouvera

$$U=u+S_D u+S_D^2 U=u+S_D u+S_D^2 u+S_D^3 u=\ldots,$$

et généralement

$$U=u+S_D u+S_D^2 u+S_D^3 u+S_D^4 u+\ldots S_D^{n-1} u+S_D^n u,$$

n étant un nombre entier quelconque. Si dans cette dernière équation le terme $S_D^n u$ décroît indéfiniment pour des valeurs croissantes de n, la série du second membre sera convergente, on aura simplement

$$U=u+S_D u+S_D^2 u+S_D^3 u+S_D^4 u+\ldots;$$

par suite, la formule $U=v$, propre à représenter une intégrale quelconque des équations proposées, deviendra

$$u+S_D u+S_D^2 u+S_D^3 u+\ldots=v;$$

et comme, dans le cas où S_D désignerait non plus un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée, mais une quantité véritable, on aurait

$$1+S_D+S_D^2+S_D^3+\ldots=\frac{1}{1-S_D},$$

l'intégrale générale pourra être représentée sous la forme symbolique

$$\frac{u}{1-S_D}=v.$$

D'ailleurs, comme de l'équation qui donne en série convergente la valeur de U, on tire

$$\begin{aligned} S_D U &= S_D(u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + \ldots) \\ &= S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + \ldots = U - u, \end{aligned}$$

il est clair que la valeur de U, fournie par cette équation, vérifiera la formule $U - u - S_D U = 0$, et par suite la formule (C), tant que la série sera convergente. On peut donc énoncer le théorème suivant.

4me *Théorème*. Tant que la série

$$u, \quad S_D u, \quad S_D^2 u, \quad S_D^3 u, \ldots$$

sera convergente, la formule

$$(I_t) \quad u + S_D u + S_D^2 u + S_D^3 u + \ldots = v \quad \text{ou} \quad \frac{u}{1 - S_D} = v$$

est propre à représenter l'une quelconque des intégrales générales des équations (D).

284. Lorsque F_1, F_2, F_3,..., et, par suite, $F_D s$, ne renferment pas explicitement la variable indépendante t, mais seulement les variables dépendantes x, y, z,..., alors, en substituant à s, dans l'équation $S_D s = -\int_\tau^t F_D s\,dt$, la fonction u qui ne renferme pas non plus la variable t, on tire successivement de cette équation

$$S_D u = -\int_\tau^t F_D u\,dt = -F_D u \int_\tau^t dt = (\tau - t) F_D u,$$

$$S_D^2 u = -\int_\tau^t (\tau - t) F_D^2 u\,dt = -F_D^2 u \int_\tau^t (\tau - t)\,dt$$
$$= \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u,$$

et généralement

$$S_D^n u = \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3\ldots n} F_D^n u.$$

En vertu de cette dernière équation, l'intégrale quelconque (I_t) des équations (D) devient

$$u + \frac{\tau - t}{1} \mathrm{F}_{\mathrm{D}} u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \mathrm{F}_{\mathrm{D}}^2 u + \ldots = v;$$

et comme dans le cas où $\mathrm{F}_{\mathrm{D}} u$ représenterait, non plus un système d'opérations à effectuer sur une fonction donnée, mais une quantité véritable, on aurait

$$1 + \frac{\tau - t}{1} \mathrm{F}_{\mathrm{D}} + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \mathrm{F}_{\mathrm{D}}^2 + \ldots = e^{(\tau - t)\mathrm{F}_{\mathrm{D}}},$$

l'intégrale pourra être présentée sous la forme symbolique

$$(\mathrm{I}_1) \qquad e^{(\tau - t)\mathrm{F}_{\mathrm{D}}} u = v.$$

On arrive de cette manière au théorème suivant.

5me *Théorème*. Lorsque les fonctions $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2, \mathrm{F}_3, \ldots$ ne renferment pas explicitement la variable indépendante t, l'équation

$$(\mathrm{I}_t) \qquad u + \frac{\tau - t}{1} \mathrm{F}_{\mathrm{D}} u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \mathrm{F}_{\mathrm{D}}^2 u + \ldots = v,$$

ou

$$e^{(\tau - t)\mathrm{F}_{\mathrm{D}}} u = v,$$

est propre à représenter une quelconque des intégrales générales des équations (D), tant que la série

$$u, \quad \frac{\tau - t}{1} \mathrm{F}_{\mathrm{D}} u, \quad \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \mathrm{F}_{\mathrm{D}}^2 u, \ldots$$

est convergente.

Scolie. Si des formules

$$\frac{u}{1 - \mathrm{S}_{\mathrm{D}}} = v, \qquad e^{(\tau - t)\mathrm{F}_{\mathrm{D}}} u = v,$$

on veut déduire les intégrales générales des équations (D),

présentées sous la forme $\xi = f_1$, $\eta = f_2$, $\zeta = f_3, \ldots$, ξ, η, ζ étant ce que deviennent x, y, $z, \ldots$ considérées comme fonctions de la variable indépendante t, quand cette variable indépendante reçoit une nouvelle valeur τ, il suffira de poser successivement dans ces formules

$$u = x, \quad v = \xi, \quad u = y, \ldots, \quad v = \eta, \quad u = z, \quad v = \zeta, \ldots;$$

les intégrales générales des équations proposées seront donc représentées, dans tous les cas, par les formules

$$(\mathrm{I}^{(x)}) \quad \xi = \frac{x}{1 - \mathrm{S_D}}, \quad \eta = \frac{y}{1 - \mathrm{S_D}}, \quad \zeta = \frac{z}{1 - \mathrm{S_D}}, \ldots;$$

et, dans le cas où F_1, F_2, $F_3, \ldots$ ne renfermeraient pas explicitement la variable t, par les formules

$$(\mathrm{I}_1^{(x)}) \begin{cases} \xi = e^{(\tau - t)\mathrm{F_D}} x, \quad \eta = e^{(\tau - t)\mathrm{F_D}} y, \quad \zeta = e^{(\tau - t)\mathrm{F_D}} z, \ldots, \\ \text{ou} \\ \xi = x + \frac{\tau - t}{1} \mathrm{F_D} x + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} \mathrm{F_D^2} x + \ldots. \end{cases}$$

Prenons encore pour premier exemple les équations

$$dx = x dt, \quad dy = y dt, \quad dz = z dt,$$

on aura

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = x D_x u + y D_y u + z D_z u = \mathrm{F_D} u.$$

Si d'ailleurs on prend pour u une fonction homogène du premier degré en $x, y, z, \ldots$, on aura identiquement

$$x D_x u + y D_y u + z D_z u + \ldots = u, \quad \mathrm{F_D} u = u,$$

et l'on pourra poser simplement $\mathrm{F_D} = 1$; et comme d'ailleurs F_1, F_2, $F_3, \ldots$ ne renferment pas explicitement t, les intégrales générales cherchées seront

$$\xi = x e^{\tau - t}, \quad \eta = y e^{\tau - t}, \quad \zeta = z e^{\tau - t}, \ldots.$$

285. Lorsque dans l'équation

$$F_1 D_x s + F_2 D_y s + F_3 D_z s + \ldots = F_D s,$$

on remplace s par u, il vient

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = F_D u,$$

et si F_1, F_2, F_3,... ne renferment pas explicitement t, en désignant par k une quantité constante, et choisissant la fonction u de manière à vérifier l'équation

$$F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots = ku,$$

on aura identiquement

$$F_D u = ku,$$

et la formule

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v,$$

réduite à

$$v = u e^{k(\tau - t)}, \quad \text{ou} \quad u = v e^{k(t - \tau)},$$

sera propre à représenter une intégrale générale des équations proposées.

Pour donner une application de ces formules, considérons les équations

$$\begin{aligned}
dx &= (a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots)dt, \\
dy &= (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots)dt, \\
dz &= (a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots)dt, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

a_1, b_1, c_1,..., a_2, b_2, c_2,... étant des quantités constantes, on devra avoir

$$(a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots)\frac{du}{dx} + (a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots)\frac{du}{dy} + \ldots = ku,$$

et l'on vérifiera cette équation en posant

$$u = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots,$$

pourvu que λ, μ, ν,... désignent des facteurs constants

propres à remplir les conditions

$$\begin{aligned}
a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots &= k\lambda,\\
b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu + \ldots &= k\mu,\\
c_1\lambda + c_2\mu + c_3\nu + \ldots &= k\nu,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
(a_1 - k)\lambda + a_2\mu + a_3\nu + \ldots &= 0,\\
b_1\lambda + (b_2 - k)\mu + b_3\nu + \ldots &= 0,\\
c_1\lambda + c_2\mu + (c_3 - k)\nu + \ldots &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

desquelles on déduit, par l'élimination de λ, μ, ν,..., l'équation

$$(a_1 - k)(b_2 - k)(c_3 - k)\ldots - a_2 b_1 (c_3 - k)\ldots + \ldots = 0,$$

qui renferme la seule inconnue k, et dont le degré est égal au nombre n des variables x, y, z,.... Les n racines de cette équation fourniront n systèmes de valeurs pour les coefficients λ, μ, ν,..., et les intégrales générales des équations données se trouveront toutes comprises dans la formule

$$u = ve^{k(t-\tau)},$$

ou

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots)e^{k(\tau - t)}.$$

Si aux équations que nous venons d'intégrer on substitue les suivantes

$$\begin{aligned}
dx &= [a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + f_1(t)]\,dt,\\
dy &= [a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + f_2(t)]\,dt,\\
dz &= [a_3 x + b_3 y + c_3 z + \ldots + f_3(t)]\,dt,\\
\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$,... étant des fonctions quelconques de la variable t; alors, en supposant toujours la fonction u

déterminée par la formule $u = \lambda x + \mu y + \nu z + \ldots$, choisissant les quantités λ, μ, ν, ... de manière à vérifier les mêmes conditions que ci-dessus ; et faisant pour abréger

$$\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \nu f_3(t) + \ldots = f(t),$$

on trouvera

$$\mathrm{F_D}u = ku + f(t), \quad \mathrm{S_D}u = -\int_\tau^t \mathrm{F_D}u\,dt = k(\tau - t)u - \int_\tau^t f(t)\,dt,$$

$$\mathrm{S_D^2}\,u = \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2}\,u - \int_\tau^t k(\tau - t)f(t)\,dt,$$

$$\mathrm{S_D^3}\,u = \frac{k^3(\tau - t)^3}{1.2.3}\,u - \int_\tau^t \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} f(t)\,dt,$$

....

et l'équation

$$\frac{u}{1 - \mathrm{S_D}} = u + \mathrm{S_D}u + \mathrm{S_D^2}\,u + \mathrm{S_D^3}u + \ldots = v$$

donnera

$$v = u\left[1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} + \ldots\right]$$
$$- \int_\tau^t \left[1 + k(\tau - t) + \frac{k^2(\tau - t)^2}{1.2} + \ldots\right] f(t)\,dt,$$

ou, ce qui revient au même,

$$v = u\,e^{k(\tau - t)} - \int_\tau^t e^{k(\tau - t)} f(t)\,dt,$$

ou

$$ue^{-kt} - ve^{-k\tau} = \int_\tau^t e^{-kt} f(t)\,dt,$$

ou enfin

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots = (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots)e^{k(\tau - t)}$$
$$+ e^{kt}\int_\tau^t e^{-kt}[\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \ldots]\,dt.$$

Les diverses équations que comprend cette dernière formule, eu égard aux n valeurs qu'on peut attribuer à la constante k, et par suite à λ, μ, ν,..., présentent le système des intégrales générales des équations proposées. Si deux, trois,... racines de l'équation en k deviennent égales entre elles, les deux, trois,... équations correspondantes à ces racines coïncideront et devront être remplacées, comme il est facile de le prouver par l'une d'entre elles, jointe à l'équation dérivée du premier ordre, ou aux deux équations dérivées du premier et du second ordre qu'on obtiendra en différentiant une ou plusieurs fois de suite les deux membres de l'équation conservée par rapport à la seule quantité k.

Pour montrer une dernière application de la formule $\frac{u}{1 - S_D} = \upsilon$, supposons les équations (D) réduites à une seule qui soit du premier degré par rapport à x et de la forme

$$dx = [f(t) + xF(t)]\,dt,$$

$f(t)$, $F(t)$ étant deux fonctions quelconques de t : on aura dans ce cas

$$F_1 = f(t) + xF(t), \quad F_D u = [f(t) + xF(t)]\,\frac{du}{dx},$$

$$S_D u = -\int_\tau^t [f(t) + xF(t)]\,\frac{du}{dx}\,dt,$$

et, par suite, en faisant $u = x$,

$$\xi = x\left[1 - \int_\tau^t F(t)\,dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt.dt - \ldots\right]$$
$$- \int_\tau^t f(t)\left[1 - \int_\tau^t F(t)dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt.dt - \ldots\right]dt.$$

D'autre part, $F(t)$ étant la dérivée de $\int_\tau^t F(t)\,dt$, on

aura

$$\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt\,.\,dt = \frac{1}{1.2}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^2,$$

$$\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt.dt.dt = \frac{1}{1.2.3}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^3,$$

. . . .

et, par suite,

$$1 - \int_\tau^t F(t)\,dt + \int_\tau^t F(t)\int_\tau^t F(t)\,dt\,.\,dt - \ldots\ldots$$

$$= 1 - \int_\tau^t F(t)\,dt + \frac{1}{2}\left[\int_\tau^t F(t)\,dt\right]^2 - \ldots = e^{-\int_\tau^t F(t)\,dt}.$$

donc l'intégrale générale sera donnée par l'équation

$$\xi = xe^{-\int_\tau^t F(t)\,dt} - \int_\tau^t f(t)e^{-\int_\tau^t F(t)\,dt}\,dt.$$

Dans les divers exemples que nous venons de passer en revue, la formule (I_t) fournit pour les équations différentielles proposées les intégrales connues, celles auxquelles avait été conduit par les diverses méthodes précédemment on développées.

286. Il est facile de prouver que la formule $e^{(\tau-t)F_D}u = v$ continuera de représenter une intégrale générale des équations (D), si u devenant une fonction explicite de toutes les variables x, y, z,..., t, on détermine $F_D u$, non plus à l'aide de l'équation

$$F_D u = F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots,$$

mais à l'aide de la suivante

$$F_D u = D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots,$$

pourvu toutefois que la série

$$u,\quad \frac{\tau - t}{1} F_D u,\quad \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u, \ldots$$

reste convergente, et que l'on désigne par v la valeur de u correspondante aux valeurs ξ, η, ζ, ..., τ des variables x, y, z, ..., t. En effet, si, dans cette dernière hypothèse, on pose

$$U = u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

comme on aura généralement

$$F_D . \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3\ldots n} F_D^n u = \frac{(\tau - t)^n}{1.2.3\ldots n} F_D^{n+1} u - \frac{(\tau - t)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F_D^n u,$$

on en conclura $F_D U = 0$, ou, ce qui revient au même,

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0.$$

Donc, dans l'hypothèse admise, $s = U$ sera une intégrale particulière de l'équation (C), et la formule

$$U = v, \quad \text{ou} \quad u + \frac{\tau - t}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots = v,$$

ou

$$e^{(\tau - t) F_D} u = v,$$

sera une intégrale générale des équations (D).

Au reste, on peut, dans la même hypothèse, déduire directement des équations (D) la formule $e^{(\tau - t) F_D} u = v$, à l'aide de la formule de Taylor. En effet, u étant une fonction quelconque de la variable indépendante t, et des variables dépendantes x, y, z, ..., liées à t par les équations (D), on aura, en vertu de ces équations, jointes à la formule qui définit la fonction $F_D u$,

$$du = F_D u . dt, \quad d . F_D u = F_D^2 u . dt, \quad d . F_D^2 u = F_D^3 u . dt,$$

et, par suite,

$$du = F_D u . dt, \quad d^2 u = F_D^2 u . dt^2, \quad d^3 u = F_D^3 u . dt^3, \ldots.$$

D'ailleurs si l'on nomme v une nouvelle valeur de u, cor-

respondante à une nouvelle valeur τ de la variable indépendante t, la formule de Taylor donnera pour les valeurs de la différence $\tau - t$, qui permettront de développer v en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières de cette différence,

$$v = u + \frac{(\tau - t)}{dt} du + \frac{(\tau - t)^2}{1.2\, dt^2} d^2u + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3\, dt^3} d^3u + \ldots,$$

et, en substituant pour du, $d^2u, \ldots$ les valeurs qui précèdent,

$$v = u + \frac{(\tau - t)}{1} F_D u + \frac{(\tau - t)^2}{1.2} F_D^2 u + \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3} F_D^3 u + \ldots = e^{(\tau - t) F_D} u.$$

Pour vérifier cette formule sur un exemple très-simple, concevons que les équations (D) se réduisent à

$$dx = \frac{x}{t} dt, \quad dy = \frac{y}{t} dt, \quad dz = \frac{z}{t} dt, \ldots,$$

on aura

$$F_D u = \frac{1}{t}(t D_t u + x D_x u + y D_y u + z D_z u),$$

et, par conséquent,

$$F_D u = \frac{u}{t},$$

lorsque u deviendra une fonction homogène du premier degré en $x, y, z, \ldots, t$. Mais alors $F_D u$ étant une fonction homogène d'un degré nul, on aura

$$F_D^2 u = 0, \quad F_D^3 u = 0, \quad F_D^4 u = 0,$$

et l'intégrale sera donnée dès lors par l'équation très-simple

$$v = u + \frac{\tau - t}{1} \frac{u}{t} = \frac{\tau}{t} u, \quad \text{ou} \quad \frac{u}{v} = \frac{t}{\tau}.$$

Si dans cette dernière formule on réduit successivement la fonction u aux variables $x, y, z, \ldots$, il faudra en même temps attribuer à la constante arbitraire v l'une des valeurs ξ, η, $\zeta, \ldots$, et l'on obtiendra ainsi les inté-

grales générales des équations proposées, sous la forme

$$\frac{x}{\xi}=\frac{t}{\tau},\quad \frac{y}{\eta}=\frac{t}{\tau},\quad \frac{z}{\zeta}=\frac{t}{\tau},\ldots;$$

on arriverait directement à ces mêmes valeurs en intégrant les deux membres de chacune des équations

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t},\quad \frac{dy}{y}=\frac{dt}{t},\quad \frac{dz}{z}=\frac{dt}{t},\ldots.$$

287. On pourrait encore généraliser la formule

$$(I_1)\qquad v=u+\frac{\tau-t}{1}\mathrm{F}_{\mathrm{D}}u+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}\mathrm{F}_{\mathrm{D}}^2u+\ldots,$$

en y remplaçant la variable indépendante t, et la quantité τ, par une fonction donnée r des variables x, y, z,..., t, et par la valeur particulière ρ de r, correspondante à $t=\tau$. Effectivement, r et u étant deux fonctions quelconques de x, y, z,..., t, les équations différentielles (D) obligent x, y, z,..., t, et par conséquent aussi les fonctions r et u, à varier simultanément; et si l'on nomme ρ et v deux valeurs correspondantes de ces fonctions, v sera ce que devient la fonction u quand la variable r reçoit l'accroissement $\rho-r$; or, en admettant que v soit développable, par la formule de Taylor, en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cet accroissement, on aura, en représentant par

$$\frac{du}{dr},\quad \frac{d\frac{du}{dr}}{dr},\ldots,$$

les rapports entre les différentielles totales des fonctions r, u, $\frac{du}{dr}$,...,

$$v=u+\frac{\rho-r}{1}\frac{du}{dr}+\frac{(\rho-r)^2}{1.2}\frac{d.\frac{du}{dr}}{dr}+\ldots.$$

on a d'ailleurs identiquement

$$dr = D_t r dt + D_x r dx + D_y r dy + D_z r dz + \ldots,$$
$$du = D_t u dt + D_x u dx + D_y u dy + D_z u dz + \ldots,$$

et, en vertu des équations (D),

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3} \ldots = dt = \frac{dr}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots}$$
$$= \frac{du}{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots},$$
$$\frac{du}{dr} = \frac{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots};$$

donc, si l'on fait, pour abréger,

$$F_D u = \frac{D_t u + F_1 D_x u + F_2 D_y u + F_3 D_z u + \ldots}{D_t r + F_1 D_x r + F_2 D_y r + F_3 D_z r + \ldots},$$

on aura simplement

$$\frac{du}{dr} = F_D u,$$

on en conclura

$$\frac{d\frac{du}{dr}}{dr} = \frac{dF_D u}{dr} = F_D^2 u \ldots,$$

et, par suite,

$$v = u + \frac{\rho - r}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

ou

$$v = e^{(\rho - r) F_D} u.$$

Ajoutons que ces dernières formules représenteront une intégrale générale des équations proposées, tant que la série

$$u, \quad \frac{\rho - r}{1} F_D u, \quad \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u, \ldots$$

sera convergente ; en effet, si l'on fait, pour abréger,

$$U = u + \frac{(\rho - r)^2}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

comme, en vertu de l'équation qui définit $F_D u$ au moyen de r et de u, on a $F_D r = 1$, et, par suite,

$$F_D . \frac{(\rho - r)^n}{1.2.3\ldots n} F_D^n u = \frac{(\rho - r)^n}{1.2.3\ldots n} F_D^{n+1} u - \frac{(\rho - r)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} F_D^n u,$$

on trouvera $F_D U = 0$, et, par conséquent,

$$D_t U + F_1 D_x U + F_2 D_y U + F_3 D_z U + \ldots = 0;$$

donc $s = U$ sera une intégrale particulière de l'équation (C), et la formule

$$v = u + \frac{\rho - r}{1} F_D u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} F_D^2 u + \ldots,$$

sera une intégrale générale des équations (D).

288. Si, en supposant u fonction des seules variables $x, y, z, \ldots$, on nomme $F'_D u$, $F''_D u$, $F'''_D u, \ldots$ ce que devient $F_D u$ lorsque dans les quantités $F_1, F_2, F_3, \ldots$, considérées comme fonctions de $x, y, z, \ldots, t$, on remplace la seule variable t par de nouvelles variables $t', t'', t''', \ldots$, on aura évidemment

$$S_D u = -\int_\tau^t F_D u dt = -\int_\tau^{t=t'} F'_D u dt' = -\int_\tau^{t=t'=t''} F''_D u dt'',$$

$$S_D^2 u = \int_\tau^t F'_D \int_\tau^{t'} F''_D u dt'' dt' = \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F'_D F''_D dt'' dt',$$

$$S_D^3 u = -\int_\tau^t F'_D \int_\tau^{t'} F''_D \int_\tau^{t''} F'''_D u dt''' dt'' dt'$$

$$= -\int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} F'_D F''_D F'''_D u dt''' dt'' dt',$$

. . . .

et par suite l'intégrale générale des équations (D) de-

viendra

$$(\mathrm{I}')\left\{\begin{aligned} v &= u - \int_\tau^t \mathrm{F}'_\mathrm{D} u\,dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \mathrm{F}'_\mathrm{D}\mathrm{F}''_\mathrm{D} u\,dt''dt' \\ &\quad - \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} \mathrm{F}'_\mathrm{D}\mathrm{F}''_\mathrm{D}\mathrm{F}'''_\mathrm{D} u\,dt'''dt''dt' + \ldots . \end{aligned}\right.$$

Lorsque les fonctions F_1, F_2, F_3, ... ne renferment pas explicitement la variable t, on a

$$\mathrm{F}_\mathrm{D} u = \mathrm{F}'_\mathrm{D} u = \mathrm{F}''_\mathrm{D} u = \ldots, \quad \mathrm{F}'_\mathrm{D}\mathrm{F}''_\mathrm{D} u = \mathrm{F}^2_\mathrm{D} u, \ldots,$$

et de plus,

$$-\int_\tau^t dt = \frac{\tau - t}{1},$$

$$\int_\tau^t \int_\tau^{t'} dt''dt' = \frac{(\tau - t)^2}{1.2}, \quad -\int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} dt'''dt''dt' = \frac{(\tau - t)^3}{1.2.3}.$$

La formule (I′) devient, comme cela devait être, la formule (I_1).

Il est bon d'observer que, dans le cas où l'on considère seulement deux variables x et t, et où l'équation

$$\mathrm{D}_t s + \mathrm{F}_1 \mathrm{D}_x s + \mathrm{F}_2 \mathrm{D}_y s + \mathrm{F}_3 \mathrm{D}_z s + \ldots = 0$$

se réduit, quand on y fait $s = \mathrm{U}$, à

$$\mathrm{D}_t \mathrm{U} + \mathrm{F}_1 \mathrm{D}_x \mathrm{U} = 0,$$

la différentielle totale de la fonction U,

$$d\mathrm{U} = \mathrm{D}_t \mathrm{U}\,dt + \mathrm{D}_x \mathrm{U}\,dx,$$

se réduit, quand on y substitue pour $\mathrm{D}_t\mathrm{U}$ sa valeur $-\mathrm{F}_1\mathrm{D}_x\mathrm{U}$, à un produit de la forme $\mathrm{V}(dx - \mathrm{F}_1 dt)$, la valeur de V étant $\mathrm{V} = \mathrm{D}_x\mathrm{U}$; donc la fonction U étant déterminée par une des équations

$$\mathrm{U} = u + \mathrm{S}_\mathrm{D} u + \mathrm{S}^2_\mathrm{D} u + \mathrm{S}^3_\mathrm{D} u + \ldots,$$

$$\mathrm{U} = u + \frac{\rho - r}{1} \mathrm{F}_\mathrm{D} u + \frac{(\rho - r)^2}{1.2} \mathrm{F}^2_\mathrm{D} u + \ldots,$$

le facteur $\mathrm{V} = \mathrm{D}_x\mathrm{U}$ sera propre à rendre intégrable le premier membre d'une équation différentielle entre x

et t, présentée sous la forme $dx - F_1\,dt = 0$; effectivement, l'équation $D_t U + F_1 D_x U = 0$, différentiée par rapport à x, donne

$$D_t V = D_x(-F_1 V),$$

équation qui exprime bien l'intégrabilité du produit $V(dx - F_1\,dt)$, et qu'on peut regarder comme une équation aux dérivées partielles propre à déterminer le facteur V en fonction des variables x et t.

Si, à la place des équations données (D), qui sont du premier ordre, on considérait une ou plusieurs équations différentielles d'ordre supérieur, pour réduire celles-ci à n'être plus que des équations différentielles du premier ordre, il suffirait de leur adjoindre quelques-unes des formules

$$D_t x = x',\quad D_t x' = x'',\ldots,\quad D_t y = y',\quad D_t y' = y'',\ldots,$$

c'est-à-dire de nouvelles équations différentielles qui seraient elles-mêmes du premier ordre dans le cas où l'on prendrait pour inconnues non-seulement $x, y, z, \ldots$, mais encore quelques-unes des fonctions dérivées $x', x'', \ldots$, $y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$.

A l'aide de cet artifice, on déduira sans peine de la formule

$$\begin{aligned}&\lambda x + \mu y + \nu z + \ldots\\ &= (\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta + \ldots)e^{k(t-\tau)} + e^{kt}\int_\tau^t e^{-kt}[\lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \ldots]\end{aligned}$$

l'intégrale générale sous forme finie d'une équation linéaire à coefficients constants avec un second membre variable, c'est-à-dire d'une équation de la forme

$$D_t^n x + A_1 D_t^{n-1} x + A_2 D_t^{n-2} x + \ldots + A_{n-1} D_t x + A_n x = T.$$

QUARANTE-UNIÈME LEÇON.

Détermination des limites entre lesquelles les séries qui représentent les intégrales générales d'un système d'équations différentielles restent convergentes, et des erreurs que l'on commet en conservant seulement, dans chaque série, les n premiers termes.

---

289. Il nous reste à faire voir comment on peut s'assurer généralement que les séries de la leçon précédente sont convergentes, du moins pour des valeurs de la différence $t-\tau$, ou $\tau-t$ suffisamment rapprochées de zéro, et comment on peut alors fixer des limites supérieures aux erreurs que l'on commet en conservant seulement, dans chaque série, les n premiers termes. Nous y parviendrons facilement à l'aide de quelques procédés nouveaux dont l'ensemble a paru assez important à M. Cauchy pour qu'il ait essayé d'en faire un calcul nouveau, qu'il a appelé *calcul des limites*.

Soient r une quantité positive, θ un arc réel, et $f(x)$ une fonction quelconque de la variable réelle ou imaginaire x; on aura évidemment

$$D_r f\left(x+re^{\theta\sqrt{-1}}\right)=\frac{1}{r\sqrt{-1}}D_\theta f\left(x+re^{\theta\sqrt{-1}}\right).$$

Or, si l'on intègre les deux membres de cette équation, 1° par rapport à r, et à partir de $r=0$; 2° par rapport à θ entre les limites $\theta=-\pi$, $\theta=+\pi$, et si l'on suppose

que la fonction de x, r et θ, représentée par $f(x+re^{\theta\sqrt{-1}})$, reste finie et continue, quel que soit θ, pour la valeur attribuée à r, et pour une valeur plus petite, on trouvera

$$\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{0}^{r} D_r f(x+re^{\theta\sqrt{-1}})\,dr\,d\theta = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,d\theta = 2\pi f(x),$$

et l'on en conclura

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x+re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta.$$

Si l'on différentie cette équation n fois de suite, par rapport à x, on en tirera

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^{(n)}(x+re^{\theta\sqrt{-1}})\,d\theta;$$

puis, en intégrant par parties le second membre de cette dernière n fois de suite, on aura

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n}e^{-n\theta\sqrt{-1}} f(x+re^{\theta\sqrt{-1}}).$$

L'expression $re^{\theta\sqrt{-1}}$ peut être considérée comme un accroissement imaginaire attribué à la variable x : désignons-le par h_i, en sorte que l'on ait $re^{\theta\sqrt{-1}} = h_i$, et représentons par $L f(x+h_i)$ ou L_f la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire $f(x+h_i)$, lorsque dans la valeur de $h_i = re^{\theta\sqrt{-1}}$ on fait varier l'angle θ sans changer le module r. Le module de l'expression

$$r^{-n}e^{-n\theta\sqrt{-1}} f(x+re^{\theta\sqrt{-1}})$$

sera inférieur, ou tout au plus égal au produit $r^{-n} L_f$, et la valeur numérique de l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n} e^{-n\theta\sqrt{-1}} \mathrm{f}\left(x + re^{\theta}\sqrt{-1}\right) d\theta$$

ne dépassera pas l'expression $2\pi r^{-n} L_f$, de sorte qu'en représentant par l'initiale M le module ou la valeur numérique d'une expression quelconque imaginaire ou réelle, on aura

$$M . \mathrm{f}^{(n)}(x) < 1.2.3 \ldots n r^{-n} L_f,$$

comme on a d'ailleurs généralement

$$1.2.3 \ldots n r^{-n} = (-1)^n r \mathrm{D}_r^n . r^{-1};$$

on aura aussi

$$M . \mathrm{f}^{(n)}(x) < (-1)^n r \mathrm{D}_r^n . r^{-1} L_f .$$

Cette équation subsistera encore pour $n = 0$ et l'on aura $M.\mathrm{f}(x) < L_f$, comme on aurait pu le conclure directement de l'équation

$$\mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{f}(x + h_i)\, d\theta.$$

Les équations qui précèdent supposent, comme nous l'avons déjà exprimé, que la fonction

$$\mathrm{f}(x + h_i) = \mathrm{f}\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)$$

reste finie et continue quel que soit θ pour la valeur attribuée à r.

290. Cela posé, revenons à l'intégration des équations différentielles, et supposons d'abord qu'il s'agisse d'exprimer en série l'intégrale générale d'une seule équation $dx = \mathrm{F}_1\, dt$, dans laquelle $\mathrm{F}_1 = \mathrm{X} = \varphi(x)$ est fonction de la seule variable x. Si l'on désigne par $u = f(x)$ une nouvelle fonction de x seule, l'intégrale cherchée sera,

comme nous l'avons vu, donnée par l'équation

$$(\mathrm{I}_1)\quad f(\xi)=v=f(x)+(r-t)\,\mathrm{F_D}f(x)+\frac{(r-t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2}f(x)+\frac{(r-t)^3}{1.2.3}\mathrm{F_D^3}f(x)+\ldots,$$

dans laquelle on aura

$$\mathrm{F_D}f(x)=\mathrm{F_1}\,\mathrm{D}_x f(x)=\varphi(x)\,\mathrm{D}_x f(x),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{F_D}f(x)=\varphi(x)f'(x);$$

on aura donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_D}\,f(x)&=\varphi(x)f'(x),\\
\mathrm{F_D^2}\,f(x)&=[\varphi(x)]^2 f''(x)+\varphi(x)\varphi'(x)f'(x),\\
\mathrm{F_D^3}\,f(x)&=[\varphi(x)]^3 f'''(x)+3[\varphi(x)]^2\varphi'(x)f''(x),\\
&\quad+[\varphi(x)]^2\varphi''(x)+\varphi(x)[\varphi'(x)]^2 f'(x),
\end{aligned}$$

....

De ces équations, jointes aux considérations précédentes, on déduira

$$\begin{aligned}
M.\mathrm{F_D}f(x)&<\mathrm{R_1}.\,rL_\varphi\,.\,rL_f,\\
M.\mathrm{F_D^2}f(x)&<\mathrm{R_2}\,(rL_\varphi)^2.rL_f,\\
M.\mathrm{F_D^3}f(x)&<\mathrm{R_3}\,(rL_\varphi)^3.rL_f,
\end{aligned}$$

....

$\mathrm{R_1}$, $\mathrm{R_2}$, $\mathrm{R_3}$.... étant des fonctions de r déterminées par les équations

$$\begin{aligned}
-\mathrm{R_1}&=r^{-1}\quad\mathrm{D}_r r^{-1},\\
\mathrm{R_2}&=(r^{-1})^2\,\mathrm{D}_r^2 r^{-1}+r^{-1}(\mathrm{D}_r r^{-1})\mathrm{D}_r r^{-1},\\
-\mathrm{R_3}&=(r^{-1})^3\,\mathrm{D}_r^3 r^{-1}+3(r^{-1})^2\,\mathrm{D}_r r^{-1}\,\mathrm{D}_r^2 r^{-1}\\
&\quad+(r^{-1})^2\,\mathrm{D}_r^2 r^{-1}+r^{-1}(\mathrm{D}_r r^{-1})^2\mathrm{D}_r r^{-1},
\end{aligned}$$

et la valeur de r devant être telle que chacune des fonctions $f(x+h_i)$, $\varphi(x+h_i)$ demeure finie et continue

pour cette même valeur de r et pour une valeur plus petite. D'ailleurs, les valeurs de $-R_1$, R_2, $-R_3, \ldots$ sont évidemment ce que deviennent les valeurs de $F_D f(x)$, $F_D^2 f(x)$, $F_D^3 f(x), \ldots$, quand, après avoir fait

$$\varphi(x) = f(x) = x^{-1},$$

on remplace la variable x par le module r, et il ne pouvait en être autrement, puisque dans le second membre de la formule

$$M.\mathrm{f}^{(n)}(x) < (-1)^n D_r^n r^{-1} . rL_{\mathrm{f}},$$

le coefficient du produit rL_{f} est, abstraction faite du signe, ce que devient $\mathrm{f}^{(n)}(x)$ quand, après avoir posé $\mathrm{f}(x) = x^{-1}$, on substitue r à x. On aura généralement

$$M.F_D^n f(x) < R_n (rL_\varphi)^n rL_f,$$

$(-1)^n R_n$ étant ce que devient la valeur de $F_D^n \mathrm{f}(x)$, correspondante aux valeurs de $\varphi(x)$, $f(x)$, données par l'équation $\varphi(x) = f(x) = x^{-1}$, quand on y remplace x par r. Or on tire de l'équation

$$F_D f(x) = \varphi(x) D_x f(x),$$

jointe à la condition $\varphi(x) = f(x) = x^{-1}$,

$$\begin{aligned}
F_D f(x) &= x^{-1} D_x x^{-1} = - x^{-3}, \\
F_D^2 f(x) &= x^{-1} D_x - x^{-3} (\quad) = 3x^{-5}, \\
F_D^3 f(x) &= x^{-1} D_x 3x^{-5} = - 3.5 x^{-7}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_D^n f(x) &= (-1)^n \, 1.3.5\ldots(2n-1) x^{-(2n+1)};
\end{aligned}$$

on aura donc

$$R_n = 1.3.5\ldots(2n-1)\, r^{-(2n+1)},$$

et par conséquent

$$M.F_D^n f(x) < 1.3.5\ldots(2n-1)\, r^{-n} (L_\varphi)^n L_f.$$

Enfin, comme on a évidemment

$$L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}=\frac{L\varphi(x+h_i)}{r},$$

on aura aussi

$$M.\mathrm{F}_{\mathrm{D}}^{n}f(x)<1.3.5\ldots(2n-1)\left[L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f.$$

Cela posé, le terme général de la série qui donne l'intégrale cherchée, savoir,

$$\frac{(r-t)^n}{1.2.3\ldots n}\mathrm{F}_{\mathrm{D}}^{n}f(x),$$

offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left[(r-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f,$$

par conséquent à celle du produit

$$\left[2\,(r-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f,$$

puisque l'on a évidemment

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}<\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}=2^n.$$

Donc les différents termes de la série en question offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait pour terme général l'expression

$$\left[2\,(r-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n L_f;$$

or cette progression sera convergente si l'on a

$$M.\left[2(r-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]<1,$$

ou

$$M.(\tau - t) < \frac{1}{2} \frac{1}{L \frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}},$$

et alors, si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses n premiers termes, le reste de la série ou l'erreur commise sera inférieure, abstraction faite du signe, à

$$(\mathrm{E}_f) \qquad \frac{\left[M.2(\tau-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n}{1-M.2(\tau-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}} Lf.$$

Supposons en particulier $f(x) = x$, l'intégrale cherchée deviendra

$$\xi = x + (\tau - t)\,\mathrm{F_D}x + \frac{(\tau-t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2}x + \frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}\mathrm{F_D^3}x + \dots,$$

et le reste de la série comprise dans le second membre de cette équation sera inférieur, abstraction faite du signe, à

$$[\mathrm{E}_1^{(x)}] \qquad \frac{\left[M.2(\tau-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}\right]^n}{1-M.2(\tau-t)\,L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}} L(x+h_i).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

. *Théorème* 1er. Supposons que la variable t et la fonction x étant liées entre elles par l'équation différentielle $dx = \varphi(x)\,dt$, l'on nomme ξ une nouvelle valeur de la fonction x correspondante à une nouvelle valeur τ de la variable t; ξ sera développable par la formule

$$[\mathrm{I}^{(x)}] \quad \xi = x + (\tau - t)\mathrm{F_D}x + \frac{(\tau-t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2}x + \frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}\mathrm{F_D^3}x + \dots,$$

en une série convergente ordonnée suivant les puissances

ascendantes de la différence $\tau - t$, si l'on a

$$[E_1^{(x)}] \qquad M.(\tau - t) < \frac{1}{2} \frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}},$$

la valeur du module r de $h_i = re^{\theta\sqrt{-1}}$ étant assujettie à la seule condition que la fonction $\varphi(x+h_i)$ reste finie et continue, quel que soit l'angle θ, pour cette valeur et une valeur plus petite. Alors le reste de la série réduite à ses n premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit $[E_1^{(x)}]$.

Alors aussi une fonction quelconque de ξ, $f(\xi)$ sera elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\tau - t$, et le reste de cette dernière série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (E_1), si la valeur du module r est assujettie à la double condition que les deux fonctions $f(x+h_i)$, $\varphi(x+h_i)$ demeurent finies et continues quel que soit l'angle θ pour cette valeur de r et pour une valeur plus petite. Il est avantageux de choisir le module r de h_i de telle sorte que la limite assignée pour le module de $\tau - t$ devienne la plus grande possible. On y parviendra en réduisant la quantité $L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}$ à la plus petite valeur qu'elle puisse acquérir.

Pour montrer sur un exemple très-simple une application des formules qui précèdent, concevons que l'équation $dx = \varphi(x)\,dt$ se réduit à $dx = x^a\,dt$, a désignant une constante positive. Si l'on suppose x positif, afin que $\varphi(x) = x^a$ soit toujours réel, l'expression

$$\varphi(x+h_i) = \left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right)^a$$

ne restera continue pour des valeurs fractionnaires ou irrationnelles de l'exposant a qu'autant que l'on aura

$r < x$: on aura alors

$$L(x+h_i) = x + r,\quad L(x+h_i)^a = (x+r)^a,\quad L\frac{(x+h_i)^a}{h_i} = \frac{(x+r)^a}{r}.$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition $r < x$, sera, 1° si l'on suppose $a < 2$, la valeur qui correspond à $r = x$, savoir, $r^a x^{a-1}$; 2° si l'on suppose $a > 2$, la valeur qui correspond à la formule

$$D_r \frac{(x+r)^a}{r} = 0, \quad \text{ou} \quad r = \frac{x}{a-1},$$

savoir,

$$\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}\, x^{a-1};$$

donc, en vertu du théorème premier, ξ et τ désignant deux valeurs correspondantes des variables x et t assujetties à vérifier l'équation $dx = x^a\, dt$, ξ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, tant que la valeur numérique de cette différence restera inférieure à la moitié du rapport $\frac{1}{2^a x^{a-1}}$, si l'on a $a < 2$; et à la moitié du rapport $\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a x^{a-1}}$ si l'on a $a > 2$. Or, en effet, on tire de l'équation $dx = x^a\, dt$, intégrée directement,

$$\frac{\xi^{a-1} - x^{a-1}}{1-a} = \tau - t,\quad \xi = x[1-(a-1)x^{a-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{1-a}},$$

et la puissance $[1-(a-1)x^{a-1}(\tau - t)]^{\frac{1}{1-a}}$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, si la valeur numérique de cette différence est inférieure à celle du

rapport $\frac{1}{(a-1)x^{a-1}}$. D'ailleurs, il est clair que ce dernier rapport surpassera toujours, abstraction faite du signe, le rapport $\frac{1}{2^a x^{a-1}}$, et à plus forte raison sa moitié, si l'on suppose $a < 2$; le rapport $\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a x^{a-1}}$, et à plus forte raison sa moitié, si l'on suppose $a > 2$. En effet, on aura dans la première hypothèse, $M.\frac{1}{a-1} > 1 > \frac{1}{2^a}$; et dans la seconde, $a^a > (1-a)^a$, $\frac{1}{a-1} > \frac{(1-a)^{a-1}}{a^a}$. Donc le théorème premier se vérifie à l'égard de l'équation $dx = x^a dt$: et même il résulte de ce qu'on vient de dire que, pour une équation différentielle de cette forme, on obtiendra encore une limite supérieure à la valeur numérique que la différence $\tau - t$ peut acquérir si à la formule

$$M.(\tau - t) = \frac{1}{2} \frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}},$$

on substitue

$$M.(\tau - t) = \frac{1}{L\frac{\varphi(x+h_i)}{h_i}}.$$

Cette remarque s'applique pareillement aux équations différentielles

$$dx = x^{-a}\,dt, \quad dx = e^{ax}\,dt, \quad dx = e^{-ax}\,dt, \ldots,$$

dont il est facile de calculer directement les intégrales.

292. Concevons à présent que dans le second membre de l'équation $dx = F_1 dt$, F_1 soit à la fois fonction de x et de t, en sorte qu'on ait $F_1 = f(x, t)$. Alors l'intégrale

sera fournie par la formule

$$(\mathbf{I}_4)\left\{\begin{aligned} f(\xi) = f(x) - \int_\tau^t \mathrm{F}'_{\mathrm{D}} f(x)\,dt + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}} f(x)\,dt''dt' \\ - \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} \mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} f(x)\,dt'''dt''dt' + \dots, \end{aligned}\right.$$

dans laquelle on aura

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{D}} f(x) = \mathrm{f}(x, t')f'(x), \quad \mathrm{F}''_{\mathrm{D}} f(x) = \mathrm{f}(x, t'')f'(x),$$
$$\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} f(x) = \mathrm{f}(x, t''')f'(x), \dots,$$

et, par suite,

$$\mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}} f(x) = \mathrm{f}(x, t')\mathrm{f}(x, t'')f''(x) + \mathrm{f}(x, t')\mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t'').f'(x),$$
$$\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} f(x) = \mathrm{f}(x, t'')\mathrm{f}(x, t''')f''(x) + \mathrm{f}(x, t'')\mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t''').f'(x),$$
$$\begin{aligned} \mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} f(x) &= \mathrm{f}(x, t')\mathrm{f}(x, t'')\mathrm{f}(x, t''')f'''(x) \\ &+ \mathrm{f}(x, t')[2\mathrm{f}(x, t'')\mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t''') + \mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t'')\mathrm{f}(x, t''')]f''(x) \\ &+ \mathrm{f}(x, t')[\mathrm{f}(x, t'')\mathrm{D}_x^2\mathrm{f}(x, t''') + \mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t'')\mathrm{D}_x\mathrm{f}(x, t''')]f'(x), \end{aligned}$$

. . . .

D'autre part, comme dans les intégrales définies les variables t', t'', t''',... devront rester comprises, la première entre les limites τ et t, la seconde entre les limites τ et t', la troisième entre les limites τ et t'',..., il est clair que ces variables resteront toutes comprises entre les limites τ et t; d'où il suit que chacune d'elles pourra être représentée par une expression de la forme $t + \varepsilon(\tau - t)$, ε désignant un nombre renfermé entre les limites 0, 1. Cela posé, si l'on représente encore par L_f la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire $\mathrm{f}[x + h_i, t + \varepsilon(\tau - t)]$, lorsque dans h_i on fait varier l'angle θ sans changer la valeur de r, ni celle de ε; si d'ailleurs on nomme ε_m celle des valeurs de ε pour laquelle le module L_f devient le plus grand possible, et n un nombre entier quelconque, on tirera successivement

de la formule $M.\mathrm{f}^{(n)}(x) < (-1)^n \mathrm{D}_r^n (r^{-1})\, r\, L_{\mathrm{f}}$,

$$M.\mathrm{D}_x^n \mathrm{f}(x, t') < (-1)^n \mathrm{D}_r^n (r^{-1}) r L_{\mathrm{f}},$$
$$M.\mathrm{D}_x^n \mathrm{f}(x, t'') < (-1)^n \mathrm{D}_r^n (r^{-1}) r L_{\mathrm{f}},$$
$$M.\mathrm{D}_x^n \mathrm{f}(x, t''') < (-1)^n \mathrm{D}_r^n (r^{-1}) r L_{\mathrm{f}};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

puis de ces dernières formules on conclura, en désignant par L_{f}^{tm} le module *maximum maximorum*, et par R_1, R_2, R_3,... les mêmes fonctions de r que ci-dessus,

$$M.\mathrm{F}'_{\mathrm{D}} f(x) < \mathrm{R}_1 . r L_{\mathrm{f}}^{tm} . r L_f,$$
$$M.\mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}} f(x) < \mathrm{R}_2 . r L_{\mathrm{f}}^{tm} . r L_f,$$
$$M.\mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}} f(x) < \mathrm{R}_3 . r L_{\mathrm{f}}^{tm} . r L_f,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Il fallait nécessairement que les coefficients R_1, R_2, R_3,... conservassent les mêmes valeurs que précédemment; car lorsqu'on réduit la fonction $\mathrm{f}(x, t)$ à $\mathrm{f}(x)$, les dernières formules doivent coïncider avec celles que nous avons déjà obtenues, et cela arrive effectivement, mais sous la condition que les valeurs de R_1, R_2, R_3,... restent les mêmes dans les deux systèmes de formules. La valeur générale de R_n restant la même, on aura, pour une valeur quelconque de n,

$$M.\mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}}\ldots\mathrm{F}^{(n)}_{\mathrm{D}} f(x) < 1.3.5\ldots(2n-1)\, r^{-n}\left(L^{tm}\frac{\mathrm{f}}{h_i}\right)^n L_f,$$

ou, ce qui revient au même,

$$M.\mathrm{F}'_{\mathrm{D}}\mathrm{F}''_{\mathrm{D}}\mathrm{F}'''_{\mathrm{D}}\ldots\mathrm{F}^{n}_{\mathrm{D}} f(x) < 1.3.5\ldots(2n-1)\left\{L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\iota_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}^n L_f.$$

Donc le terme général de la série qui donne l'intégrale cherchée offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\left\{(\tau-t)\,L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\iota_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}^n L_f,$$

et, à plus forte raison, à celle du produit

$$\left\{2(\tau - t)\,L\,\frac{\mathrm{f}[x + h_i,\ t + \iota_m(\tau - t)]}{h_i}\right\}^n L_f;$$

donc enfin la série en question sera convergente si l'on a

$$(\mathrm{C}'_t)\qquad M.\left\{2(\tau - t)\,L\,\frac{\mathrm{f}[x + h_i,\ t + \iota_m(\tau - t)]}{h_i}\right\} < 1,$$

et alors, le reste de la série réduite à ses n premiers termes offrira une valeur numérique inférieure au produit

$$(\mathrm{R}'_t)\qquad \frac{\left\{M.\left\{2(\tau - t)\,L\,\frac{\mathrm{f}[x + h_i,\ t + \iota_m(\tau - t)]}{h_i}\right\}\right\}^n}{1 - M.\left\{2(\tau - t)\,L\,\frac{\mathrm{f}[x + h_i,\ t + \iota_m(\tau - t)]}{h_i}\right\}}\,L_f.$$

Il est important d'observer que le module r de h_i doit être tel que chacune des fonctions

$$\mathrm{f}[x + h_i,\quad t + \iota(\tau - t)],\quad f(x + h_i),$$

demeure finie et continue quel que soit l'angle θ, pour la valeur attribuée à ce module, et pour une valeur plus petite. Il sera d'ailleurs avantageux de choisir ce même module de telle sorte que la limite assignée par la formule (C'_t) à la valeur numérique de $\tau - t$ soit la plus grande possible. Si l'on pose en particulier $f(x) = x$, l'intégrale deviendra

$$[\mathrm{I}'^{(x)}_t]\left\{\begin{aligned} \xi = x &- \int_\tau^t \mathrm{F}'_\mathrm{D}\, x.dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \mathrm{F}'_\mathrm{D}\mathrm{F}''_\mathrm{D}\, x dt'' dt' \\ &- \int_\tau^t \int_\tau^{t'} \int_\tau^{t''} \mathrm{F}'_\mathrm{D}\mathrm{F}''_\mathrm{D}\mathrm{F}'''_\mathrm{D}\, x dt''' dt'' dt' + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et le reste de la série comprise dans le second membre de cette formule sera inférieur, abstraction faite du

signe, à

$$[\mathrm{E}^{(x)}]\quad \frac{\left[M.\left\{2(\tau-t)L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}\right]^n}{1-M.\left\{2(\tau-t)L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i}\right\}}L(x+h_i).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

293. 2me *Théorème.* Supposons que la variable t et la fonction x de cette variable étant liées entre elles par l'équation différentielle

$$dx = \mathrm{f}(x,\ t)\,dt,$$

on nomme ξ une nouvelle valeur de la fonction x, correspondante à une nouvelle valeur τ de la variable t, sera développable par la formule $[\mathrm{I}_t^{(x)}]$ en série convergente. Si l'équation (C'_t) est vérifiée, c'est-à-dire si la valeur numérique de la différence $\tau - t$ est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(\tau - t)\,L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\varepsilon_m(\tau-t)]}{h_i} = \tfrac{1}{2},$$

la valeur du module r de h_i étant assujettie à la seule condition que la fonction $\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\varepsilon(\tau-t)]$ demeure finie et continue, quel que soit l'angle θ, pour cette valeur de r et pour une valeur plus petite. Alors le reste de la série réduite à ses n premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit $[\mathrm{E}_t^{(x)}]$. Alors aussi une fonction quelconque de ξ, désignée par $f(\xi)$, sera elle-même développable, par la formule (I'_t), en une série convergente, et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (E'_t), si le module r est assujetti à la double condition que les deux fonctions $f(x+h_i)$, $\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\varepsilon(\tau-t)]$, demeurent finies et continues, quel que soit l'angle θ, pour la valeur

attribuée à ce module, et pour une valeur plus petite.

Pour montrer une application des formules qu'on vient d'établir, concevons que l'équation

$$dx = f(x, t)\, dt$$

se réduise à

$$dx = (x + t)^a dt,$$

a désignant une quantité positive quelconque. Si l'on suppose $x + t$ positif, afin que $f(x + t)$ soit réelle, et $\tau < t$, la fonction

$$f[x + h_i,\ t + \varepsilon(\tau - t)] = [x + h_i + t + \varepsilon(\tau - t)]^a$$

ne restera continue pour $\varepsilon = 0$, qu'autant que l'on aura

$$r < x + t;$$

alors on trouvera

$$L[x + h_i + t + \varepsilon(\tau - t)]^a = [x + r + t + \varepsilon(\tau - t)]^a,$$

et, en nommant ε_m la valeur de ε pour laquelle cette dernière expression devient la plus grande possible, on aura $\varepsilon_m = 1$,

$$L\,\frac{[x + h_i + t + \varepsilon_m(\tau - t)]^a}{h_i} = \frac{(x + \tau + r)^a}{r}.$$

La plus petite valeur que puisse acquérir cette dernière quantité, eu égard à la condition $r < x + t$, sera celle qui correspond à $r = x + t$, savoir,

$$\frac{(2x + t + \tau)^a}{x + t};$$

ou celle qui correspond à $r = \dfrac{x + \tau}{a - 1}$, savoir,

$$\frac{a^a}{(a - 1)^{a-1}}(x + \tau)^{a-1},$$

suivant que $x+t$ sera inférieur ou supérieur à $\frac{x+\tau}{a-1}$, c'est-à-dire, en d'autres termes, suivant que le nombre a sera inférieur ou supérieur à l'expression

$$1+\frac{x+\tau}{x+t}=2+\frac{\tau-t}{x+t}.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose le nombre a inférieur à 2, il sera inférieur, à plus forte raison, à l'expression $2+\frac{\tau-t}{x+t}$, et, en remplaçant dans la formule

$$(\tau-t)\,L\frac{\mathrm{f}[x+h_i,\ t+\iota_m(\tau-t)]}{h_i}=\tfrac{1}{2},$$

le coefficient de $\tau-t$ par le produit $\frac{(2x+t+\tau)^a}{x+t}$, on réduira cette formule à

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^a=\tfrac{1}{2}(x+t).$$

Cette équation est évidemment vérifiée par une valeur positive de τ, comprise entre les limites $\tau=t$, $\tau=\infty$, qui, substituées dans le premier membre, le rendent successivement nul et infini. Il y a plus : comme on a généralement

$$\frac{(2x+t+\tau)^{a+1}-(2x+2t)^{a+1}}{a+1}$$
$$=\int_{\tau}^{t}(2x+t+\tau)^a\,d\tau<(\tau-t)(2x+t+\tau)^a\,;$$

il est clair que la valeur de τ, propre à vérifier la formule

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^a=\tfrac{1}{2}(x+t),$$

sera inférieure à celle qui vérifie la condition

$$\frac{(2x+t+\tau)^{a+1}-(2x+2t)^{a+1}}{a+1}=\tfrac{1}{2}(x+t),$$

c'est-à-dire à la limite

$$\tau = 2(x+t)\left[1 + \frac{a+1}{4} 2^{-a}(x+t)^{-a}\right]^{\frac{1}{a+1}} - (2x+t);$$

donc elle sera comprise entre t et cette dernière limite, ce qui permettra de la calculer facilement pour chaque système de valeurs attribuées aux variables x et t. Or, pour la valeur de τ ainsi déterminée, la série qui donne la valeur de ξ ou l'intégrale cherchée deviendra convergente et offrira un reste inférieur, abstraction faite du signe, à l'expression $[E_t^{\prime(x)}]$, ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{\left[\frac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^a}{x+t}\right]^n}{1 - \frac{2(\tau-t)(2x+t+\tau)^a}{x+t}}(2x+t).$$

Donc cette série fournira l'intégrale générale de l'équation $dx = (x+t)^a dt$, et l'on pourra dire combien de termes on doit conserver dans le second membre de cette formule, pour obtenir la valeur de ξ avec un degré donné d'approximation. Ces conclusions subsistent quel que soit le nombre désigné par a. Toutefois, dans le cas où ce nombre devient considérable, il est avantageux de remplacer le coefficient de $\tau - t$ dans l'expression

$$(\tau - t)\, L \frac{f[x + h_i,\ t + \epsilon_m(\tau - t)]}{h_i},$$

non par $\frac{(2x+t+\tau)^a}{x+t}$, mais par le produit

$$\frac{2^a}{(a-1)^{a-1}}(x+\tau)^{a-1}.$$

En opérant ainsi, on obtient l'équation

$$(\tau - t)(x+\tau)^{a-1} = \frac{1}{2}\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a},$$

qui fournit une valeur de τ inférieure à celle qui vérifie la condition

$$\frac{(x+\tau)^a-(x+t)^a}{a}=\frac{1}{2}\frac{(a-1)^{a-1}}{a^a},$$

par conséquent une valeur de τ inférieure à la limite

$$\tau=(x+t)\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)^{a-1}(x+t)^{-a}\right]^{\frac{1}{a}}-x.$$

La valeur de τ en question surpassera notablement, si a devient considérable, celle qui vérifierait l'équation

$$(\tau-t)(2x+t+\tau)^{a}=\frac{1}{2}(x+t),$$

et une valeur plus petite, mais supérieure à t, rendra convergente la série qui donne la valeur de ξ. Ajoutons que le reste de la même série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit

$$\frac{\left[2\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(\tau-t)(x+\tau)^{a-1}\right]}{1-2\frac{a^a}{(a-1)^{a-1}}(\tau-t)(x+\tau)^{a-1}}\left(x+\frac{x+\tau}{a-1}\right).$$

294. Cette détermination des conditions de convergence et des limites de la série qui donne l'intégrale cherchée, peut être facilement étendue à un système quelconque d'équations différentielles entre une variable indépendante t et des fonctions $x, y, z,\ldots$ de ces mêmes variables. En effet, soit $f(x, y, z,\ldots)$ une fonction quelconque des variables réelles ou imaginaires $x, y, z,\ldots$. Soient d'ailleurs $x_i, y_i, z_i,\ldots$ des variables imaginaires dont les modules soient respectivement $r, r', r'',\ldots$, en sorte qu'on ait

$$x_i=r'e^{\theta'\sqrt{-1}},\quad y_i=r''e^{\theta''\sqrt{-1}},\quad z_i=r'''e^{\theta'''\sqrt{-1}},$$

θ', θ'', θ''',... étant des arcs réels; et supposons les modules r', r'', r''',... choisis de manière que la fonction

$$f(x + x_i,\quad y + y_i,\quad z + z_i, \ldots)$$

reste finie et continue quels que soient les arcs θ', θ'', θ''',..., pour les valeurs attribuées à ces modules, ou pour des valeurs plus petites; on tirera successivement de la formule

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

$$x, y, z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x + x_i,\ y,\ z, \ldots)\, d\theta,$$

$$x + x_i,\ y,\ z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x + x_i,\ y + y_i,\ z, \ldots)\, d\theta,$$

$$(x + x_i,\ y + y_i,\ z, \ldots) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x + x_i,\ y + y_i,\ z + z_i, \ldots)\, d\theta,$$

et, par conséquent,

$$(x, y, z, \ldots) = \int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ldots f(x + x_i,\ y + y_i,\ z + z_i, \ldots)\, \frac{d\theta'}{2\pi}\, \frac{d\theta''}{2\pi}\, \frac{d\theta'''}{2\pi} \ldots$$

En désignant par m', m'', m''',... des nombres entiers quelconques, on tirera pareillement de la formule

$$f^{(n)}(x) = \frac{1.2.3\ldots n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} r^{-n} e^{-n\theta\sqrt{-1}} f\left(x + re^{\theta\sqrt{-1}}\right) d\theta,$$

en posant $\dfrac{1.2\ldots m'}{r^{m'}} \cdot \dfrac{1.2\ldots m''}{r^{m''}} \cdot \dfrac{1.2\ldots m'''}{r^{m'''}} = K$,

$$_{x,y,\ldots}^{m'+m''+\ldots} f(x, y, \ldots) = K\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \ldots e^{-(m'\theta' + m''\theta'' + \ldots)\sqrt{-1}} f(x + x_i,\ y + y_i, \ldots)\, \frac{d\theta'}{2\pi}\, \frac{d\theta''}{2\pi} \ldots;$$

puis, en indiquant par la notation L_1 la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction imaginaire f, lorsque dans x_i, y_i, z_i,... on fait varier les

angles $\theta', \theta'', \theta''',\ldots$, sans changer les modules $r', r'', r''',\ldots$, on aura

$$M.\mathrm{D}_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) < \frac{1.2\ldots m'}{r'^{m'}}.\frac{1.2\ldots m''}{r''^{m''}}.\frac{1.2\ldots m'''}{r'''^{m'''}}\ldots L_{\mathrm{f}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$M.\mathrm{D}_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} \mathrm{f}(x, y, z, \ldots) < (-1)^{m'+m''+m'''+\ldots}\, r'r''r'''\ldots \mathrm{D}_{r'r''r'''\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots}\,(r'r''r'''\ldots)^{-1} L_{\mathrm{f}}.$$

Cette dernière formule subsiste lors même que les nombres m', m'', m''',..., ou quelques-uns d'entre eux, se réduisent à zéro. Il est d'ailleurs une remarque importante à faire, c'est que, pour obtenir, au signe près, le second membre de la dernière inégalité, il suffit de prendre

$$\mathrm{f}(x, y, z, \ldots) = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots}\mathrm{R},$$

puis d'effectuer les différentiations indiquées par la notation $\mathrm{D}_{xyz\ldots}^{m'+m''+m'''+\ldots} \mathrm{f}(x, y, z,\ldots)$, c'est-à-dire de différentier $\mathrm{f}(x, y, z,\ldots)$, m' fois par rapport à x, m'' fois par rapport à y, m''' fois par rapport à z,..., comme si R désignait une constante ou une quantité indépendante de ces variables, sauf à poser après les différentiations effectuées $\mathrm{R} = L_{\mathrm{f}}$, et hors de la fonction R, $x = r'$, $y = r''$, $z = r'''$,....

295. Considérons maintenant un système d'équations différentielles de la forme

$$dx = \mathrm{F}_1 dt, \quad dy = \mathrm{F}_2 dt, \quad dz = \mathrm{F}_3 dt, \ldots.$$

Si F_1, F_2, F_3,..., sont des fonctions des seules variables $x, y, z,\ldots$, en sorte que l'on ait

$$\mathrm{F}_1 = \varphi_1(x, y, z, \ldots), \quad \mathrm{F}_2 = \varphi_2(x, y, z, \ldots),$$
$$\mathrm{F}_3 = \varphi_3(x, y, z, \ldots), \ldots;$$

et qu'on désigne par $u = f(x, y, z, \ldots)$ une nouvelle fonction de ces mêmes variables, une intégrale des équations proposées sera fournie par l'équation

$$f(\xi, \eta, \zeta, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + (\tau - t)\mathrm{F_D} f(x, y, z, \ldots) + \frac{(\tau - t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2} f(x, y, z, \ldots) + \ldots,$$

dans laquelle on aura

$$\mathrm{F_D} f(x, y, z, \ldots) = \varphi_1 \mathrm{D}_x f + \varphi_2 \mathrm{D}_y f + \varphi_3 \mathrm{D}_z f + \ldots.$$

Cela posé, il est clair que dans le polynôme représenté par $\mathrm{F_D^n} f(x, y, z, \ldots)$, un terme quelconque sera le produit de plusieurs facteurs égaux ou inégaux, dont chacun coïncidera, soit avec l'une des fonctions f, φ_1, φ_2, $\varphi_3, \ldots$, soit avec l'une de leurs dérivées des divers ordres, prises par rapport à une ou à plusieurs des variables x, y, $z, \ldots$; et pour obtenir une limite supérieure au module de $\mathrm{F_D^n} f(x, y, z, \ldots)$, il suffira évidemment de remplacer chacun des facteurs en question par une limite supérieure à son module, limite que nous avons appris à déterminer. En opérant ainsi, on obtiendra pour limite supérieure au module du polynôme représenté par $\mathrm{F_D^{(n)}} f(x, y, z, \ldots)$, un second polynôme que nous désignerons par Λ, et qui, en vertu de la remarque précédemment faite, se déduira facilement du premier. En effet, pour avoir, au signe près, la valeur de Λ, il suffira de chercher ce que devient $\mathrm{F_D^{(n)}} f(x, y, z, \ldots)$ quand on y pose, avant les différentiations relatives à $x, y, z, \ldots$,

$$f = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots}\mathrm{A}, \quad \varphi_1 = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots}\mathrm{A}_1,$$

$$\varphi_2 = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots}\mathrm{A}_2, \quad \varphi_3 = \frac{r'r''r'''\ldots}{xyz\ldots}\mathrm{A}_3,$$

puis, après les différentiations,

$$x = r', \quad y = r'', \quad z = r''', \ldots,$$
$$A = Lf, \quad A_1 = L\varphi_1, \quad A_2 = L\varphi_2, \quad A_3 = L\varphi_3.$$

D'autre part, comme on trouvera le polynôme

$$F_D^n f(x, y, z, \ldots)$$

composé de termes tous positifs, ou tous négatifs, suivant que n sera pair ou impair, il est clair qu'il suffira de multiplier par $(-1)^n$ la valeur trouvée de $F_D f(x, y, z, \ldots)$, pour en déduire celle de A. Si, pour abréger, on pose

$$\rho = \frac{r' r'' r''' \ldots}{xyz \ldots},$$

on aura

$$f(x, y, z, \ldots) = A\rho,$$
$$F_D f(x, y, z, \ldots) = \rho (A_1 D_x f + A_2 D_y f + A_3 D_z f + \ldots),$$
$$F_D^n f(x, y, z, \ldots) = A F_D^{(n)} \rho = Lf . F_D^{(n)} \rho;$$

par suite, on aura

$$A = P_n Lf,$$

pourvu que l'on désigne par P_n ce que devient l'expression $(-1)^n F_D^n \rho$ quand on a égard aux remarques que nous avons faites. Il reste à déterminer P_n. Or, si l'on représente par u, v, w, ... des fonctions quelconques de x, y, z, ..., on aura évidemment, en vertu des équations qui définissent la fonction $F_D f(x, y, z, \ldots)$, et de l'équation

$$F_D f(x, y, z, \ldots) = \rho (A_1 D_x f + A_2 D_y f + A_3 D_z f + \ldots),$$
$$F_D (u + v + w + \ldots) = F_D u + F_D v + F_D w + \ldots,$$
$$F_D . uv = u F_D v + v F_D u,$$
$$F_D \rho^n = -n\rho^{n+1} \left(\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{y} + \frac{A_3}{z} + \ldots \right),$$
$$F_D \left(\frac{A_1^n}{x^n} + \frac{A_2^n}{y^n} + \frac{A_3^n}{z^n} + \ldots \right) = -n\rho \left(\frac{A_1^{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{A_2^{n+1}}{y^{n+1}} + \frac{A_3^{n+1}}{z^{n+1}} + \ldots \right),$$

et, par conséquent,

$$F_{D}\rho = \rho^2\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{y}+\frac{A_3}{z}+\dots\right),$$

$$F^2_{D}\rho = 2\rho^3\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{y}+\frac{A_3}{z}+\dots\right)^2+\rho^3\left(\frac{A_1^2}{x^2}+\frac{A_2^2}{y^2}+\frac{A_3^2}{z^2}+\dots\right),$$

$$F^3_{D}\rho = 6\rho^4\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{y}+\frac{A_3}{z}+\dots\right)^3+7\rho^4\left(\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{y}+\frac{A_3}{z}+\dots\right)\left(\frac{A_1^2}{x^2}+\frac{A_2^2}{y^2}+\frac{A_3^2}{z^2}+\dots\right)$$
$$+2\rho^4\left(\frac{A_1^3}{x^3}+\frac{A_2^3}{y^3}+\frac{A_3^3}{z^3}+\dots\right),$$

....

puis on en conclura, en posant hors des fonctions A_1, A_2, A_3,..., $x = r'$, $y = r''$, $z = r'''$,..., et par suite $\rho = 1$,

$$_1 = \left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right),$$

$$_2 = 2\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)^2+\left(\frac{A_1^2}{r'^2}+\frac{A_2^2}{r''^2}+\frac{A_3^2}{r'''^2}+\dots\right),$$

$$_3 = 6\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)^3+7\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)\left(\frac{A_1^2}{r'^2}+\frac{A_2^2}{r''^2}+\frac{A_3^2}{r'''^2}+\dots\right)$$
$$+2\left(\frac{A_1^3}{r'^3}+\frac{A_2^3}{r''^3}+\frac{A_3^3}{r'''^3}+\dots\right).$$

....

les valeurs de A_1, A_2, A_3,... étant déterminées comme nous l'avons dit. D'autre part, comme on aura évidemment

$$\frac{A_1^n}{r'^n}+\frac{A_2^n}{r''^n}+\frac{A_3^n}{r'''^n}+\dots < \left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)^n,$$

on en déduira

$$P_1 = \frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots, \quad P_2 < 3\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)^2,$$

$$P_3 < 15\left(\frac{A_1}{r'}+\frac{A_2}{r''}+\frac{A_3}{r'''}+\dots\right)^3,$$

et, généralement,

$$P_n < N\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)^n,$$

N désignant le $n^{ième}$ dernier terme de la suite

$$1, \quad 2 + 1 = 3, \quad 6 + 7 + 2 = 15, \ldots,$$

c'est-à-dire la somme des coefficients numériques compris dans le second membre de l'équation qui donnerait $F_D^n \rho$. Or, ces coefficients conservant les mêmes valeurs, quel que soit le nombre des variables x, y, z,..., il suffira, pour obtenir le nombre N, de considérer le cas très-simple où l'on aurait

$$\rho = \frac{r'}{x}, \quad F_D f(x) = A_1 \rho D_x f(x);$$

on trouverait alors

$$(-1)^n F_D^n \rho = N \rho^{n+1}\left(\frac{A_1}{x}\right)^n,$$

et, comme on tire directement des équations

$$\rho = \frac{r'}{x}, \quad F_D f(x) = A_1 \rho D_x f(x),$$

$$(-1)^n F_D^n \rho = 1.3.5\ldots(2n-1)\rho^{n+1}\left(\frac{A_1}{x}\right)^n,$$

on aura

$$N = 1.3.5\ldots(2n-1),$$

et, par suite,

$$P_n < 1.3.5\ldots(2n-1)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)^n,$$

$$\Lambda < 1.3.5\ldots(2n-1)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)^n Lf.$$

Ainsi Λ, qui représente une limite supérieure au mo-

dule de $F_D^n f(x, y, z,...)$, ne pourra surpasser le second membre de l'inégalité précédente; il en résulte que le terme général $\frac{(\tau - t)^n}{1.2.3...n} F_D^n f(x, y, z,...)$ de la série qui donne l'intégrale cherchée, offrira une valeur numérique inférieure à celle du produit

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{1.2.3...n}\left[(\tau - t)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)\right]^n L_f,$$

par conséquent à celle du produit

$$\left[2(\tau - t)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)\right]^n L_f;$$

donc les différents termes de la série en question offriront des valeurs numériques inférieures à celles des termes correspondants de la progression géométrique qui aurait ce dernier produit pour terme général: or, cette progression sera convergente si l'on a

$$M.\left[2(\tau - t)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \ldots\right)\right] < 1,$$

ou, ce qui revient au même, en substituant pour A_1, A_2, A_3,... leurs valeurs,

$$(C_n) \qquad M.(\tau - t) < \frac{\frac{1}{2}}{L\frac{\varphi_1(x+x_i, y+y_i,...)}{x_i} + L\frac{\varphi_2(...)}{y_i} + L\frac{\varphi_3(...)}{z_i}};$$

et alors si l'on remplace la somme de la série par la somme de ses n premiers termes, le reste de la série, ou l'erreur commise, sera inférieur, abstraction faite du signe, au reste de la progression géométrique, c'est-à-

dire à

$$(\mathrm{E}_n)\qquad \frac{\left\{M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{\mathrm{A}_1}{r'}+\frac{\mathrm{A}_2}{r''}+\frac{\mathrm{A}_3}{r'''}+\ldots\right)\right]\right\}^n}{1-M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{\mathrm{A}_1}{r'}+\frac{\mathrm{A}_2}{r''}+\frac{\mathrm{A}_3}{r'''}+\ldots\right)\right]}Lf.$$

Si l'on suppose en particulier $f(x, y, z,\ldots) = x$, la série qui donne l'intégrale devient

$$[\mathrm{I}_n^{(x)}]\quad \xi = x+\frac{(\tau-t)}{1}\mathrm{F_D}\,x+\frac{(\tau-t)^2}{1.2}\mathrm{F_D^2}\,x+\frac{(\tau-t)^3}{1.2.3}\mathrm{F_D^3}x+\ldots :$$

le reste, quand on s'arrêtera au $n^{ième}$ terme, offrira un module inférieur à

$$[\mathrm{E}_n^{(x)}]\qquad \frac{\left\{M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{\mathrm{A}_1}{r'}+\frac{\mathrm{A}_2}{r''}+\frac{\mathrm{A}_3}{r'''}+\ldots\right)\right]\right\}^n}{1-M.\left[2(\tau-t)\left(\frac{\mathrm{A}_1}{r'}+\frac{\mathrm{A}_2}{r''}+\frac{\mathrm{A}_3}{r'''}+\ldots\right)\right]}L(x+h_i).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante.

296. 3me *Théorème*. Supposons que la variable t, et des fonctions x, y, z,... de cette variable, étant liées entre elles par les équations différentielles

$$dx = \varphi_1(x, y, z,\ldots)dt,\quad dy = \varphi_2(x, y, z,\ldots)dt,$$
$$dz = \varphi_3(x, y, z,\ldots)dt,$$

on nomme ξ, η, ζ,... de nouvelles valeurs de x, y, z,..., correspondantes à une nouvelle valeur τ de t; ξ, η, ζ,... seront développables par la formule $[\mathrm{I}_n^{(x)}]$ en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la différence $\tau - t$, si la valeur numérique de cette différence est inférieure à celle que détermine l'équation

$$\tau - t = \frac{1}{2}\,\frac{1}{L\frac{\varphi_1(x+x_i, y+y_i,\ldots)}{x_i}+L\frac{\varphi_2(\ldots)}{y_i}+L\frac{\varphi_3(\ldots)}{z_i}},$$

les modules r', r'', r''',... des expressions imaginaires

$$x_i = r' e^{\theta' \sqrt{-1}}, \quad y_i = r'' e^{\theta'' \sqrt{-1}}, \quad z_i = r''' e^{\theta''' \sqrt{-1}}, \ldots,$$

étant choisis de manière que les fonctions

$$\varphi_1(x + x_i, \; y + y_i, \; z + z_i + \ldots), \quad \varphi_2(\ldots), \quad \varphi_3(\ldots),$$

demeurent finies et continues, quels que soient les angles θ', θ'', θ''',..., pour les valeurs attribuées à ces modules, et pour des valeurs plus petites. Alors le reste de chaque série réduite à ses n premiers termes, sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit $[E_n^{(x)}]$ ou à celui qu'on en déduirait en remplaçant $L(x + x_i)$ par l'une des quantités $L(y + y_i)$, $L(z + z_i)$,.... Alors aussi une fonction quelconque de ξ, η, ζ,..., désignée par $f(\xi, \eta, \zeta, \ldots)$, sera elle-même développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\tau - t$, et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (E_n), si, pour les valeurs attribuées aux modules r', r'', r''',..., ou pour des valeurs plus petites, la fonction

$$f(x + x_i, \; y + y_i, \; z + z_i + \ldots)$$

demeure finie et continue aussi bien que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3,..., quels que soient d'ailleurs les angles θ', θ'', θ''',....

297. Si, dans les équations proposées (D), F_1, F_2, F_3,... renferment explicitement la variable t, des raisonnements pareils à ceux par lesquels nous avons établi le 2me théorème fourniraient, au lieu du 3me théorème, celui que nous allons énoncer.

4me *Théorème*. Supposons que la variable t, et des fonctions x, y, z,... de cette variable, étant liées par

les équations différentielles

$$dx = \varphi_1(x,\ y,\ z,\ldots,\ t)\,dt,\quad dy = \varphi_2 dt,\quad dz = \varphi_3 dt,$$

on nomme ξ, η, ζ,... de nouvelles valeurs de x, y, z,..., correspondantes à une nouvelle valeur τ de t. Concevons d'ailleurs que $u = f(x,\ y,\ z,\ldots)$ étant une fonction quelconque de x, y, z,..., on pose, pour abréger,

$$\mathrm{F_D}\,u = \varphi_1 \mathrm{D}_x u + \varphi_2 \mathrm{D}_y u + \varphi_3 \mathrm{D}_z u + \ldots,$$

et que l'on désigne par $\mathrm{F'_D}u$, $\mathrm{F''_D}u$, $\mathrm{F'''_D}u$,... ce que devient $\mathrm{F_D}u$ quand à la variable t on substitue d'autres variables t', t'', t''',..... Soient encore ε', ε'', ε''',... des nombres inférieurs à l'unité, et supposons les modules r', r'', r''',... des expressions imaginaires

$$x_i = r' e^{\theta'\sqrt{-1}},\quad y_i = r'' e^{\theta''\sqrt{-1}},\quad z_i = r''' e^{\theta'''\sqrt{-1}},\ldots,$$

choisis de manière que chacune des fonctions

$$\varphi_1[x + x_i,\ y + y_i,\ z + z_i,\ldots,\ t + \varepsilon'(\tau - t)],\ \varphi_2(\ldots),\ \varphi_3(\ldots),$$

demeure finie et continue, quels que soient les angles θ', θ'', θ''',..., pour les valeurs attribuées à ces modules et pour des valeurs plus petites. Enfin, posons

$$\mathrm{A}_1 = L^{\varepsilon'_m}_{\varphi_1} = L\varphi_1[x + x_i,\ y + y_i,\ z + z_i,\ t + \varepsilon_m(\tau - t)],$$
$$\mathrm{A}_2 = L^{\varepsilon''_m}_{\varphi_2},\quad \mathrm{A}_3 = L^{\varepsilon'''_m}_{\varphi_3}\ldots,$$

L indiquant le plus grand module que puisse acquérir chaque fonction quand on fait varier les angles θ', θ'', θ''', sans changer r', r'', r''',..., et ε'_m, ε''_m, ε'''_m,... représentant les valeurs qu'il faut attribuer à ε', ε'', ε''', pour que chaque module devienne le plus grand possible. ξ, η, ζ,... seront développables en séries convergentes par la formule

$$\xi = x - \int_\tau^t \mathrm{F'_D}x\,dt' + \int_\tau^t\int_\tau^{t'} \mathrm{F'_D}\mathrm{F''_D}x\,dt''dt'$$
$$- \int_\tau^t\int_\tau^{t'}\int_\tau^{t''} \mathrm{F'_D}\mathrm{F''_D}\mathrm{F'''_D}x\,dt'''dt''dt'\ldots + \ldots,$$

et autres semblables, si la valeur numérique de $\tau - t$ est inférieure à celle que détermine l'équation

$$(\tau - t)\left(\frac{A_1}{r'} + \frac{A_2}{r''} + \frac{A_3}{r'''} + \dots\right) = \frac{1}{2}.$$

Alors le reste de chaque série réduite à ses n premiers termes sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit $[E_n'']$, ou à celui qu'on obtiendrait en remplaçant $L(x + x_i)$ par l'une des quantités $L(y + y_i)$, $L(z + z_i)$,..., les valeurs de A_1, A_2, A_3,... étant toujours déterminées par les mêmes équations. Alors aussi la fonction $f(\xi, \eta, \zeta,\dots)$ sera elle-même développable par la formule

$$f(\xi, \eta, \zeta,\dots) = f(x, y, z,\dots) - \int_\tau^t F_D f(x, y, z,\dots)\, dt' + \int_\tau^t \int_\tau^{t'} F'_D F''_D f(x, y, z,\dots)\, dt''\, dt' - \dots,$$

et le reste de cette série sera inférieur, abstraction faite du signe, au produit (E_n), si, pour les valeurs attribuées aux modules r', r'', r''',..., ou pour des valeurs plus petites, la fonction $f(x + x_i, y + y_i, z + z_i,\dots)$ demeure finie et continue aussi bien que les fonctions φ_1, φ_2, φ_3,..., quels que soient d'ailleurs les angles θ', θ'', θ''',....

Dans l'application des 3me et 4me théorèmes, il est avantageux de choisir les modules r', r'', r''',..., de telle sorte que la limite assignée au module de $\tau - t$ soit la plus grande possible.

298. *Note.* On a vu, par ce qui précède, que pour déterminer le reste des séries qui expriment les intégrales des équations proposées, il fallait chercher la valeur ε_n de ε, propre à donner la plus grande valeur possible à une expression dépendante de θ, et que l'on supposait déjà par-

venue à son maximum, par rapport à θ. Cette plus grande valeur, qui conduit à l'expression du reste, est du genre de celles qu'on a appelées *maxima maximorum* et que M. Cauchy apprend à déterminer dans une petite Note récemment publiée, que l'on sera bien aise de retrouver ici.

Soit x une variable réelle et $u = f(x)$ une fonction réelle de x, qui demeure continue avec sa dérivée seconde $f''(x)$, du moins entre certaines limites. Les valeurs de x qui, étant comprises entre ces limites, correspondront aux valeurs *maxima* et *minima* de la fonction u, seront, comme on sait, celles qui vérifieront l'équation

$$f'(x) = 0,$$

ou, ce qui revient au même, l'équation

$$D_x u = 0.$$

On sait encore qu'une racine simple de cette dernière équation fournit un *maximum* ou un *minimum* de u, suivant que la valeur correspondante de $D_x^2 u$ est une quantité négative ou positive.

Dans certaines questions il importe de déterminer, non pas tous les *maxima* ou *minima* d'une fonction donnée, mais seulement le plus grand de tous les *maxima*, ou le plus petit de tous les *minima*, c'est-à-dire, en d'autres termes, le *maximum maximorum* ou le *minimum minimorum*; on peut y parvenir dans un grand nombre de cas à l'aide des considérations suivantes :

Concevons que la fonction u renferme, avec la variable x, un certain paramètre α : il arrivera souvent que pour une valeur particulière de ce paramètre, il sera facile de reconnaître quelle est celle des racines de l'équation $D_x u = 0$ qui fournit le *maximum maximorum* de u. Soient X cette racine, et U la valeur correspondante

de u ou le *maximum maximorum*; on aura

$$U = f(X),$$

X étant racine de l'équation

$$D_x u = f'(x) = 0.$$

Concevons maintenant que le paramètre a vienne à varier par degrés insensibles : la racine X, qui correspond au *maximum maximorum* de la fonction u, variera elle-même en général par degrés insensibles, jusqu'à l'instant où l'on aura $u = u_1$, u_1 désignant un autre maximum correspondant à une autre racine X_1 de l'équation

$$f'(x) = 0,$$

par conséquent jusqu'à l'instant où l'équation en u, produite par l'élimination de x entre les formules

$$u = 0, \quad D_x u = 0,$$

acquerra des racines égales. Soit $U = 0$ cette équation en u; parmi les valeurs de u qui représenteront des racines égales, se trouveront comprises celles qui correspondront à des racines égales de l'équation

$$D_x u = 0,$$

c'est-à-dire à des valeurs de x pour lesquelles se vérifieront simultanément l'équation

$$D_x u = 0,$$

et la suivante

$$D_x^2 u = 0.$$

Des raisonnements semblables à ceux dont nous avons fait usage, nous auraient conduit aux mêmes équations

$$U = 0, \quad D_x^2 u = 0,$$

s'il eût été question de fixer, non plus le *maximum*

maximorum, mais le *minimum minimorum* de la fonction u. On peut donc énoncer la proposition suivante :

1er *Théorème*. Soient x une variable réelle et $u = f(x)$ une fonction de x qui demeure continue, du moins pour des valeurs de x, renfermées entre certaines limites; soit, de plus, X une racine de l'équation

$$D_x u = 0,$$

qui, étant comprise entre ces limites, fournisse le *maximum maximorum* ou le *minimum minimorum* de la fonction u. Si ce paramètre vient à varier, la racine X continuera de correspondre au *maximum maximorum* ou au *minimum minimorum* de la fonction u, jusqu'au moment où le paramètre α deviendra tel que l'équation $U = 0$, produite par l'élimination de x entre les formules

$$u = f(x), \quad D_x u = 0,$$

acquière des racines égales, par conséquent des racines pour lesquelles se vérifie la condition $D_u U = 0$. D'ailleurs cette condition sera remplie pour les valeurs de u, correspondantes à des valeurs de x, qui vérifieront non-seulement l'équation

$$D_x u = 0,$$

mais encore la suivante

$$D_x^2 u = 0.$$

En raisonnant de la même manière, on établira généralement la proposition suivante :

2me *Théorème*. Soient $x, y, z, \ldots$ des variables réelles, et $u = f(x, y, z, \ldots)$ une fonction réelle de $x, y, z, \ldots$ qui demeure continue, du moins pour des valeurs de x, y, $z, \ldots$, renfermées entre certaines limites. Soit de plus x, y, z,... un système de valeurs de x, y, $z, \ldots$ qui, étant comprises entre ces limites, vérifient les équations

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0, \ldots,$$

et qui fournissent le *maximum maximorum*, ou le *minimum minimorum* de u, pour certaines valeurs particulières d'un ou de plusieurs paramètres α, β, γ,..., contenus dans la fonction u. Si ces paramètres viennent à varier, le système des valeurs $x = \mathrm{x}$, $y = \mathrm{y}$, $z = \mathrm{z}$,..., continuera de correspondre au *maximum maximorum* ou au *minimum minimorum* de la fonction u, jusqu'au moment où les paramètres deviendront tels que l'équation $U = 0$, produite par l'élimination de x, y, z,..., entre la formule

$$u = f(x, y, z, \ldots),$$

et les suivantes

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0, \ldots,$$

acquière des racines égales, par conséquent des racines pour lesquelles se vérifie la condition $D_u U = 0$. D'ailleurs cette condition sera remplie par les valeurs de u, correspondantes à des valeurs de x, y, z,..., qui vérifieront non-seulement les formules

$$D_x u = 0, \quad D_y u = 0, \quad D_z u = 0, \ldots,$$

mais encore la suivante, $v = 0$, v désignant la fonction alternée que l'on forme avec les termes renfermés dans le tableau

$$\begin{array}{ccc} D_x^2 u, & D_{xy}^2 u, & D_{xz}^2 u, \\ D_{xy}^2 u, & D_y^2 u, & D_{yz}^2 u, \\ D_{xz}^2 u, & D_{yz}^3 u, & D_z^2 u, \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

En sorte que l'on ait, par exemple, quand les variables x, y, z,... se réduisent à deux,

$$v = D_x^2 u D_y^2 u - (D_x u D_y u)^2.$$

Note additionnelle.

M. Jacobi a appelé, dans ces derniers temps, l'attention des géomètres sur un théorème très-remarquable de Poisson, lequel, pour certains systèmes d'équations différentielles, permet de déduire les intégrales les unes des autres d'une manière directe, et sans employer des quadratures; de sorte que, dans certains cas, il suffit de connaître deux intégrales pour arriver à toutes les autres. Il nous serait impossible d'exposer ici complétement cette belle théorie de Poisson, rendue plus générale par M. Jacobi; mais nous pouvons, en terminant ce que nous avons à dire de l'intégration des équations différentielles ordinaires, profiter d'une Note de M. Liouville, pour donner au moins une idée de ce genre de recherches.

Supposons qu'on nous donne à intégrer les quatre équations

$$(D)\quad \begin{cases} D_t x = F_1 = \varphi D_u F, & D_t u = F_2 = -\varphi D_x F, \\ D_t y = F_3 = \varphi D_v F, & D_t v = F_4 = -\varphi D_y F, \end{cases}$$

dans lesquelles φ désigne une fonction donnée des cinq variables x, u, y, v, t, et F une fonction des seules variables dépendantes x, u, y, v.

L'expression $F=C$, C étant une constante, sera évidemment une des intégrales des équations données, car cette équation vérifie évidemment l'équation aux dérivées partielles

$$D_t F + F_1 D_x F + F_2 D_u F + F_3 D_y F + F_4 D_v F = 0.$$

Supposons que $f = c$, f étant une fonction des seules variables x, u, y, v, soit une seconde intégrale de ces mêmes équations, ou que l'on ait identiquement

$$(C)\quad D_u F\, D_x f - D_x F\, D_u f + D_v F\, D_y f - D_y F\, D_v f = 0;$$

et proposons-nous de trouver les deux autres intégrales.

qu'il faut joindre aux précédentes $F = C$, $f = c$, pour déterminer complétement x, u, y, v en fonction de la variable indépendante t.

Pour cela, observons d'abord que des deux équations $F = C$, $f = c$, on peut tirer les valeurs de deux des inconnues u et v par exemple, en fonction des deux autres, et des constantes arbitraires C, c. En portant ces valeurs dans les équations

$$D_t x = \varphi D_u F, \quad D_t y = \varphi D_v F,$$

on arrivera à deux équations à deux variables, et pour que $f = c$ soit une de leurs intégrales, il suffira que l'on ait

$$D_t f + \varphi (D_u F\, D_x f + D_v F\, D_y f) = 0,$$

ou même plus simplement

$$D_u F\, D_x f + D_v F\, D_y f = 0,$$

si f ne renferme pas la variable indépendante t.

Admettons maintenant, ce que nous démontrerons tout à l'heure, que le binôme $udx + vdy$ soit la différentielle d'une certaine fonction χ des seules variables x, y : on aura

$$\int (udx + vdy) = \chi, \quad u = D_x \chi, \quad v = D_y \chi.$$

Mais en différentiant, par rapport à c, dont u et v dépendent, l'équation $F = C$, on trouve

$$D_u F\, D_c u + D_v F\, D_c v = 0,$$

ou

$$D_u F\, D_x.D_c \chi + D_v F\, D_y.D_c \chi = 0;$$

donc l'équation

$$D_u F\, D_x f + D_v F\, D_y f = 0$$

sera vérifiée, et $f = c$ sera l'intégrale cherchée, si l'on fait $f = D_c \chi$, et, par conséquent, l'équation $D_c \chi = c$ sera une troisième intégrale des équations (D).

Si φ est une fonction de t seulement, on trouvera aisément une quatrième intégrale. Différentions en effet, par rapport à C, l'équation $F=C$, puis multiplions par φ, il viendra

$$-\varphi+\varphi(D_u F\, D_C u + D_v F\, D_C v)=0$$

ou

$$-\varphi+\varphi(D_u F\, D_x . D_C \chi + D_v F\, D_y . D_C \chi)=0;$$

d'où il suit que l'équation

$$D_t f+\varphi(D_u F\, D_x f + D_v F\, D_y f)=0$$

sera satisfaite par $f=D_C \chi-\int \varphi dt$, et que, par conséquent, c étant une constante arbitraire, la dernière intégrale cherchée des équations (D) sera

$$D_C \chi=\int \varphi dt + c.$$

Mais lorsque φ ne se réduit pas à une simple fonction de t, on doit se borner à tirer des trois intégrales connues les valeurs de trois des variables dépendantes, u, y, v, par exemple, pour les reporter dans la première des équations données, qui ne sera plus qu'à deux variables, et dont il restera à trouver l'intégrale complète.

Il reste à démontrer que $udx+vdy$ est une différentielle exacte, ou que $D_y u = D_x v$. Or, des deux équations $F=C$, $f=c$, différentiées tour à tour par rapport à x et y, en y regardant u, v comme fonctions des deux premières variables, on tire

$$D_x F+D_u F\, D_x u+D_v F\, D_x v=0,\quad D_x f+D_u f\, D_x u+D_v f\, D_x v=0,$$
$$D_y F+D_u F\, D_y u+D_v F\, D_y v=0,\quad D_y f+D_u f\, D_y u+D_v f\, D_y v=0,$$
$$D_x v=\frac{D_x f\, D_u F-D_u f\, D_x F}{D_u f\, D_v F-D_v f\, D_u F},\quad D_y u=\frac{D_v f\, D_y F-D_y f\, D_v F}{D_u f\, D_v F-D_v f\, D_u F},$$

et ces deux valeurs sont évidemment égales, en vertu de l'équation (C) :

$$D_u F\, D_x f - D_x F\, D_u f + D_v F\, D_y f - D_y F\, D_v f = 0.$$

On prouverait aussi de la même manière que le binôme $xdu + ydv$ est une différentille exacte $d\psi$, et la fonction ψ servirait, comme la fonction χ, à déterminer les deux dernières intégrales des équations données.

M. Jacobi remarque que cette méthode d'intégration s'applique d'elle-même aux deux équations du second ordre

$$D_t^2 x = - D_x \mathrm{R} - D_x R, \quad D_t^2 y = - D_y \mathrm{R} - D_y R,$$

qu'on peut remplacer par les quatre suivantes

$$D_t x = u, \quad D_t u = - D_x(\mathrm{R} + R),$$
$$D_t y = v, \quad D_t v = - D_y(\mathrm{R} + R),$$

et qui déterminent le mouvement d'un mobile qui se meut dans un plan soumis à des actions $D_\mathrm{r} \mathrm{R}$, $D_r R$, fonctions des distances r, r de ce point à deux centres fixes situés dans ce plan. Pour faire coïncider ces équations avec les équations (D), il suffit de poser

$$\varphi = 1, \quad F = \tfrac{1}{2}(u^2 + v^2) + \mathrm{R} + R.$$

FIN DU DEUXIÈME VOLUME.

